A. Jančařík

Početní algoritmy I - poziční soustavy

Učitel matematiky, Vol. 15 (2007), No. 1, 9–18

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150668

POČETNÍ ALGORITMY I – POZIČNÍ SOUSTAVY

Antonín Jančařík[1]

Úvod

Převážná většina výpočtů, se kterými se v praktickém životě setkáváme, se provádí v desítkové poziční soustavě. Počítání do desíti nás provází již od dětství. Dítě počítá na prstech: „Jedna, dvě, tři, ... deset“. Ve škole se pak učí děti počítat nejprve do deseti, pak do dvaceti, a to nejprve bez přechodu přes desítku a následně s přechodem přes desítku.

Jedním z důvodů, proč desítka hraje tak velkou roli, jsou pravděpodobně naše ruce – máme přece deset prstů. Kdyby těch prstů bylo více nebo méně, možná by se i naše počítání ubíralo trochu jiným směrem.

I tak není desítková soustava jedinou používanou – sekund do minuty je 60, stejně tak i minut do hodiny. Hodin do dne je 24, což jsou dva tucty, a na tucty se ještě nedávno počítalo na trhu. A dnů v týdnu máme 7.

Dokonce ani v historii matematiky nebyla desítková soustava jediná. Babylonská číselná soustava používala základ desítko-šedesátkový, Mayové používali soustavu pětko-dvacítkovou, Keltové dvacítkovou (podle [1], str. 100–102), což se dodnes odráží ve francouzských názvech číslovek.

Můžeme ale vyslovit hypotézu, že kdyby člověk měl jiný počet prstů, vypadala by dnes celá matematika jinak. Dokonce by pro nás i některé výpočty byly paradoxně jednodušší, neboť desítka má poměrně málo dělitelů, což se nepříznivě projevuje jak na podmínkách dělitelnosti, tak na zápisu zlomků v poziční soustavě.

V dalším textu se pokusíme ukázat, jaké výhody a nevýhody může počítání v jiných číselných soustavách přinášet. Veškeré příklady, po vzoru vyprávění profesora Hejného o Bilandu a Trilandu

[1] Tento příspěvek byl napsán s podporou grantu GAČR 406/05/P561.

([2], str. 53–62), uvedeme příběhem. Cílem následujících úloh je demonstrovat průběh výpočtu v jiné než desítkové soustavě. Záměrně nechceme, aby příklady byly řešeny převodem do desítkové soustavy, následujícím výpočtem a převodem zpět. Hlavním důvodem, proč mají být jiné číselné soustavy začleňovány do výuky, je objevit nezávislost algoritmů pro výpočty na zvolené číselné soustavě.

Všechny úlohy jsou formulované tak, že hlavním představitelem je učitel. Důvodem takovéto stylizace je, že byly vytvářeny na cvičení pro budoucí učitele matematiky. Stejně tak je však lze přeformulovat pro žáky, kdy budou vystupovat v roli učitele nebo jeho pomocníka.

Marťané

O Marťanech je všeobecně známo několik faktů. Například:
Obývají planetu Mars a cestují létajícími talíři.
Jsou malí, zelení a mají tykadla.
O maskování jejich činnosti se stará organizace zvaná MIB (Muži v černém).

Méně známým faktem (pravděpodobně i díky činnosti MIB) je, že Marťané mají na rukou pouze tři prsty. Díky této zvláštnosti se na Marsu nepoužívá desítková nýbrž šestková soustava. Nyní však již k samotnému příběhu. Díky vašim mimořádným schopnostem učitele matematiky jste byl mezigalaktickou komisí vybrán do výměnného programu učitelů a v následujících měsících budete učit na Marsu. Nejprve tři dobré zprávy. Po dobu pobytu vám bude poskytnut slušivý zelený obleček s tykadélky, na Marsu můžete používat stejné číslovky jako na Zemi a nemusíte se učit marťansky, protože vám bude poskytnut automatický tlumočník. A teď jedna špatná zpráva. Tlumočník má jednu drobnou vadu, pokud použijete některou z číslic $6, 7, 8, 9$, *ozvou se z něj velmi, ale opravdu velmi odpudivé zvuky.*

1. Hodina – Základní číslovky

V rámci první hodiny je nutné seznámit žáky se základy počítání. Nejprve tedy přirozená čísla (pozor na tlumočníka): $1, 2, 3, 4,$

$5, 10, 11, 12 \ldots$. Pokud jste zvládli přirozená čísla, můžeme přejít k základním zlomkům:

$$\frac{1}{2} = 0{,}3 \qquad \frac{1}{3} = 0{,}2 \qquad \frac{1}{4} = 0{,}13 \qquad \frac{1}{5} = 0{,}\overline{1} \qquad \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Povšimněte si poslední rovnosti, kterou znáte již ze Země. Tato rovnost platí ve všech číselných soustavách bez ohledu na zvolený základ. Druhou zvláštností je, že marťanské zlomky mají v mnohem menší míře než zlomky pozemské nekonečný desetinný rozvoj. V tomto ohledu je marťanské počítání výhodnější.

2. Hodina – Sčítání

Druhou hodinu zahájíme několika jednoduchými příklady na sčítání jednociferných čísel s přechodem přes 10:

$$1+1=2 \qquad 2+2=4 \qquad 3+3=10 \qquad 4+4=12 \qquad 5+5=14$$

Po tomto úvodu můžeme přejít ke sčítání větších čísel. Většina z nás při sčítání velkých čísel používá algoritmický přístup: postupuji odzadu, sčítám odpovídající dvojici čísel; pokud je výsledek menší než 10, napíši jej, pokud je větší než 10, odečtu deset; výsledek napíši a jedničku přičtu k další dvojici. Tento postup si ukážeme na příkladu:

Úloha: Sečtěte $154 + 235$.

Řešení: Součet 5 a 4 je 13, píši 3 a 1 si pamatuji; 5 a 1 je 10 a 3 je 13, píši 3 a 1 si pamatuji; 1 a 1 jsou 2 a 2 jsou 4, píši 4. Tedy $154 + 235 = 433$.

Zkuste si spočítat (s hlasitým přednesem) několik dalších úloh (např. $254 + 425$, $311 + 245$).

Poznámka: Tyto úlohy (včetně hlasitého přednesu) používáme na cvičení se studenty a obvykle vzbudí velký ohlas. Studentům trvá poměrně dlouho, než se zorientují, co se to vlastně děje. Bohužel však mají velké potíže tento komentář sami vytvořit, a to přesto, že jsou úlohy schopni správně spočítat. Při výpočtu si totiž většina z nich v duchu stále převádí čísla do desítkové soustavy a opět zpět, což je při komentáři ruší (nebo naopak, v čemž je komentář ruší).

3. Hodina – Odčítání

Nyní přecházíme ke složitějšímu postupu, algoritmu pro odčítání. Jak jsme již viděli na předchozí hodině, můžeme bez obav použít standardní algoritmus, který již známe ze Země. Opět si jej budeme demonstrovat na příkladu:

Úloha: Vypočtěte $2\,432 - 1\,445$.

Řešení: Počítáme přesně tak, jak jsme zvyklí. Tedy 5 a kolik je 12, 5 a 3 je 12, píši 3 a 1 si pamatuji; 3 bez jedné je 2; 4 a kolik je 12; 4 a 4 je 12. Píši 4 a 1 si pamatuji; 4 bez 1 je 3; 4 a kolik je 13; 4 a 5 je 13. Píši 5 a 1 si pamatuji; 2 bez 1 je 1; 1 bez 1 je 0. Tedy $2\,432 - 1\,445 = 543$.

Můžete provést zkoušku součtem.

Doporučujeme opět spočítat několik vlastních úloh.

4. Hodina – Násobení a dělení

U násobení je dobré začít několika jednoduchými úlohami:

$$3*3=13 \qquad 5*2=14 \qquad 5*5=41 \qquad 3*5=23 \qquad 4*4=24$$

$$14/2=5 \qquad 23/5=3 \qquad 20/4=3 \qquad 12/4=2 \qquad 10/3=2$$

Opět bychom mohli s úspěchem použít algoritmus pro písemné násobení a dělení. Na této hodině však upřeme pozornost trochu jinam, a to na triky, které usnadňují a urychlují násobení. Prvním trikem je $(10-1)*n = 10*n - n$. Tedy $5*5 = (10-1)*5 = 50-5 = 41$. Obdobně $123*5 = 1\,230 - 123 = 1\,103$.

Ze Země známe další trik. Při násobení pěti je rychlejší násobit deseti a dělit dvěma.

$$3*222 = 1\,110 \qquad 3*21 = 103$$

Posledním trikem, který budeme transponovat ze Země, je umocňování čísel končících na číslici 5.

$123*123 = 100*12*13+13 = 100*(13*13-13)+13 = 100*((100*2+13)-13)+13 = 20\,013$

5. Hodina – Prvočísla a další zvláštnosti

Poslední hodinu, dříve než přistoupíme k dělitelnosti a prvočíslům, věnujeme teorii čísel. Poznamenejme jeden velmi pozoruhodný fakt; na Marsu je číslo 10 nejenom číslo trojúhelníkové (rovná se součtu prvních n čísel), ale dokonce i číslo dokonalé (rovná se součtu dělitelů menších než číslo samotné). Ale nyní již k prvočíslům.

Řada prvočísel je poměrně jednoduchá: $2, 3, 5, 11, 15, 21, 25, 31, 35, \ldots$

Úloha: Dokažte, že každé prvočíslo větší než 10 má jako poslední číslici buď číslici 1, nebo číslici 5.
Řešení: Sudá čísla mají na konci sudou číslici. Čísla dělitelná třemi mají na konci buď 0, nebo 3 (tady již máme první znaky dělitelnosti). Na prvočísla tak zbývají číslice buď 1, nebo 5. Všimněte si, že tento důkaz je mnohem jednodušší než pozemský důkaz, že prvočísla lze nalézt ve tvaru $6k + 1$ nebo $6k - 1$.

Úloha: Nalezněte postačující podmínku, aby číslo bylo dělitelné čísly 5 a 11.
Řešení: Zde použijeme podmínku, kterou již známe ze Země pro číslo 9 (té na Marsu odpovídá číslo 5) a 11: Číslo je dělitelné číslem 5 (resp. 11), pokud je číslem 5 (resp. 11) dělitelný ciferný součet dělaný po dvojicích.

Ukázka: $4\,512 \rightarrow 45 + 12 \rightarrow 101 \rightarrow 2$ číslo 4 512 není dělitelné ani 5, ani 11.

$3\,212 \rightarrow 44$ číslo 3 212 je dělitelné 11, ale není dělitelné 5.

Pro dělitelnost číslem 11 můžeme také použít rozdíl ciferného součtu sudých a lichých číslic a pro dělitelnost pěti jednoduchý ciferný součet.

Domácí úkol 1: Zkuste nalézt kritérium dělitelnosti pro číslo 15.

Obři z Gátu

Nyní se dostáváme k druhému příběhu. Shodou okolností jste se po svém návratu z Marsu propadli do historie a dostali jste se do dob krále Davida, do knížecího města filištínských Gátu.

V tomto městě žijí známí obři. Nejznámější z nich je díky Bibli Goliáš, který se dostal i do vánočního chorálu Narodil se Kristus Pán. Abyste se uživil, přijal jste místo domácího učitele matematiky v jedné z obřích rodin. Brzy po svém nástupu jste však zjistil velmi nepříjemnou věc. Obři mají kromě nadlidské velikosti i jinou tělesnou zvláštnost: na každé ruce i noze mají 6 prstů (srovnej s II. Sam 21.20). A protože jsou obři velcí patrioti a jsou na své tělo náležitě hrdí, všichni používají poziční soustavu o základu 12. *Kromě normálních číslic mají tedy ještě dvě další, které budeme pro zjednodušení zapisovat A a B* (viz [3]). *Ještě jedno varování, obři opravdu, ale opravdu, nesnášejí, pokud se někdo snaží učit jejich děti počítat v desítkové soustavě! (A dostat pohlavek od rozzuřeného obra není vůbec příjemné.)*

1. Hodina – Základní číslovky

Nejprve si tedy zopakujeme, jak obři počítají:
$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1A, 1B, 20, \dots$

A nyní se můžeme podívat na základní zlomky.

$$\frac{1}{2} = 0{,}6 \qquad \frac{1}{3} = 0{,}4 \qquad \frac{1}{4} = 0{,}3 \qquad \frac{1}{5} = 0{,}\overline{2497} \qquad \frac{1}{6} = 0{,}2$$

$$\frac{1}{8} = 0{,}16 \qquad \frac{1}{7} = 0{,}\overline{186A35} \qquad \frac{1}{9} = 0{,}14 \qquad \frac{1}{A} = 0{,}1\overline{2497}$$

$$\frac{1}{B} = 0{,}\overline{1} \qquad \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Povšimněte si vztahů mezi $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{8}$.

2. Hodina – Sčítání

Poté, co jsme se seznámili se základními číslovkami, můžeme, stejně jako na Marsu, přistoupit ke sčítání. Na rozdíl od Marsu, kde se nám některých číslic nedostávalo, v Gátu nám budou některé číslice přebývat.

$$3+3 = 6 \qquad 7+7 = 12 \qquad 8+3 = B \qquad B+B = 1A \qquad 5+7 = 10$$

V rámci sčítání můžeme zkusit sčítat i některé zlomky:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6} \qquad \frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{15}{50}$$

Pozor na poslední zlomek, tento zlomek je již v základním tvaru a nelze jej krátit, neboť jak uvidíme dále, číslo 15 je prvočíslo a nedělí 50, proto je s číslem 50 nesoudělné. Zkuste rozhodnout, které zlomky se sčítají jako na Zemi a u kterých je nutné dávat pozor na obří zvláštnosti.

Domácí úkol 2: Sečtěte $158\frac{1}{2}+274\frac{2}{3}$.

3. Hodina – Odčítání

Již na Marsu jsme zjistili, že pro písemné odčítání můžeme používat klasický pozemský algoritmus, musíme však vždy přihlížet k některým zvláštnostem soustavy, ve které počítáme. Proto například:

$$10-5=7 \qquad B-A=1 \qquad 18-B=9 \qquad BB-AA=11$$

Obdobně probíhá odčítání desetinných čísel, trochu složitější je odčítání zlomků:

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{1}=\frac{10}{50}-\frac{5}{50}=\frac{7}{50} \qquad \frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{B}{92}-\frac{A}{92}=\frac{1}{92}=\frac{1}{(A*B)}$$

Všimněte si posledního výsledku. Můžeme si uvědomit, že vztah $1/n-1/(n+1)=1/(n*(n+1))$ (a mnoho obdobných rovností) platí naprosto obecně, bez ohledu na použitou číselnou soustavu.

4. Hodina – Násobení a dělení

Násobení a dělení opět nepřináší nic nového, používáme stále stejný algoritmus. Jediné, s čím se musíme vyrovnat, je, že některé násobky vypadají poněkud podivně. Například násobky tří jsou $3, 6, 9, 10, 13, 16, 19, 20, \ldots$, nebo násobky šesti jsou $6, 10, 16, 20, 26, \ldots$ Trochu potíží obvykle dělají násobky čísel A a B. Při násobení číslem B, ale můžeme s úspěchem použít vztah $B=10-1$. Proto například $A*B=A0-A=A0-(10-2)=A0-10+2=92$.

Násobení číslem A je složitější, můžeme ale použít buď $A = 10-2$, nebo $A = 2 * 5$.

Postupně jsme se dostali k nejtěžší ze základních operací, a tou je dělení. Možná je pro nás jako pro učitele velmi poučné vyzkoušet si dělení dvou vícemístných čísel ve dvanáctkové soustavě, abychom si uvědomili, jaké potíže mohou mít naši žáci při dělení (především při určování správného násobku) v desítkové soustavě. Při dělení totiž na rozdíl od násobení vícemístných čísel nevystačíme s malou násobilkou (uvědomte si, že obří malá násobilka je téměř o polovinu větší než naše malá násobilka).

Příklad: $1\,001 : 11 = B1$

$$\begin{array}{l} BB \\ \quad 11 \\ \quad\;\, 0 \end{array}$$

Domácí úkol 3: Vypočítejte 1000/18.

5. Hodina – Dělitelnost

Poslední hodinu věnujeme kritériím dělitelnosti. Nejprve jednoduchá čísla. Dělitelnost čísly $2, 3, 4, 6$ a 10 rozpoznáme podle poslední číslice. Dělitelnost čísly 8 a 9 poznáme podle posledních dvou číslic, číslem B podle ciferného součtu (odůvodněte). Zbývají tedy čísla $5, 7$ a A, přičemž číslo A je $2 * 5$. Stačí tedy určit kritéria pro dělitelnost čísla 5 a 7. Nejprve vyřešíme příklad pro číslo 5. Napíšeme si násobky:

$$5, A, 13, 18, 21, 26, 2B, 34, 39, 42, 47, 50$$

Vzhledem k tomu, že není vidět žádné jednoduché pravidlo, použijeme jedno z univerzálních kritérií, které již známe z desítkové soustavy. Pokud má číslo více než čtyři místa, rozdělíme jej na čtveřice, a ty sčítáme. Tento postup opakujeme, dokud máme více než čtyřmístné číslo. Potom vezmeme číslici na řádu jednotek, přičteme k ní dvojnásobek číslice na řádu desítek, čtyřnásobek číslice na řádu stovek a trojnásobek číslice na řádu tisíců. Tento postup můžeme případně zopakovat. Pokud je výsledné číslo dělitelné pěti, je pěti dělitelné i původní číslo.

Domácí úkol 4: Odvoďte obdobný postup pro dělitelnost 7.

Řešení domácích úkolů
Domácí úkol 1: Lze nalézt například následující kritérium: Číslo je dělitelné číslem 15, pokud je dělitelný 15 součet číslic na pozicích ve tvaru $4k+1$ mínus 5krát součet číslic na pozicích ve tvaru $4k+2$ plus 3krát součet číslic na pozicích ve tvaru $4k+3$ mínus 4krát součet číslic na pozicích ve tvaru $4k$.

Domácí úkol 2: $158\frac{1}{2} + 274\frac{2}{3} = 411\frac{1}{6}$

Domácí úkol 3: $1\,000 : 18 = 72\frac{2}{3}$

Domácí úkol 4: Číslo je dělitelné sedmi, pokud je sedmi dělitelný součet lichých číslic plus pětkrát součet sudých číslic (počítáné odzadu).

Závěr

Na několika příkladech jsme se snažili demonstrovat, jak probíhají výpočty ve dvou různých číselných soustavách. Tyto a obdobné příklady autor používá na cvičení se studenty. Zcela jednoznačně vyburcují studenty z letargie a donutí je dívat se na problémy sčítání a násobení trochu jinak. Počítání v jiných číselných soustavách není, na rozdíl od příkladů na převádění mezi soustavami, mechanickým cvičením. Vyžaduje aktivní sledování celého postupu a rozhodnutí, které algoritmy a triky lze do té které soustavy transformovat. V některých případech lze převodem do vhodné číselné soustavy řešit i některé úlohy zadané v desítkové soustavě. Již jsme se seznámili s jednoduchým důkazem provedeným v šestkové soustavě, že prvočísla větší než 3 lze nalézt pouze ve tvaru $6k+1$ nebo $6k-1$. Na závěr si ukážeme jinou úlohu:

Úloha: Dokažte, že 15 dělí $16^8 - 1$.

Řešení: Úlohu vyřešíme v 16-kové soustavě. Přepíšeme zadání: Dokažte, že číslo F dělí $10^8 - 1$.
Rešení: $10^8 - 1 = FFFFFFFF = F * 11111111$

Uvedené řešení je krátké a elegantní, převodem do vhodné soustavy lze ukázat, zcela obecně, že $b-1$ dělí $bn-1$ pro b, n přirozená, a to bez využití polynomů.

Literatura

[1] Hejný M. a kol, *Teória vyučovania matematiky 2*, SPN, Bratislava, 1990

[2] Gatial J., Hecht T., Hejný M., *Hry takmer matematické*, MF, Praha, 1982

[3] Zhouf J., Aritmetika s jinými číslicemi, *In: Stehlíková N., Roubíček F.* Jak učit matematiku ve věku 10–15 let Praha, PedF UK, 2004 str. 113–119.

RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky PdF UK
M. D. Rettigové 4
116 39 Praha 1
e-mail: antonin.jancarik@pedf.cuni.cz