Martina Jarošová

Fibonacci a jeho čísla

Učitel matematiky, Vol. 16 (2008), No. 2, 94–100

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150645

FIBONACCI A JEHO ČÍSLA

MARTINA JAROŠOVÁ

Řekla bych, že je velice obtížné dnešní studenty střední školy motivovat k aktivnímu přístupu v matematice. Jednou z možností je představit studentům poutavé souvislosti s jinými obory. Pokusím se proto poukázat na některé zajímavosti týkající se Fibonacciho a jeho čísel. V tomto článku se zabývám vztahem mezi Fibonacciho čísly a Pascalovým trojúhelníkem a méně známou aplikací, na níž lze demonstrovat vzájemnou souvislost mezi matematikou a biologií. Nejprve bych ráda uvedla několik slov o samotném Fibonaccim.

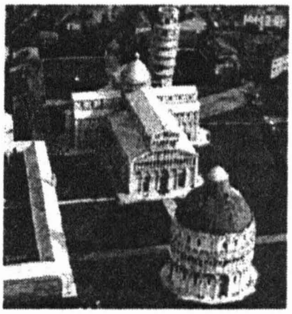
FIBONACCI – LEONARDO PISÁNSKÝ

Leonarda Pisánského můžeme považovat za nejvýznamnějšího matematika středověké Evropy. Je znám spíše pod svojí přezdívkou Fibonacci.

Přesné časové vymezení jeho života neznáme. Narodil se v Pise kolem roku 1170 a zemřel zřejmě roku 1250. Jeho otec Guiliemo Bonacci byl městským úředníkem, písařem a notářem. Pracoval v Bougii, jedné z obchodních kolonií Pisy v severní Africe, která dnes leží v Alžíru. Tam Leonardo studoval matematiku a své znalosti si později rozšiřoval při cestách za obchodem ve Středomoří a v Orientu. Seznámil a inspiroval se mnoha matematickými pracemi, se kterými se během svých cest setkal. Kolem roku 1200 se Fibonacci vrátil do Pisy a sepsal zde několik významných matematických spisů. Fibonacci žil v době před objevením knihtisku, kdy jedinou možností šíření knih bylo jejich přepisování, všechny jeho spisy se tedy bohužel nedochovaly. Z jeho spisů bych uvedla jen nejznámější a to *Liber abaci* (Kniha o abaku) z roku 1202.

Obrázek 1 Fibonacci

Obrázek 2 Pisa



Obrázek 3 Pisa

Velmi známá je posloupnost Fibonacciho čísel $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, která začíná hodnotami $F_0 = 1$ a $F_1 = 1$ a splňuje následující rekurentní formuli

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad \text{pro všechna } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Několik prvních členů Fibonacciho posloupnosti:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \ldots$$

Tato čísla se poprvé objevila ve druhém vydání knihy *Liber abaci* z roku 1228, a proto nesou jeho jméno.

Studenti se s touto rekurentní formulí setkávají na střední škole při studiu posloupností. V mnohých středoškolských učebnicích je uvedena i známá úloha o králících, proto se jí nyní nebudeme zabývat, ale ukážeme si jiné zajímavé skutečnosti.

Fibonacciho čísla a Pascalův trojúhelník

Určitě všichni známe Pascalův trojúhelník, což je trojúhelníkové schéma sestavené z kombinačních čísel $\binom{n}{k}$. Ukážeme si, kde se v tomto schématu „skrývají" Fibonacciho čísla. Za tímto účelem přetransformujeme Pascalův trojúhelník do „pravoúhlého tvaru":

$$\begin{array}{lllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

Nyní určíme součet s_n všech kombinačních čísel, která „leží" na přímce procházející kombinačním číslem $\binom{n}{0}$ a svírají s řádky tohoto trojúhelníku úhel 45°. Pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ tak dostáváme:

$$s_0 = \binom{0}{0} = 1 = F_0, \quad s_1 = \binom{1}{0} = 1 = F_1,$$

$$s_2 = \binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 2 = F_2, \quad s_3 = \binom{3}{0} + \binom{2}{1} = 3 = F_3,$$

$$s_4 = \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 5 = F_4, \quad s_5 = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 8 = F_5.$$

Na základě těchto několika součtů můžeme vyslovit doměnku, že posloupnost

$$s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots$$

je rovna posloupnosti

$$F_0, F_1, F_2, F_3, \ldots,$$

tj. že pro všechna celá nezáporná čísla n je $s_n = F_n$. K důkazu této doměnky (vzhledem k tomu, že obě posloupnosti se shodují ve svých prvních dvou členech) stačí ukázat, že pro posloupnost $s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots$ platí rekurentní vztah $s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$. Uvědomme si nejprve, že pro n sudé je

$$s_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}$$

a pro liché n

$$s_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{\frac{n-1}{2}+1}{\frac{n-1}{2}}.$$

Pro n sudé je tedy

$$s_{n-1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{\frac{n-2}{2}+1}{\frac{n-2}{2}}.$$

Tento výraz jsme dostali dosazením $n-1$ za n do výrazu s_n pro liché n; je-li totiž n sudé, je $n-1$ liché. Podobně dostaneme, že pro liché n je

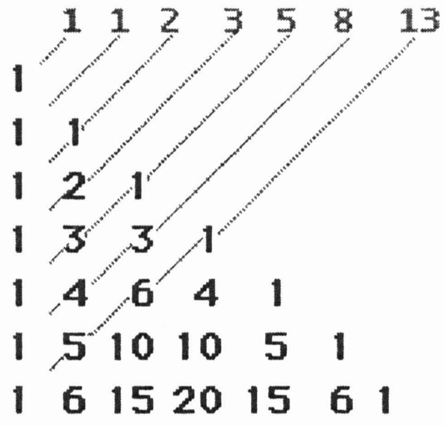
$$s_{n-1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}}.$$

Určíme nyní součet $s_n + s_{n-1}$, a to opět v závislosti na tom, je-li n sudé nebo liché. Pro sudé n tak máme (s užitím známých vztahů $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ a vzhledem k tomu, že součet s_n má $\frac{n}{2}+1$ sčítanců a s_{n-1} jich má $\frac{n-2}{2}+1 = \frac{n}{2}$)

$$\begin{aligned}
s_n + s_{n-1} &= \binom{n}{0} + \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right] + \\
+ \left[\binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{2}\right] &+ \cdots + \left[\binom{\frac{n-2}{2}+1}{\frac{n-2}{2}} + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}\right] = \\
&= \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}}.
\end{aligned}$$

Snadno lze nyní vidět, že výraz, který nám vyšel, je roven součtu s_{n+1} pro sudé n. Přesvědčíme se o tom třeba tak, že ve vztahu pro s_n, kde n je liché, za n dosadíme $n+1$.

Je-li naopak n liché, mají oba součty s_n a s_{n-1} stejný počet sčí-



Obrázek 4 Fibonacciho čísla a Pascalův trojúhelník

tanců, takže dostaneme:

$$\begin{aligned}
s_n + s_{n-1} &= \binom{n}{0} + \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right] + \\
&+ \left[\binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{2}\right] + \dots + \\
&+ \left[\binom{\frac{n-1}{2}+1}{\frac{n-1}{2}-1} + \binom{\frac{n-1}{2}+1}{\frac{n-1}{2}}\right] + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} = \\
&= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{\frac{n-1}{2}+2}{\frac{n-1}{2}} + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} = \\
&= \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{\frac{n-1}{2}+2}{\frac{n-1}{2}} + \binom{\frac{n-1}{2}+1}{\frac{n-1}{2}+1}.
\end{aligned}$$

Je zřejmé, že poslední součet je vskutku roven s_{n+1} pro liché n. Stačí do součtu s_n pro sudé n za n dosadit $n+1$.

Tím je dokázáno, že pro všechna celá nezáporná čísla n je $s_n = F_n$. Výsledek můžeme zformulovat takto: *Vedeme-li v Pascalově trojúhelníku zapsaném v pravoúhlém tvaru kombinačním číslem* $\binom{n}{0}$, *kde n je libovolné celé nezáporné číslo, přímku svírající s jeho řádky úhel* $45°$, *pak součet s_n všech kombinačních čísel, která na této přímce leží, je roven Fibonacciho číslu F_n.*

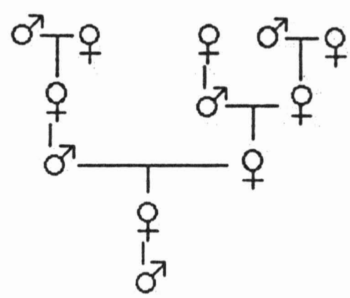
Zajímavosti z přírody – rodokmen včely medonosné

Ukažme si nyní souvislost Fibonacciho čísel s rodokmenem včely medonosné.

Nejprve připomenu některá známá fakta. V kolonii včely medonosné existuje jedna zvláštní samice – nazýváme ji královna. Dále je zde mnoho včel – dělnic, což jsou samice, které neprodukují vajíčka. A také je zde několik včel – samců, ty nazýváme trubci.

Samci jsou vyprodukováni královnou z neoplozených vajíček. Trubci mají jen matku, žádného otce. Samice (dělnice) jsou vyprodukovány královnou z oplozených vajíček. Tedy samice (dělnice) mají oba rodiče.

Podívejme se nyní na rodokmen samce včely medonosné – trubce.



Obrázek 5 Rodokmen včely medonosné – trubce

- Trubec má 1 rodiče a to matku (samici).

- Trubec má 2 prarodiče, samici a samce.

- Trubec má 3 praprarodiče, jeho „babička“ měla dva rodiče a „dědeček“ jednoho.

Nalézáme Fibonacciho posloupnost.

Počet	Rodiče	Prarodiče	Praprarodiče	Prapraprarodiče ...
Trubci (samci)	1	2	3	5 ...
Dělnice (samice)	2	3	5	8 ...

Biologických i jiných aplikací existuje celá řada, nicméně zde již k dalším bohužel není prostor. Tedy snad někdy příště.

Literatura

[1] Hoggatt, V. E. Jr.: *Fibonacci and Lucas Numbers*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1969.

[2] Knott, R.: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html, 2004.

[3] Calda, E.: *Fibonacciova čísla a Pascalův trojúhelník*, Rozhledy mat.-fyz. 71 (1993/94), 15–19.

[4] Bečvář, J.: *Leonardo Pisanský - Fibonacci*, Dějiny matematiky, svazek 19, 2001, 264–339.

[5] Svršek, J., Bartoš, R.: http://natura.baf.cz/natura/2002/2/20020207.html, 2002.

Mgr. Martina Jarošová
Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta MU
Janáčkovo nám. 2a, 602 00, Brno
e-mail: mjarosov@math.muni.cz