Jiří Mazurek
O pravděpodobnosti třikrát jinak

Učitel matematiky, Vol. 17 (2009), No. 2, 99–103

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150577`

O PRAVDĚPODOBNOSTI TŘIKRÁT JINAK

JIŘÍ MAZUREK

Pravděpodobnost bývá na střední škole často pojata jako suchá věda plná odrazujících vzorců a ne právě jednoduché množinové symboliky. Proto jsem se pokusil vybrat tři méně obvyklé a početně nenáročné úlohy, které by ve studentech mohly vzbudit alespoň špetku zájmu, v lepším případě by mohly vést i k zajímavé diskusi.

První problém se týká předpovídání budoucnosti, druhý stoletých povodní a třetí spolehlivosti raketoplánu.

Příklad I.

Zkusíme vypočítat, jak dlouho ještě bude existovat Chufuova pyramida[4] v Gíze. Pokud si myslíte, že takovou věc vypočítat nelze, jste na omylu! Tvůrcem níže popsané metody je americký fyzik Richard J. Gott III., viz [1].

Gottova myšlenka je následující: předpokládejme, že na naší poloze pozorovatele nějakého děje v čase (například existence pyramidy) není nic výjimečného. To je velmi dobře splněno, protože opravdu ničím výjimeční nejsme (alespoň já si výjimečný nepřipadám).

Znázorněme si dobu trvání pyramid úsečkou, jejíž jeden krajní bod představuje okamžik postavení pyramidy a druhý bod okamžik jejího zániku. Protože na naší poloze pozorovatele v čase není nic výjimečného, můžeme se na dané úsečce nacházet v kterémkoli bodě. Jaká je pravděpodobnost, že se nacházíme mezi jednou desetinou a devíti desetinami doby existence pyramidy? Zřejmě

[4]Ve starší české literatuře je často uváděn nesprávný přepis Cheopsova pyramida.

80% , protože toto období zahrnuje osm částí z desíti. Jsme-li na samém začátku tohoto osmdesátiprocentního intervalu, pak nás ještě čeká devítinásobek doby existence pyramidy (devět dílků je před námi, jen jeden za námi). Nacházíme-li se na samém konci jmenovaného intervalu, čeká nás ještě jedna devítina doby trvání pyramidy.

Proto můžeme učinit následující závěr: S 80% pravděpodobností tu bude Chufuova pyramida ještě přinejmenším jednu devítinu své dosavadní existence, což při jejím stáří zhruba 4 000 let činí 444 let, zato tu nebude déle než devítinásobek dosavadní doby trvání, což je 36 000 let!!

(Pokud bychom chtěli odhadnout dobu trvání pyramidy s 90% pravděpodobností, museli bychom rozdělit časovou osu na 20 dílků, a minimální a maximální dobu trvání vypočítat jako 1/19 a 19 násobek dosavadní doby existence.)

Stejným postupem by vyšla doba trvání České republiky 1,5 roku až 117 let (určitě ne déle, běda!), Evropské unie asi 7 až 540 let, letů do vesmíru 5 až (pouze!) 405 let.

Takže představy ze sci-fi románů, v nichž lidská rasa osídluje vesmír v horizontech tisíců let, se zdají být nereálné! A to z jednoduchého důvodu: nalézali bychom se na samém počátku letů do vesmíru. A to je velmi, ale velmi nepravděpodobné ...

(Studenti mohou oponovat, že daný princip neplatí pro živé tvory, například osmdesátileté dědečky: ti určitě nebudou žít ještě 720 let. V těchto případech Gottova metoda nefunguje, protože doba života organismů je přirozeně omezená. Také můžete věc, která trvá již velmi dlouho, hned zítra vyhodit do povětří. Ale to pak nebudete oním nestranným, nijak výjimečným pozorovatelem ...)

Na tomto místě si můžeme uvést ještě problém týkající se lidského rodu: odhaduje se, že celkem žilo nebo dosud žije asi 80 miliard jedinců druhu homo sapiens. Kolik lidí se asi ještě narodí po nás? Stojíme v řadě všech jedinců Člověka na počátku nebo na konci? Pravděpodobnost říká, že spíš „někde uprostřed“, protože jinak bychom byli výjimeční. A to náš princip, pojmenovaný podle Koperníka, zakazuje. Můžeme proto očekávat, že ještě dalšich zhruba 80 nebo 100 miliard lidí nás bude následovat, ale pravděpodobně ne o mnoho více. Jak dlouho tedy bude trvat lidský rod? Každý rok se na Zemi narodí okolo 100 miliónů lidí, 100 miliard se jich stejným tempem narodí za 1 000 let. Ve skutečnosti se ale toto tempo zrychluje, protože lidí na Zemi neustále přibývá. Tak si od té tisícovky něco málo odečtěte ...

Nezní to právě optimisticky, že ne?

(Lidstvo by mohlo trvat i mnohem déle, ale za cenu, že by se rapidně snížila porodnost a tím i počet lidí na Zemi, a to zase nápadně připomíná scénář nějakého postkatastrofického světa ...)

A úplně na závěr: existují někde ve vesmíru inteligentní civilizace s bilióny myslících jedinců? Asi ne. Kdyby totiž existovaly, s největší pravděpodobností bychom byli právě mezi nimi! A to nejsme ...

Příklad II.

Jak často přichází „stoletá voda"? „Přece jednou za sto let!", chtělo by se zvolat. Ale je tomu opravdu tak? Jak si potom máme vysvětlit stoleté povodně v České republice v letech 1997 a 2002, jdoucí jen pět let po sobě?

Použití pravděpodobnosti vrhne na situaci nové světlo: výraz „stoletá voda" znamená, že povodeň této velikosti se vyskytne v **průměru** jednou za sto let, tedy například během tisíce let desetkrát. Ale nikde není řečeno, že v každém století má být přesně jedna! V některém století jich může být více, v jiném nemusí přijít žádná, a přece bude v průměru připadat jedna na století!

Dá se spočítat pravděpodobnost, že stoletých vod bude během jednoho století více?

Ano, dá!

Pravděpodobnost, že povodeň nastane v konkrétním roce, je 0,01 (1 %). Odtud hned vidíme, že pravděpodobnost, že stoletá voda přijde dva roky po sobě, je malá, ale nenulová, a rovná se $0{,}01^2$, tedy 0,01 %!

Pro jedno století pak dostáváme právě jednu stoletou vodu s pravděpodobností:

$$P = \binom{100}{1} \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99^{99} = 0{,}37 = 37\,\%$$

Právě dvě stoleté vody s pravděpodobností:

$$P = \binom{100}{2} \cdot 0{,}01^2 \cdot 0{,}99^{98} = 0{,}185 = 18{,}5\,\%$$

Právě tři stoleté vody s pravděpodobností:

$$P = \binom{100}{3} \cdot 0{,}01^3 \cdot 0{,}99^{97} = 0{,}061 = 6{,}1\,\%$$

A konečně pravděpodobnost, že stoletá voda nepřijde za celé století, je $P = 0{,}99^{100} = 36{,}6\,\%$.

Nejpravděpodobnější scénář tedy připouští buď jednu nebo žádnou stoletou vodu během jednoho století. Ale stále nám zbývá ještě asi 26 % *pro více povodní*!

Takže až se kolem vašeho domu přeženou krátce po sobě dvě stoleté vody, nebuďte překvapeni. Takové věci se ve Světě Pravděpodobnosti prostě stávají...

Příklad III.

Americký raketoplán jistě patří k nejsložitějším strojům, jaké kdy vytvořily lidské ruce. Skládá se z asi 2 miliónů součástek, a i závada jediné součástky může být fatální, jak se ukázalo při letech Challengeru a Columbie. Aby raketoplán zdárně dokončil svou misi, musí tedy fungovat všechny jeho součástky, a to klade vysoké nároky na jejich spolehlivost (nebudeme teď uvažovat několikanásobné jištění nejdůležitějších systémů).

Vyzvěte studenty, aby se pokusili spolehlivost součástek odhadnout: jestli stačí 98 % spolehlivost nebo 99,9 % a podobně. Některé tipy třeba napište na tabuli. A pak proveďte výpočet nejprve pro spolehlivost 99 %: pravděpodobnost, že všechny součástky budou fungovat (nezávisle na sobě), je $0{,}99^{2\,000\,000} \doteq 0$. Spolehlivost 99 % je příliš nízká, raketoplán bude takřka jistě zničen.

Spolehlivost součástek tedy zvýšíme na 99,9 %, pak dostaneme $0{,}999^{2\,000\,000}$, což je ovšem opět „téměř rovno“ nule.

Takto můžeme pokračovat s přidáváním devítek, až dojdeme k omračující spolehlivosti jedné součástky 99,999 99 %, pro kterou je výsledná spolehlivost celého raketoplánu rovna už rozumnější hodnotě kolem 82 %. Dokážete si ale takovou spolehlivost představit? Já ne...

Literatura

[1] Gott Richard J. III, *Cestování časem v Einsteinově vesmíru*, Argo Praha, 2002

Mgr. Jiří Mazurek
Gymnázium a SOŠ Orlová - Lutyně
Masarykova tř. 1313
735 14 Orlová - Lutyně
e-mail: jiri.mazurek@gym-orlova.cz