

Aktuárské vědy

E. J. Gumbel

L'âge limite. III

Aktuárské vědy, Vol. 6 (1936), No. 3, 114–122

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/144664>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

gen dieser Integralgleichungen sind aber die üblichen Formen der Prämienreserve.

Sowohl die retrospektive als auch die prospektive Integralgleichung läßt sich auf einfachere Weise lösen. Das einfachste Lösungsverfahren ist jenes der Differentiation. Es wurde zuerst von Prof. Cantelli⁴⁾ angewendet.

Differentiiert man beide Integralgleichungen nach k , so ergibt sich die gemeinsame Differentialgleichung

$$\frac{d {}_k \bar{V}_x}{dk} = (\mu_{x+k} + \delta) {}_k \bar{V}_x + {}_k Q_x - \mu_{x+k} {}_k \bar{V}_x = \delta {}_k \bar{V}_x + {}_k \bar{Q}_x,$$

die wir in der Form unserer Definitionsgleichung

$$\frac{d {}_k \bar{V}_x}{dk} - \delta {}_k \bar{V}_x = {}_k \bar{Q}_x$$

schreiben können. Man braucht nur diese einfache Differentialgleichung retrospektiv und prospektiv zu integrieren, um dieselben Ergebnisse zu erhalten, welche die Lösungen der Integralgleichungen liefern. Mit Anwendung des Diskontierungsfaktors v^k läßt sich die vorstehende Differentialgleichung umformen in

$$d ({}_k \bar{V}_x v^k) = v^k {}_k \bar{Q}_x dk.$$

Integriert man nun diese Gleichung zwischen 0 und k , so erhält man wegen ${}_0 V_x = 0$

$${}_k \bar{V}_x = \int_0^k v^{k-t} {}_t \bar{Q}_x dt.$$

Integriert man diese Gleichung aber zwischen k und n , so erhält man wegen ${}_n \bar{V}_x = S_n^{III}$

$${}_k \bar{V}_x = v^{n-k} S_n^{III} - \int_k^n v^{t-k} {}_t \bar{Q}_x dt.$$

L'âge limite.

E. J. Gumbel, Université de Lyon.

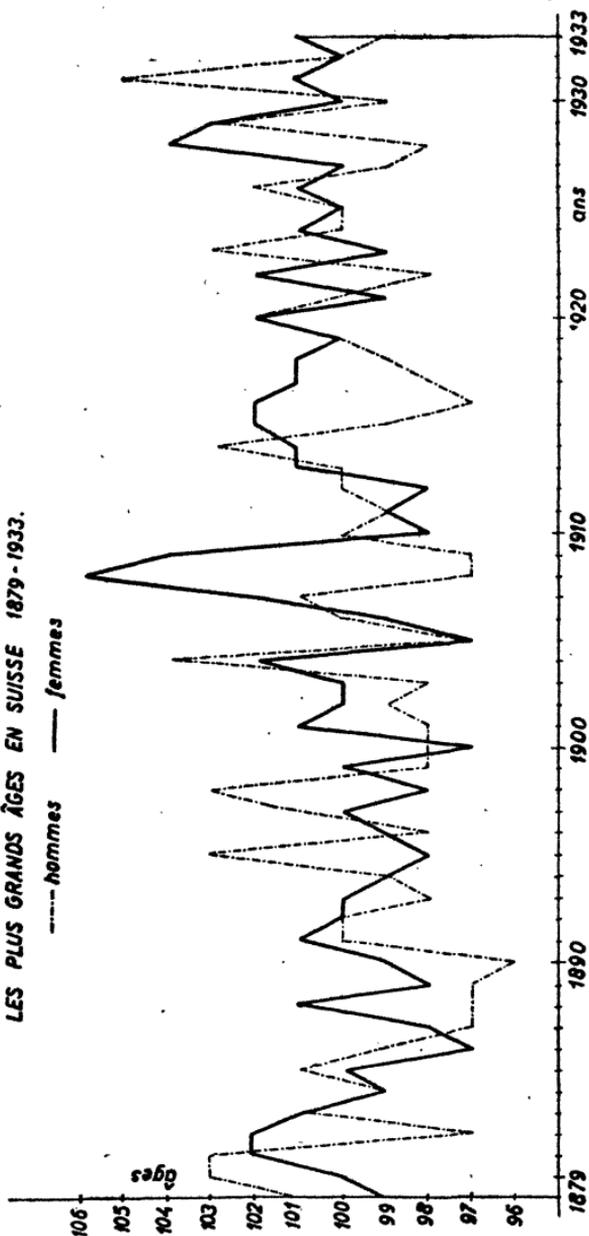
(A suivre.)

Puis on aura le plus grand âge dominant

$$\tilde{\omega} = \bar{\omega} - \frac{\gamma \sqrt{6} \sigma}{\pi}$$

⁴⁾ Vergl. den Aufsatz von Prof. Dr. Insolera „Rente und Kapitalansammlung“ in den Blättern für Versicherungs-Mathematik und verwandte Gebiete. Heft Nr. 7, 1. I. 1930; oder: Prof. Francesco Cantelli, *Genesi e Construzione delle Tavole di Mutualità*, Roma 1914; oder: Prof. Dott. Ignazio Messina, *Le Probabilità parziali nella Matematica attuariale*, Roma 1916.

FIG. 2.
LES PLUS GRANDS ÂGES EN SUISSE 1879-1933.



ou en introduisant les valeurs numériques

$$\tilde{\omega} = \bar{\omega} - 0,45005. \quad (22)$$

Le tableau VII contient pour les trois distributions la moyenne arithmétique que nous identifions à l'âge limité (première ligne), puis l'écart

type σ (deuxième ligne). On obtient la dominante par (22) (troisième ligne) et l'intensité de mortalité à cet âge par (21). La quatrième ligne donne sa valeur inverse, appelée dernière force de vie.

L'âge limite et la dominante pour les hommes sont inférieurs à ceux pour les femmes. Les valeurs pour l'ensemble se tiennent entre les valeurs pour les deux sexes séparés. La même hiérarchie vaut pour l'intensité de mortalité. Les dominantes sont toutes proches des âges limites ce qui convient au fait que ces distributions sont assez serrées.

VII. Constantes pour les distributions du plus grand âge, Suisse 1879—1932.

	Hommes	Femmes	Ensemble
Age limite $\bar{\omega}$	99,69091	100,27273	99,98182
Écart type σ	2,11379	1,79347	1,98165
Dominante $\bar{\omega}$	98,73960	99,46558	99,08998
Dernière force de vie $\frac{1}{\mu(\bar{\omega})}$..	1,64812	1,39837	1,54519

Les intensités de mortalité pour les dominantes du plus grand âge sont encore sensiblement inférieures à la valeur 1.

Pour comparer ces observations à la théorie, nous allons construire le diagramme cumulatif, qui contient le nombre des cas où le plus grand âge est inférieur à une valeur x . Ces grandeurs sont données dans le tableau VIII.

VIII. Fréquences cumulatives des plus grands âges.

Age	Hommes	Femmes	Ensemble	Plus âgé des deux
96	1	0	0,5	0
97	9	3	6	1
98	18	9	13,5	4
99	28	18	23	10
100	39	31	35	24
101	44	43	43,5	36
102	46	51	48,5	43
103	53	52	52,5	50
104	54	54	54	53
105	55	54	54,5	54
106	55	55	55	55

Les valeurs théoriques correspondantes au tableau VIII sont les grandeurs $\mathfrak{B}(x)$ de la formule (13) multipliées par le nombre d'années n . Pour la comparaison entre la théorie et les observations il faudrait calculer les trois séries de ces valeurs. Au lieu de cela nous inversons la question. Pour des valeurs choisies de y on connaît la probabilité $\mathfrak{B}(x)$

des valeurs inférieures à y par les tables données dans le travail précédent. Nous calculons pour des valeurs choisies de \mathfrak{B} les plus grands âges correspondants par

$$x = \bar{\omega} + \frac{y}{\mu(\bar{\omega})}. \quad (23)$$

Le tableau IX (colonne 6) donne les probabilités des âges inférieurs à x , multipliées par n , grandeurs comparables aux valeurs du tableau VIII pour les deux sexes séparés et l'ensemble. La première colonne donne les valeurs y . La seconde, troisième et quatrième contiennent les valeurs correspondantes des plus grands âges pour les trois distributions envisagées, enfin la cinquième donne la probabilité que ces âges soient les plus grands.

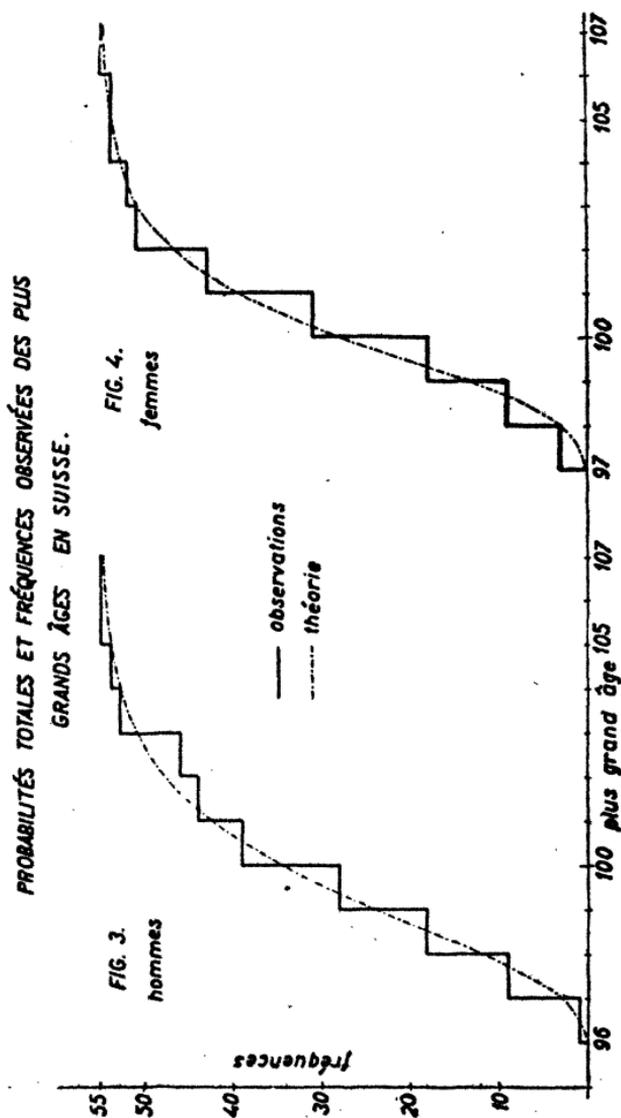
IX. Probabilités des plus grands âges.

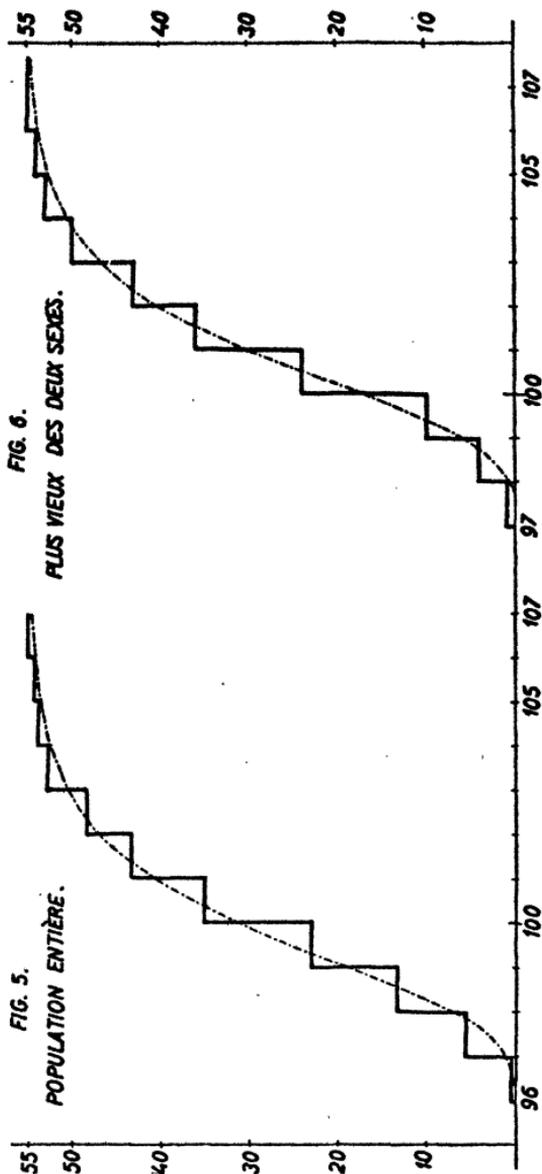
y	x hommes	x femmes	x ensemble	$\mathfrak{B}(x)$	$n \mathfrak{B}(x)$	$\mathfrak{B}_1(x)$	$n \mathfrak{B}_1(x)$
1	2	3	4	5	6	7	8
- 1,5	96,27	97,37	96,77	0,01132	0,62	0,109	0,07
- 1,0	97,09	98,07	97,55	0,06599	3,63	0,225	0,82
- 0,5	97,92	98,77	98,32	0,19230	10,58	0,374	3,96
0	98,74	99,47	99,09	0,36788	20,23	0,524	10,63
0,5	99,56	100,16	99,86	0,54525	29,99	0,652	19,55
1,0	100,39	100,86	100,64	0,69220	38,07	0,754	28,70
1,5	101,21	101,56	101,41	0,80003	44,00	0,831	36,56
2,0	102,04	102,26	102,18	0,87345	48,04	0,886	42,56
2,5	102,86	102,96	102,95	0,92120	50,67	0,925	46,87
3,0	103,68	103,66	103,73	0,95143	52,33	0,951	49,77
3,5	104,51	104,36	104,50	0,97025	53,36	0,967	51,60
4,0	105,33	105,06	105,27	0,98185	54,00	0,977	52,76
4,5	106,16	105,76	106,04	0,98895	54,39	0,985	53,57
5,0	106,98	106,46	106,82	0,99328	54,63	0,991	54,14
5,5	107,80	107,16	107,59	0,99592	54,78	0,994	54,45

Reste encore à traiter la distribution des plus âgés des deux sexes. La probabilité du plus grand âge des femmes d'être inférieur à x est $\mathfrak{B}(x)$. Soit $\mathfrak{B}_1(x)$ la même probabilité pour les hommes. Alors la probabilité du plus grand âge du plus vieux des deux sexes d'être inférieur à x est $\mathfrak{B}(x) \cdot \mathfrak{B}_1(x)$ d'après le problème des probabilités composées. Mais la colonne 5 du tableau IX contient les valeurs $\mathfrak{B}(x)$ et $\mathfrak{B}_1(x)$ pour des âges différents. Pour former le produit pour les mêmes âges nous avons interpolé les probabilités des plus grands âges pour les hommes. Le tableau IX, colonne 7, donne les probabilités $\mathfrak{B}_1(x)$ qu'un âge x (colonne 3) soit le plus grand pour les hommes. En multi-

pliant $\mathfrak{B}_1(x)$ avec la probabilité $\mathfrak{B}(x)$ que le même âge soit le plus grand pour les femmes (colonne 5) on obtient la probabilité que cet âge soit le plus grand pour le plus vieux des deux sexes. Il suffit de faire ce calcul à trois décimales. La colonne 8 donne les valeurs $n \mathfrak{B}(x) \mathfrak{B}_1(x)$ comparables à la dernière colonne du tableau VIII.

Les figures 3—6 comparent les valeurs observées du tableau VIII aux valeurs théoriques du tableau IX. L'accord est tout à fait satisfaisant. Les distributions observées du plus grand âge pour la Suisse s'accordent aux valeurs théoriques. L'application de la théorie de la plus grande valeur aux plus grands âges est légitime.





Il y a encore un autre critère pour juger l'accord entre la théorie et les observations. Nous connaissons pour chacun des 52 ans l'âge du dernier survivant. Parmi ces valeurs il y aura une qui sera maxima ω'_1 , une qui sera minima ${}_1\omega'$. Et cela aura lieu pour chacune des trois distributions. On peut se demander si ces valeurs extrêmes des plus grands âges, extraites du tableau VI et reproduites dans le tableau VIII sont justifiées par notre théorie.

Le calcul des valeurs théoriques des maxima est simple. En effet, pour la distribution (8) et pour n observations la distribution de la plus grande valeur est d'après l'article précédent

$$v_1(y) = e^{-(y-\lg n)} - e^{-(y-\lg n)}$$

dont on tire la dominante

$$y_1 = \lg n. \quad (24)$$

La dominante du maximum du plus grand âge sera d'après (9)

$$\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega} + \frac{\lg n}{\mu(\tilde{\omega})}. \quad (25)$$

En introduisant pour les deux sexes $n = 55$ et pour l'ensemble $n = 110$ on obtient à l'aide du tableau VII les valeurs théoriques du maximum du plus grand âge pour les trois distributions. Ces grandeurs portées dans le tableau X s'accordent fort bien aux observations: le plus grand âge atteint pendant les 55 ans était 106 ans, tandis que notre théorie prévoit 106,36 ans. On ne peut pas demander plus puisque l'âge du dernier survivant nous est connu seulement en nombre entier.

Le calcul du minimum du plus grand âge est un peu plus compliqué. La plus petite valeur d'une distribution (8) possède pour n observations la densité de probabilité

$${}_1v(y) = n(1 - \mathfrak{B})^{n-1}w.$$

La dominante ${}_1y$ de la plus petite valeur sera la solution de

$$\frac{n-1}{1-\mathfrak{B}} w = \frac{w'}{w}.$$

En introduisant (8) et (13) on obtient en posant $e^{-y} = z$

$$\frac{n-1}{1-e^{-z}} ze^{-z} = z - 1.$$

Alors il s'agit de résoudre

$$n-1 = \left(1 - \frac{1}{z}\right) (e^z - 1). \quad (26)$$

Du point de vue de l'ordre de grandeur on aura $\log n = z - (1/z)$ ce qui simplifie la résolution. Puis on trouve la dominante de la plus petite valeur

$${}_1y = -\lg z. \quad (27)$$

On en tire la dominante ${}_1\tilde{\omega}$ du minimum du plus grand âge

$${}_1\tilde{\omega} = \tilde{\omega} + \frac{{}_1y}{\mu(\tilde{\omega})}. \quad (28)$$

Pour les distributions des plus grands âges des hommes et des femmes

on a $n - 1 = 54$. Une interpolation simple mène à $z = 4,26987$ dont on tire ${}_1y = -1,45399$.

Pour la distribution des deux sexes on a $n - 1 = 109$. On obtient $z = 4,92771$ et ${}_1y = -1,59487$.

Les valeurs numériques des minima calculées à l'aide du tableau IX sont portées dans la tableau X. L'accord est frappant. Parmi les 6 différences entre la théorie et les observations il n'y a qu'une qui surpasse un an.

X. Les extrêmes des plus grands âges.

	Minimum		Maximum	
	observation	théorie	observation	théorie
	${}_1\omega'$	${}_1\tilde{\omega}$	ω'_1	$\tilde{\omega}_1$
Hommes	96	96,34	104	105,34
Femmes.....	97	97,43	106	105,08
Ensemble	96	96,63	106	106,36

Les espérances mathématiques des extrema seront pour les minima un peu inférieures, pour les maxima un peu supérieures aux valeurs calculées des dominantes. Mais ce calcul supplémentaire, de même que le calcul de l'écart type ne vaut pas la peine.

5. Conclusions.

Nous rejetons les théories usuelles sur l'âge limite et les essais faits jusqu'ici pour déterminer cet âge d'une façon approximative, en particulier les méthodes qui déterminent l'âge limite à l'aide des observations peu nombreuses sur les âges avancés. Par contre notre théorie n'emploie que des données se rapportant au voisinage de l'âge normal, pour lequel les nombres observés sont nombreux et assez surs.

Le problème de la survie d'une seule personne semble — mais semble seulement — se trouver en dehors des conditions sur lesquelles repose la théorie des probabilités. Pourtant notre solution n'est basée que sur elle. Nous supposons que la distribution des décès s'étend jusqu'à l'infini et ne se rapproche qu'asymptotiquement de zéro. Par conséquence nous calculons le dernier âge comme l'âge pour lequel on doit s'attendre à ce que parmi un nombre de décès donné, un et un seul individu soit mort après. Cela mène à la détermination extrêmement simple (3) dont on tire l'âge limite à l'aide de (10).

Pour qu'une formule biométrique soit utilisable pour ce calcul, il suffit que le produit de l'âge par l'intensité de mortalité ne diminue pas avec l'âge. La formule de Lexis répond à cette condition. Le dernier âge s'obtient alors par (18) et son écart type par (20). Il en résulte qu'un accroissement de l'âge normal, suivi, comme c'est la règle, d'une dimi-

nution de l'espérance de vie à cet âge, a une influence défavorable du point de vue de la longévité.

Malgré la simplicité des calculs analytiques et malgré l'approximation assez grossière utilisée, l'accord entre la théorie et l'expérience montré par les tables Américaines est satisfaisant. Il faudra bien distinguer notre théorie générale de l'âge limite et l'application que nous en faisons en employant la formule de Lexis.

Les observations faites sur le plus grand âge en Suisse pendant 55 années montrent que la distribution de ces valeurs est bien celle qu'il fallait attendre. Cette comparaison ne nécessite aucun choix d'une formule biométrique. La théorie est encore vérifiée par les valeurs extrêmes de ces distributions. Cet accord est possible parce que ces cas apparemment individuels reposent sur de nombreuses observations. En ce sens et aussi du point de vue analytique nos raisonnements sont parallèles aux recherches de Bortkiewicz qui ont abouti à la loi des événements rares.

En somme la théorie qui semble paradoxale suivant laquelle il n'y a pas d'âge limite fixe est en accord avec les observations. Et ainsi sont contredit tous les arguments qui reposent sur l'existence d'un tel âge.

Remarques sur l'ajustement analytique des tables de mortalité.

Par Jiří Seitz (Prague).

Soit une table de mortalité ajustée selon une loi analytique où figurent un certain nombre de paramètres. Nous envisageons le cas où les valeurs attribuées à ces paramètres viennent à être modifiées et nous nous proposons d'étudier les variations qui en découlent pour les principales fonctions actuarielles. La recherche des solutions des problèmes qui se trouvent ainsi posés est d'autant plus importante qu'à l'heure actuelle on constate une évolution très rapide du phénomène de mortalité.

Dans le cas de la loi de Makeham, cette question a été traitée par Friedli, dans la deuxième partie d'un article „Reserve und Rentenbarwert als analytische Funktionen“ qui a paru dans les „Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker“, No 13, 1918. Friedli arrive à ses résultats, en faisant appel à la théorie des fonctions Γ incomplètes. Nous allons démontrer qu'une partie des relations établies dans son article sont des cas particuliers des relations générales valables pour toutes les lois de Quiquet.

Soient μ_x le taux instantané de mortalité, δ le taux instantané d'intérêt et

$$\eta(x) = \mu_x + \delta.$$