Dušan Jedinák

S túžbou po harmónii

Učitel matematiky, Vol. 16 (2008), No. 2, 115–121

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150648

S TÚŽBOU PO HARMÓNII

DUŠAN JEDINÁK

K pojmu harmónia

Harmónia znamená (z gréckeho *harma*) spojenie pevného s pohyblivým, súlad, súzvuk, súhra, zladenie, vyrovnanosť, súmernosť časti a celku, proporcionalita. Znamená to aj rovnaké číselné pomery (napríklad spájanie, význam i použitie akordov v hudobnej skladbe), výraz zákonitosti a miery vo svete, protiklad chaosu (organizovanosť), bezkonfliktná jednota doplňujúcich sa protikladov.

Z gréckych dejín

Pytagorovci, filozofické spoločenstvo a bratstvo nasledovníkov *Pytagora* (asi 582-497 pred n. l.), sa okrem iného zaoberali aj preniknutím do tajomstva čísiel a otázok harmónie. Možno ako prví v histórii začali chápať prirodzené čísla ako abstraktné entity, ktoré samé o sebe charakterizujú príčinný svet javov. Objavili harmonické postupnosti v témach hudobnej stupnice (oktáva: pomer 1 : 2 pri dĺžkach strún, kvinta 2 : 3, kvarta 3 : 4). Vytvorili možnú charakteristiku všetkých vecí a javov v povahe pomerov čísiel, to dnes znamená, že základné sily vesmíru možno vyjadriť jazykom matematiky. Už *Archytas z Tarentu* (asi 428-365 pred n. l.) uvádzal niekoľko typov stredných veličín – priemerov a medzi nimi aj aritmetický, geometrický a harmonický priemer. Ak bola daná trojica kladných čísiel $a > b > c$, tak **harmonický priemer** bol daný ako $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$; z toho vyplýva, že $b = \frac{2 \cdot a \cdot c}{a+c}$ (aj dnes **harmonický priemer** čísiel a, c; zadefinovaný tiež aj ako prevrátená hodnota aritmetického priemeru prevrátených hodnôt a, c, teda $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}} = \frac{2 \cdot a \cdot c}{a+c}$). *Aristoteles* (384-322 pred n. l.) vo svojej *Metafyzike* uviedol, že pytagorovci si to predstavovali takto: „celé nebo je harmónia a číslo“.

V dnešnej súčasnosti

Naozaj by ma zaujímalo s akou úspešnosťou vyriešia naši žiaci úlohu: Aká je priemerná rýchlosť vozidla, ktoré prejde trať rýchlosťou 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a vracia sa po rovnakej trase rýchlosťou 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ a či vedia, že tam sa uplatnil **harmonický priemer**. Možno by sa nemalo vyskytovať v našich základných a stredných školách to, aby sa študenti nestretli s pojmom **harmónia**, ale ani to, aby nepoznali, čo nazývame **harmonický priemer** (**harmonický stred**). Rád im pripomínam, že *harmonický rad* je nekonečný rad, v ktorom každý jeho člen (okrem prvého) je **harmonickým** priemerom oboch svojich susedných členov, napr. rad, ktorého n-tý člen $a_n = \frac{1}{n}$, t.j. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$; tento rad je divergentný, jeho súčet je $+\infty$ (skúste to dokázať). Ponúkam dve úlohy, ktoré približujú a znázorňujú **harmonický priemer** dvoch veličín. Profesor *Petr Vopěnka* vo svojom pojednaní *Rozpravy s geometrií* (Praha: Panorama, 1989) sa vyjadril takto: *V geometrickom svete sa krása stretla s pravdou .... Je možné, že do geometrického sveta neprišla krása za pravdou, ale pravda za krásou .... Kde bude videná pravda, tam bude hľadaná aj krása a naopak.*

Uvidieť harmonický priemer

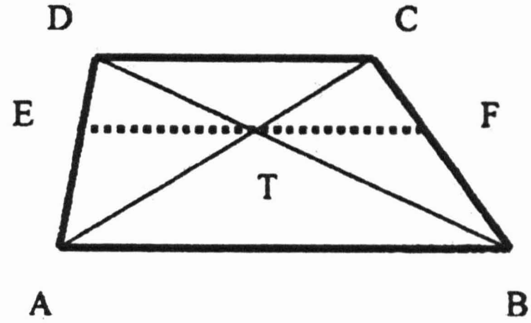
Úloha: Ukážte, že veľkosť priečky lichobežníka, ktorá prechádza priesečníkom jeho uhlopriečok a je rovnobežná so základňami, je **harmonickým** priemerom veľkostí oboch jeho základní.

Riešenie:

Označme patričné body ako na obr. 1., kde $|AB| = a$, $|CD| = c$.

Trojuholníky ABT a CDT sú podobné (podľa vety uu, rovnobežky preťaté priečkou – striedavé uhly). Potom platí $|AT| : |TC| = a : c$, t.j. $|TC| = \frac{c}{a} \cdot |AT|$. Trojuholníky TFC a ABC sú tiež podobné (podľa vety uu) s koeficientom podobnosti

$$\frac{|TC|}{|AC|} = \frac{|TF|}{|AB|}.$$



Obr. 1

Teda môžeme vyjadriť $|TF| = \dfrac{|TC|}{|AC|} \cdot |AB|$, t.j.:

$$|TF| = \frac{c}{a} \cdot \frac{|AT| \cdot |AB|}{|AT| + |TC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + \frac{c}{a} \cdot |AT|} = \frac{c}{1 + \frac{c}{a}} = \frac{a \cdot c}{a + c}.$$

Podobne pre trojuholníky TEA a CDA s koeficientom podobnosti $\dfrac{|AT|}{|AC|} = \dfrac{|ET|}{|DC|}$ platí

$$|ET| = \frac{c \cdot |AT|}{|AC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + |TC|} = \frac{c \cdot |AT|}{|AT| + \frac{c}{a} \cdot |AT|} = \frac{c}{1 + \frac{c}{a}} = \frac{a \cdot c}{a + c}.$$

Potom platí $|EF| = |ET| + |TF| = 2 \cdot \dfrac{a \cdot c}{a + c} = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}$ a to je **harmonický priemer** a, c.

Geometrické znázornenie známych priemerov

Úloha: Znázornite a odôvodnite vzťah medzi aritmetickým, geometrickým a **harmonickým** priemerom dvoch kladných reálnych čísiel:

$$\frac{2 \cdot a \cdot b}{a + b} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a + b}{2}$$

Riešenie:
Vieme, že:

$$\overline{x_a} = \frac{a+b}{2}, \quad \overline{x_g} = \sqrt{ab}, \quad \overline{x_h} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Ľahko ukážeme, že $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ platí:

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 &\geq 0 \\
a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \qquad \qquad | + 4ab \\
a^2 + 2ab + b^2 &\geq 4ab \\
(a+b)^2 &\geq 4ab \qquad \qquad |\sqrt{\ } \\
a + b &\geq 2\sqrt{ab} \\
\frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab}
\end{aligned}$$

teda $\overline{x_g} \leq \overline{x_a}$.

Podobne: Pre $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ platí:

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 &\geq 0 \\
a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \qquad \qquad |ab \\
a^3b - 2a^2b^2 + ab^3 &\geq 0 \qquad \qquad | + 4a^2b^2 \\
a^3b + 2a^2b^2 + ab^3 &\geq 4a^2b^2 \\
ab \cdot \left(a^2 + 2ab + b^2\right) &\geq 4a^2b^2 \qquad \qquad |\sqrt{\ } \\
\sqrt{ab} \cdot (a+b) &\geq 2ab \\
\sqrt{a+b} &\geq \frac{2ab}{a+b}
\end{aligned}$$

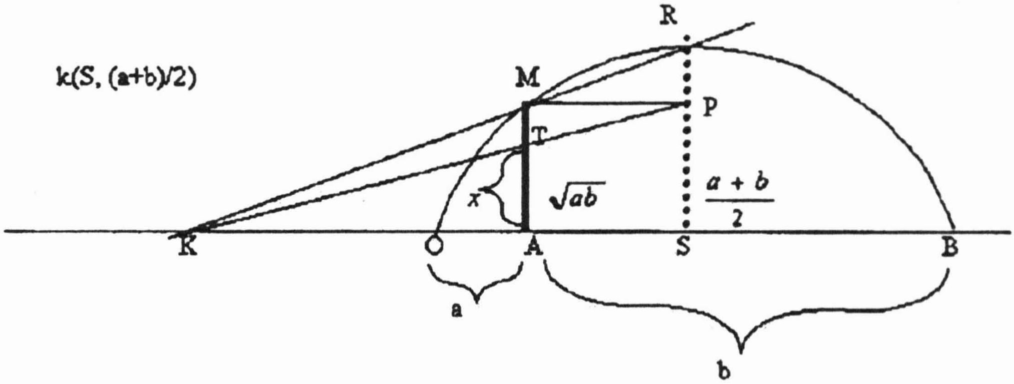
teda $\overline{x_h} \leq \overline{x_s}$.

Tieto vzťahy môžeme aj znázorniť:

Aritmetický priemer $\overline{x_a}(a, b)$ je polovicou súčtu $a+b$, t.j. $\frac{a+b}{2}$, graficky polovicou úsečky zloženej z dvoch úsečiek dĺžky a, b.

Geometrický priemer $\overline{x_g}(a, b)$ je druhou odmocninou súčinu veľkostí a, b, teda $\sqrt{a \cdot b}$, tam využijeme predstavu z Euklidovej vety o výške.

Pre **harmonický priemer** získame predstavu úsečky dĺžky $\frac{2 \cdot a \cdot b}{a + b}$ využitím rovnoľahlosti v dolu uvedenom obrázku (tam platí $|PS| = \sqrt{ab} = |MA|; K = \overleftrightarrow{PR} \cap \overleftrightarrow{AB}, T = \overleftrightarrow{PK} \cap \overleftrightarrow{MA}$):



Obr. 2

Z podobnosti (rovnoľahlosti) trojuholníkov KAT a KSP, trojuholníkov KAM a KSR platí:

$$\frac{|TA|}{|SP|} = \frac{|MA|}{|SR|}$$

po úprave tohto výrazu dostaneme

$$\frac{x}{\sqrt{a \cdot b}} = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{\frac{a+b}{2}}$$

$$x = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a + b}.$$

Aj geometricky sme znázornili, že pre každé dve kladné reálne čísla a, b platí:

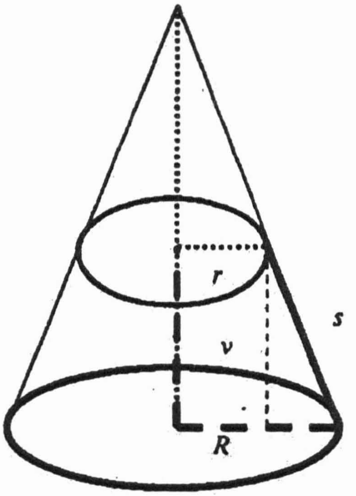
$$\frac{2 \cdot a \cdot b}{a + b} \leq \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a + b}{2}$$

a to znamená, že

$$\overline{x_h} \leq \overline{x_g} \leq \overline{x_a}.$$

Aj tam je harmonický priemer

Úloha: Vypočítajte veľkosť výšky zrezaného rotačného kužeľa, ak veľkosť obsahu jeho plášťa je súčtom veľkostí obsahov jeho podstáv (s polomermi R a r).



Riešenie: Vieme, že veľkosť obsahu plášťa zrezaného rotačného kužeľa je daný vzťahom

$$S_1 = \pi \cdot (R + r) \cdot s, \text{ kde } s = \sqrt{v^2 + (R - r)^2}.$$

Súčet veľkostí podstáv je $S_2 = \pi \cdot$ $\cdot \left(R^2 + r^2\right)$. Potom podľa zadania úlohy platí $S_1 = S_2$ a teda aj

$$(R + r) \cdot \sqrt{v^2 + (R - r)^2} = R^2 + r^2 \qquad |^2$$

$$(R + r)^2 \cdot \left[v^2 + (R - r)^2\right] = \left(R^2 + r^2\right)^2$$

$$v^2 = \frac{\left(R^2 + r^2\right)^2}{(R + r)^2} - (R - r)^2$$

$$v^2 = \frac{\left(R^2 + r^2\right)^2 - (R - r)^2 \cdot (R + r)^2}{(R + r)^2}$$

$$v^2 = \frac{\left(R^2 + r^2\right)^2 - \left(R^2 - r^2\right)^2}{(R + r)^2}$$

$$v^2 = \frac{\left(R^2 + r^2 + R^2 - r^2\right) \cdot \left(R^2 + r^2 - R^2 + r^2\right)}{(R + r)^2}$$

$$v^2 = \frac{2 \cdot R^2 \cdot 2 \cdot r^2}{(R+r)^2}$$

$$v = \frac{2 \cdot R \cdot r}{R+r}$$

a to znamená, že výška takto požadovaného zrezaného rotačného kužeľa je **harmonickým** priemerom veľkostí polomerov príslušných podstáv.

Myšlienka na záver

Na svete neexistuje taká veda, ktorá dáva do pohybu toľko harmónie ako matematika. Vtipným mužom, ktorý predvídal úžasnú praktickú použiteľnosť mnohých matematických disciplín, bol *James J. Sylvester (1814-1897)*, anglický matematik, stelesnená predstava toho, kto žije medzi ideálnymi číslami, vysoko nad problémami všedného dňa. *Svet nápadov, ktorý matematika obsahuje, je oslavou božskej krásy. Spôsob, akým matematika spája všetky svoje časti, je nekonečný poriadok a absolútny dôkaz pravdy, ktorou sa zaoberá.*

PaedDr. Dušan Jedinák
Katedra matematiky a informatiky
Pedagogická fakulta Trnavské univerzity
Priemyselná 4, 918 43 Trnava
e-mail: djedinak@truni.sk