Učitel matematiky

Naďa Stehlíková

Soutěž AHSME = AMC 12

Učitel matematiky, Vol. 10 (2002), No. 1, 47–51

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150478`

Soutěž AHSME = AMC 12.

NAĎA STEHLÍKOVÁ

Nedávno se mi dostala do ruky kniha [1] obsahující úlohy z americké matematické soutěže pro střední školy. Kniha se mi zalíbila a rozhodla jsem se vybrat z ní některé ukázky do rubriky *Úlohy ze zahraničí*. Zmíněná publikace však vyšla poměrně dávno, zajímalo mě tedy, zda soutěž, o které pojednává, stále ještě probíhá. Zde jsou výsledky mého „pátrání".

Úvod

V r. 1950 proběhl první ročník soutěže *The Annual High School Mathematics Examination* (AHSME) organizované pouze pro oblast New Yorku. Tehdy se jí zúčastnilo 6 000 studentů. V roce 2001 to bylo již 154 372 účastníků z celých USA. Soutěž organizuje *Mathematical Association* of America a v roce 2000 byla zahrnuta mezi soutěže AMC (American Mathematical Competitions – americké matematické soutěže) a přejmenována na AMC 12.

Cílem soutěží AMC je zvyšovat matematické schopnosti americké mládeže. Kromě již zmíněné soutěže AMC 12 (zúčastňují se jí studenti mladší než 19,5 roku, kteří jsou na konci své středoškolské docházky) se jedná o AMC 8, AMC 10, AIME (the American Invitational Mathematics Examination)[15] a USAMO (the United States of America Mathematical Olympiad). Soutěže AMC jsou zaměřeny na každého studenta, od průměrného studenta se zájmem o řešení matematických úloh až po nejlepší studenty specializovaných škol.

Pojďme zpět k soutěži AHSME, resp. AMC 12. Jejím hlavním cílem je vyvolat a podporovat zájem studentů o matematiku a rozvíjet jejich matematický talent. Zahrnuje jak jednoduché, tak velice náročné úlohy. Účast studenta na soutěži je prvním krůčkem

Příspěvek byl částečně podpořen grantem GAUK 316/2001/A-PP/PedF.

[15] Jakýsi předvýběr pro matematickou olympiádu.

k účasti v matematické olympiádě a dobrou vizitkou při vstupu na vysokou školu.

Jak autoři knihy uvádějí, při výběru úloh do soutěže ACM 12 se klade důraz na středně náročnou algebru a rovinnou geometrii. Soutěž se dnes skládá z 25 otázek s nabídkou odpovědi a trvá 75 minut. Ve všech přihlášených středních školách probíhá soutěž v jeden den (v roce 2002 to bude 12. února, druhý termín je 27. února). Kalkulačky jsou povoleny.

Způsob bodování je obdobný jako v soutěži Matematický klokan. Za každou správnou odpověď je šest bodů, za nesprávnou nula bodů a za nevyplněnou odpověď je dva a půl bodu. Bodování se dělá centrálně v kanceláři AMC v Lincolnu v Nebrasce. Maximální počet bodů je tedy 150.

Organizátoři soutěže radí studentům, aby se „vyhnuli náhodnému hádání, protože nesprávné odpovědi jsou penalizovány; ovšem pokud student dokáže využít svých matematických znalostí k vyloučení všech odpovědí kromě jediné, vylepší si tím své skóre“. Ve zmíněné knize je u některých úloh v komentáři ukázka takového „inteligentního hádání“.

V [1] jsou obsaženy úlohy z ročníků 1973–1982, některé si zde uvedeme i s výsledky. Kniha obsahuje i podrobné postupy řešení.

Úlohy v anglickém jazyce

1. Define $n_a!$ for n and a positive to be

$$n_a! = n(n-a)(n-2a)(n-3a)\dots(n-ka),$$

where k is the greatest integer for which $n > ka$. Then the quotient $72_8!/18_2!$ is equal to

(A) 4^5 (B) 4^6 (C) 4^8 (D) 4^9 (E) 4^{12}

2. There are two cards; one is red on both sides and the other is red on one side and blue on the other. The cards have the same probability ($\frac{1}{2}$) of being chosen, and one is chosen and placed on the table. If the upper side of the card on the table is red, then the probability that the under-side is also red is

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$

3. The check for a luncheon of 3 sandwiches, 7 cups of coffee and one piece of pie came to 3.15 USD. The check for a luncheon consisting of 4 sandwiches, 10 cups of coffee and one piece of pie came to 4.20 USD at the same place. The cost of a luncheon consisting of one sandwich, one cup of coffee and one peice of pie at the same place will come to

(A) 1.70 USD (B) 1.65 USD (C) 1.20 USD (D) 1.05 USD (E) 0.95 USD

4. If 554 is the base b representation of the square of the number whose base b representation is 24, then b, when written in base 10, equals

(A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 14 (E) 16

5. In $\triangle ABC$ with right angle at C, altitude CH and median CM trisect the right angle. If the area of $\triangle CHM$ is K, then the area of $\triangle ABC$ is

(A) $6K$ (B) $4\sqrt{3}K$ (C) $3\sqrt{3}K$ (D) $3K$ (E) $4K$

6. The average (arithmetic mean) age of a group consisting of doctors and lawyers is 40. If the doctors average 35 and the lawyers 50 years old, then the ratio of the number of doctors to the number of lawyers is

(A) $3:2$ (B) $3:1$ (C) $2:3$ (D) $2:1$ (E) $1:2$

7. Let $[t]$ denote the greatest integer $\leq t$ where $t \geq 0$ and $S = \{(x,y) : (x-T)^2 + y^2 \leq T^2$ where $T = t - [t]\}$. Then we have

(A) the point $(0,0)$ does not belong to S for any t
(B) $0 \leq$ Area $S \leq \pi$ for all t
(C) S is contained in the first quadrant for all $t \geq 5$
(D) the center of S for any t is on the line $y = x$
(E) none of the other statements is true

Překlad textu úloh

1. Definujme $n_a!$ pro n a a přirozená čísla jako

$$n_a! = n(n-a)(n-2a)(n-3a)\dots(n-ka),$$

kde k je největší přirozené číslo, pro které $n > ka$. Pak je podíl $72_8!/18_2!$ roven

(A) 4^5 (B) 4^6 (C) 4^8 (D) 4^9 (E) 4^{12}

2. Máme dvě karty. Jedna je z obou stran červená a druhá je na jedné straně červená a na druhé straně modrá. Pravděpodobnost výběru karty je pro obě karty stejná a je rovna $\frac{1}{2}$. Jednu kartu vybereme a položíme na stůl. Pokud je vrchní strana karty na stole červená, pak pravděpodobnost, že její druhá strana je také červená, je

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$

3. Účet za oběd, který se skládal ze tří sendvičů, sedmi šálků kávy a jednoho koláče činí 3,15 USD. Účet za oběd skládajícího se ze čtyř sendvičů, deseti šálků kávy a jednoho koláče činí ve stejné restauraci 4,20 USD. Účet za oběd skládajícího se z jednoho sendviče, jednoho šálku kávy a jednoho koláče na stejném místě bude činit

(A) 1,70 USD (B) 1,65 USD (C) 1,20 USD (D) 1,05 USD (E) 0,95 USD

4. Pokud je číslo 554 v soustavě o základu b vyjádřena jako druhá mocnina čísla, jehož vyjádření v soustavě o základu b je 24, pak se b napsané v soustavě o základu 10 rovná číslu

(A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 14 (E) 16

5. V $\triangle ABC$ s pravým úhlem u vrcholu C výška CH a těžnice CM rozdělují pravý úhel na tři stejné úhly. Pokud je obsah $\triangle CHM$ roven K, pak se obsah $\triangle ABC$ rovná

(A) $6K$ (B) $4\sqrt{3}K$ (C) $3\sqrt{3}K$ (D) $3K$ (E) $4K$

6. Průměrný věk (počítáno pomocí aritmetického průměru) skupiny doktorů a právníků je 40 let. Pokud je průměrný věk doktorů 35 let a průměrný věk právníků 50 let, pak je poměr počtu doktorů k počtu právníků roven

(A) $3:2$ (B) $3:1$ (C) $2:3$ (D) $2:1$ (E) $1:2$

7. Nechť $[t]$ znamená největší celé číslo menší nebo rovno t, kde $t \geq 0$, a $S = \{(x,y) : (x-T)^2 + y^2 \leq T^2$, kde $T = t - [t]\}$. Pak platí

(A) bod $(0,0)$ nepatří do S pro žádné t
(B) $0 \leq$ obsah $S \leq \pi$ pro všechna t
(C) S je obsažena v prvním kvadrantu pro všechna $t \geq 5$
(D) střed množiny S pro libovolné t je na přímce $y = x$
(E) žádné z předchozích tvrzení není pravdivé

Výsledky: 1D, 2D, 3D, 4C, 5E, 6D, 7B.

Závěr

Více se o uvedené soutěži dozvíte na webovských stránkách `www.unl.edu/amc/e-exams/e6-amc12/02amc12.html`, o ostatních soutěžích pořádáných AMC na adrese `www.unl.edu/amc`. V seznamu literatury jsou uvedeny odkazy i na knihy, které obsahují úlohy z dalších ročníků soutěže (v závorce jsou příslušné roky). Všechny je možné si objednat na uvedených webovských stránkách.

Literatura

[1] Artino, R. A., Gaglione, A. M., Shell, N., *The Contest Problem Book IV*, The Mathematical Association of America, 1982.
[2] Salkind, Ch. T., *Problem Book I. (1950–1960)*, 1961.
[3] Salkind, Ch. T., *Problem Book II. (1961–1965)*, 1966.
[4] Salkind, Ch. T., Earl, J. M., *Problem Book III. (1966–1972)*, 1973.
[5] Berzsenyi, G., Maurer, S. B., *Problem Book V. (1983–1988)*, (Obsahuje také úlohy z AIME.), 1997.
[6] Schneider, L. J., *Problem Book VI. (1989–1994)*, 2000.

RNDr. Naďa Stehlíková, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky PdF UK
M. D. Rettigové 4, 116 39 Praha 1
email: nada.stehlikova@pedf.cuni.cz