O jedenáctém a dvanáctém Hilbertově problému

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 19 (1974), No. 1, 21--22

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/139120

rozřešené problémy komentujeme slovy: ..., *což jednoduše ovšem plyne ze známých tvrzení*..., nebo konkrétněji: ..., *který obdržíme triviálně jako důsledek jedné X-ovy věty*. Položíme-li např. X = S. Banach, stěží nám někdo bude oponovat.

Závažnost práce lze zvýšit bez většího úsilí užitím těchto slovních spojení: *Platnost odvozeného tvrzení se snadno rozšíří i na případ*...; *V případě... se uvedené úvahy pouze zjednoduší*...; *Bez újmy na obecnosti rozřešíme případ pro*... Složitější problém stačí pak jen formulovat. Užití těchto frází však vyžaduje od autora dostatečný talent, aby se vystříhal očividných chyb, resp. žádá méně pozorného čtenáře.

Věříme, že tento příspěvek obrátí pozornost k zajímavé problematice a alespoň některým bude stimulem k dalšímu studiu v této oblasti. Doufáme, že jsme se vyhnuli příliš striktnímu rozboru jednotlivých frází, neboť by mohl přispět k nezdravé unifikaci českých matematických textů, čímž by utrpěla jejich jazyková čistota a krása. Ostatně čtenář, který se jen letmo seznámil s touto problematikou, snadno vyluští význam frází typu: *Důkazy uvedených tvrzení budou uveřejněny později* [návod: třeba se na to zapomene] ... (*Pokračování*) [návod: nikdo netvrdí kdy] apod.

Proslýchá se, že by bylo možné zřídit speciální sekci pro mluvený a psaný matematický jazyk — zájemcům by bylo možno pak z prostředků sekce pořídit či zapůjčit speciální drilová cvičení, zaměřená např. ke správnému užití elementárních vazeb se slovy *triviálně, snadno, zřejmě* apod.

Zpracováno podle citovaného pramenu

Hilbertovy problémy

O jedenáctém a dvanáctém Hilbertově problému

Jedenáctý a dvanáctý Hilbertův problém náležejí svým původem do teorie čísel současný stav bádání v této problematice je však staví do souvislosti s dalšími matematickými disciplínami, např. s teorií funkcí komplexní proměnné a s algebraickou geometrií.

Jedenáctý Hilbertův problém byl ve své době motivován tím, že tehdy již existovala dobře rozvinutá teorie kvadratických forem nad tělesem racionálních čísel. Hilbert doporučuje věnovat pozornost teorii kvadratických forem nad libovolným algebraickým číselným tělesem, zejména pak tomuto problému: Je dána kvadratická rovnice s libovolným počtem proměnných, jejíž koeficienty jsou prvky některého algebraického číselného tělesa. Mají se zkoumat řešení této rovnice v celých nebo zlomkových algebraických číslech patřících do základního tělesa.

Dvanáctý Hilbertův problém vychází z tzv. Kroneckerovy věty. Číselné těleso K se nazývá abelovským rozšířením tělesa racionálních čísel Q, jestliže je jeho normálním a separabilním algebraickým rozšířením, přičemž Galoisova grupa tohoto rozšíření je abelovská. Kroneckerova věta říká, že těleso, které vznikne z Q adjungováním všech odmocnin z jedničky (všech možných stupňů), je maximálním abelovským rozšířením tělesa Q, tj. každé jiné abelovské rozšíření je jeho podtělesem. Jiná formulace Kroneckerovy věty je následující: Exponenciální funkce $e^{i\pi z}$ je pro těleso Q racionálních čísel „vytvořující funkcí" v tom smyslu, že když za proměnnou z dosadíme všechny možné hodnoty z Q a všechna takto získaná čísla adjungujeme k tělesu Q, obdržíme maximální abelovské rozšíření.

Hilbertův problém záleží v zobecnění Kroneckerovy věty na případ, kdy základní těleso Q je nahrazeno libovolným algebraickým číselným tělesem. Jde tedy o otázku existence vytvořujících funkcí, které by v případě obecných těles hrály podobnou úlohu jako exponenciální funkce v případě tělesa racionálních čísel. Hilbert poukazuje ještě na hypotézu vyslovenou Kroneckerem, že v případě komplexních kvadratických těles by vytvořujícími funkcemi měly být tzv. eliptické modulární funkce.

Ačkoliv formulace obou Hilbertových problémů je poměrně elementární, metody studia této problematiky jsou neobyčejně náročné a využívají složitých aparátů z mnoha matematických oblastí. Po konzultaci s experty došla redakce k závěru, že pro zpracování problémů nemáme u nás vhodné autory a patrně též čtenářský zájem by nebyl příliš široký. Případné singulární zájemce proto odkazujeme na sborník *Problemy Gil'berta*, kde jsou obě kapitoly zpracovány JU. I. MANINEM.

Redakce PMFA

O třináctém Hilbertově problému

Luděk Zajíček, Praha

Třináctá část Hilbertovy přednášky *Matematické problémy*, přednesené na 2. Mezinárodním kongresu matematiků r. 1900 v Paříži, má název „Nemožnost řešení obecné rovnice sedmého stupně pomocí funkcí dvou proměnných". V této části D. Hilbert klade problém inspirovaný nomografií, který se týká jedné z nejstarších úloh matematiky – řešitelnosti algebraických rovnic.

1. Spojitou reálnou funkci dvou reálných proměnných můžeme graficky přibližně zobrazit například pomocí vrstevnic, tj. tak, jak se na mapě zobrazuje nadmořská výška. Máme-li takto s velkou přesností zobrazeny funkce dvou proměnných $f(x, y)$ a $g(z, t)$, můžeme s velkou přesností zjišťovat hodnoty funkce tří proměnných $f(x, g(z, t))$.