Učitel matematiky

Miroslav Macháček
Kolik budu měsíčně splácet?

Učitel matematiky, Vol. 14 (2006), No. 2, 114–118

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150725

KOLIK BUDU MĚSÍČNĚ SPLÁCET?

MIROSLAV MACHÁČEK

Klasická úloha finanční matematiky souvisí s otázkou, jakou částku naspoříme po určitém počtu let spoření při dané roční úrokové míře, pokud na počátku vložíme jistou částku, tzv. jistinu. Známý je ovšem tento vzorec:

$$y = x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

kde n ... počet let spoření
p ... roční úroková míra v %
x ... jistina, tj. částka uložená na počátku spořícího období
y ... uspořená částka po n letech

Samozřejmě předpokládáme, že se v průběhu spoření nemění úroková míra, že s vloženou částkou před ukončením spoření nemanipulujeme atd., tj. počítáme s podmínkami, které jsou v praxi takřka nesplnitelné.

Typ úlohy, kterou budeme formulovat nyní, se v praxi často vyskytuje a snad každý se s ní setkal. Může to být zároveň motivační úloha k odvození vzorce, ke kterému budeme směřovat v tomto článku.

Příklad 1: Jaká bude naše měsíční splátka, pokud nám banka půjčí 600 000 Kč na 20 let při roční[12] úrokové míře 6 %?

Jde o velice zajímavou otázku, na kterou nám samozřejmě odpoví náš bankovní poradce, pokusme se ale nyní matematickou úvahou odvodit obecný vzorec. Předpokládejme, že úroková míra

[12] Existuje i půlroční úroková míra aj.

zůstane po celou dobu splácení stejná, že banka si nebude účtovat žádné poplatky a formulujme obecnou úlohu:

Příklad 2: Jaká bude měsíční splátka klienta, pokud mu banka půjčí určitou částku na určité období při jisté úrokové míře?

Na tuto obecnou otázku se pokusíme odpovědět níže, nejprve začněme jednodušší konkrétní úlohou, která čtenáře „vtáhne" do problému.

Příklad 3: Kolik Kč bude činit naše měsíční splátka, pokud nám banka půjčí 10 000 Kč na tři měsíce při měsíční úrokové míře 1,5 %?

Hledanou měsíční splátku označme x a uvažujme, jaký bude stav půjčky na konci jednotlivých měsíců.

Stav na konci prvního měsíce:

$$10\,000 \cdot \left(1 + \frac{1{,}5}{100}\right) - x = 10\,000 \cdot 1{,}015 - x$$

Stav na konci druhého měsíce:

$$(10\,000 \cdot 1{,}015 - x) \cdot 1{,}015 - x = 10\,000 \cdot 1{,}015^2 - 1{,}015 \cdot x - x$$

Stav na konci třetího měsíce:

$$\begin{aligned}\left(10\,000 \cdot 1{,}015^2 - 1{,}015x - x\right) \cdot 1{,}015 - x &= \\ &= 10\,000 \cdot 1{,}015^3 - 1{,}015^2x - 1{,}015x - x\end{aligned}$$

Samozřejmě chceme, aby na konci třetího měsíce byla půjčka splacena, položíme tedy výraz odpovídající stavu na konci třetího měsíce roven nule:

$$10\,000 \cdot 1{,}015^3 - 1{,}015^2x - 1{,}015x - x = 0.$$

Dostáváme tak jednoduchou lineární rovnici s neznámou x, kterou vyřešíme:

$$\begin{aligned}1{,}015^2x + 1{,}015x + x &= 10\,000 \cdot 1{,}015^3 \\ \left(1{,}015^2 + 1{,}015 + 1\right) \cdot x &= 10\,000 \cdot 1{,}015^3 \\ x &= \frac{10\,000 \cdot 1{,}015^3}{1{,}015^2 + 1{,}015 + 1};\end{aligned}$$

nyní již stačí neznámou x vyčíslit – dostáváme $x \doteq 3\,434$ Kč. Jednoduchým výpočtem ještě zjistíme, že banka za tři měsíce takto vydělá přibližně 302 Kč. Tato částka se může zdát poměrně nízká, uvědomme si však, že jde o krátkou dobu a minimální půjčku, zisk banky ovšem roste s velikostí půjčky a delší dobou splácení[13].

Vraťme se k příkladu 2, ve kterém byla úloha formulována obecně. Označme hledanou měsíční splátku x, částku půjčky y, n bude počet měsíců splácení, měsíční úrokovou míru označme p[14].

Stav na konci prvního měsíce:

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot y-x$$

Stav na konci druhého měsíce:

$$\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot y-x\right]\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)-x=$$
$$=\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot y-\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot x-x$$

Stav na konci třetího měsíce:

$$\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 y-\left(1+\frac{p}{100}\right)x-x\right]\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)-x=$$
$$=\left(1+\frac{p}{100}\right)^3\cdot y-\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\cdot x-\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot x-x.$$

Stav na konci n-tého měsíce:

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^n\cdot y-\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}\cdot x-$$
$$-\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2}\cdot x-\cdots-\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\cdot x-$$
$$-\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot x-x.$$

[13]Roste ale i riziko, zda klient půjčku splatí

[14]Měsíční úroková míra je samozřejmě 1/12 roční úrokové míry.

Analogicky jako v předchozím příkladu 3 položíme poslední výraz roven nule a vyřešíme příslušnou rovnici pro neznámou x.

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^n\cdot y-\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}\cdot x-\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2}\cdot x- \\ -\cdots-\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\cdot x-\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot x-x=0$$

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}\cdot x+\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2}\cdot x+ \\ +\cdots+\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\cdot x+\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot x+x=\left(1+\frac{p}{100}\right)^n\cdot y$$

$$\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}+\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2}+\cdots+ \\ +\left(1+\frac{p}{100}\right)^2+\left(1+\frac{p}{100}\right)+1\right]\cdot x=\left(1+\frac{p}{100}\right)^n\cdot y$$

$$x=\frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n\cdot y}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}+\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-2}+\cdots+\left(1+\frac{p}{100}\right)^2+\left(1+\frac{p}{100}\right)+1}$$

kde n ... počet měsíců splácení
p ... měsíční úroková míra v %
y ... půjčka
x ... měsíční splátka

Dostali jsme tak požadovaný obecný vzorec a můžeme se ještě vrátit k motivačnímu příkladu 1. Zde je $n = 240$, $p = 0{,}5\,\%$ a $y = 600\,000$ Kč. Po dosazení do vzorce dostáváme rovnost

$$x=\frac{\left(1+\frac{0,5}{100}\right)^{240}\cdot 600\,000}{\left(1+\frac{0,5}{100}\right)^{239}+\left(1+\frac{0,5}{100}\right)^{238}+\cdots+\left(1+\frac{0,5}{100}\right)^2+\left(1+\frac{0,5}{100}\right)+1}$$

$$x=\frac{1{,}005^{240}\cdot 600\,000}{1{,}005^{239}+1{,}005^{238}+\cdots+1{,}005^2+1{,}005+1}$$

Tento výpočet je klasickým kalkulátorem takřka neproveditelný – v tomto případě nám pomůže nějaký tabulkový editor, ve kterém vypočítáme měsíční splátku $x \doteq 4\,300$ Kč. Při takové splátce nakonec banka vydělá více než 430 000 Kč, což již není zanedbatelná částka.

Miroslav Macháček
ZŠ Bitovská 1/1246
14000 Praha 4
e-mail: mmachac@centrum.cz

★ ★ ★

SLOVA „MATEMATIKA“ A „MATEMATIK“

volně (a drze bez znalosti norštiny) podle knihy [1] zpracoval

BOHDAN ZELINKA†

Slova „matematika“ a „matematik“ vznikla z řeckého adjektiva „mathématikos“, které souvisí se slovesem „manthanein“, což znamená „učiti se“ a přibližně značí „mít radost z učení“. Dále „manthanein“ souvisí s výrazem „mathéma“ ($\mu\alpha\vartheta\eta\mu\alpha$), což značí „učení“, „věda“, „nauka“, „učivo“. Slovo matematika vzniklo ve starém Řecku v době Pythagorově (cca 580–500 př. Kr.). Tehdy se nerozlišovaly jednotlivé vědy, takže pythagorejci pod pojem matematika zahrnovali filozofii, aritmetiku, geometrii a astronomii. Platon (427–347 př. Kr.) používá slova „mathéma“ obecně ve smyslu „učivo“. Popisuje „tria mathémata“, to jest aritmetiku, geometrii a astronomii.

V řečtině „ta mathématika“ je plurál, zatímco v latině „mathematica“ je singulár.