Učitel matematiky

Milada Kočandrlová

Obraz kuželosečky v kruhové inverzi

Učitel matematiky, Vol. 14 (2006), No. 3, 129–138

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/150728`

OBRAZ KUŽELOSEČKY V KRUHOVÉ INVERZI

MILADA KOČANDRLOVÁ

Pokud v učebnicích či příručkách, věnovaných geometrii, je uvedena kruhová inverze, je často používána ke konstrukčním úlohám o kružnicích, např. v [1]. Moderní výpočetní technika a matematický software otevírají další možnosti využití kruhové inverze. Jednu z těchto možností uvedeme v následujících řádcích. Určíme obrazy kuželoseček při různé volbě kruhové inverze. K tomu budeme potřebovat analytické vyjádření kruhové inverze i kuželoseček.

Kruhová inverze o středu O a koeficientu $\kappa \neq 0$ je zobrazení roviny (bez bodu O) na sebe, které zobrazí každý bod $X \neq O$ na bod X' tak, že polopřímky OX a OX' jsou totožné pro $\kappa > 0$, opačné pro $\kappa < 0$ a

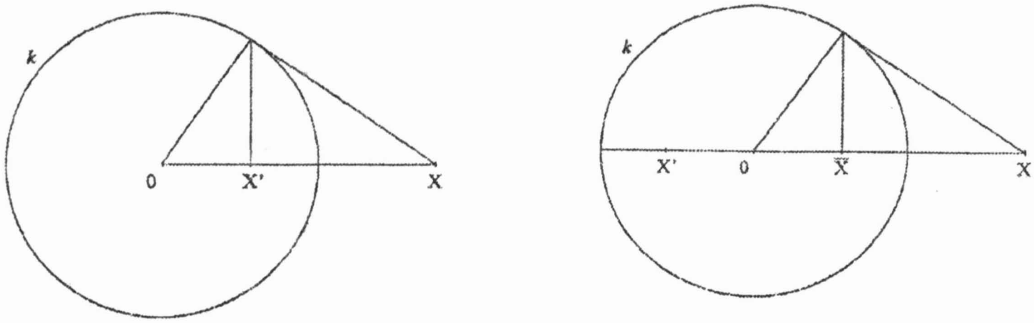
$$|OX| \cdot |OX'| = |\kappa|. \tag{1}$$

Pro samodružné body inverze platí $|OX| \cdot |OX| = |\kappa|$, tedy samodružné body inverze leží na kružnici k o středu O a poloměru $\sqrt{|\kappa|}$. Odtud název kruhová. V případě kladného koeficientu κ je kružnice k bodově samodružná. Pro $\kappa < 0$ kružnice k není bodově samodružná, viz následující konstrukce.

Z vlastnosti (1) je zřejmá konstrukce obrazů a vzorů v inverzi a další její vlastnosti:

1. Pro $\kappa > 0$ představuje rovnost (1) Eukleidovu větu o odvěsně, obr. 1 a. Poloměr kružnice k samodružných bodů je roven $\sqrt{\kappa}$.

2. Pro $\kappa < 0$ je poloměr kružnice k roven $\sqrt{|\kappa|}$. Obraz X' libovolného bodu $X \neq O$ určíme tak, že nejdříve sestrojíme obraz $\overline{X}$ v kruhové inverzi s koeficientem $\kappa > 0$ a potom



a) b)

Obr. 1

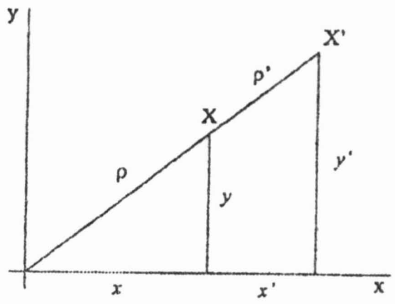
k bodu $\overline{X}$ jeho obraz X' ve středové souměrnosti se středem O, obr. 1 b. Je-li bod X na kružnici k, potom jeho obraz X' je s bodem X středově souměrný podle středu O.

Tedy kruhová inverze se záporným koeficientem κ je složena z kruhové inverze s kladným koeficientem κ a středové souměrnosti se středem O. Kružnice k v tomto případě není zřejmě bodově samodružná.

3. Zřejmě všechny vnitřní body kruhu určeném kružnicí k samodružných bodů se zobrazí do bodů vnějších a naopak. Aby bylo zobrazení vzájemně jednoznačným zobrazením roviny na sebe, přidáváme k rovině nevlastní bod O_∞ jako obraz, resp. vzor ke středu O inverze. Potom je zřejmé, že každá přímka procházející středem inverze je samodružná, ale ne bodově. Obrazem, resp. vzorem kružnice, jdoucí středem inverze, je přímka. Další vlastnosti kruhové inverze najdete v [1].

Analytické vyjádření kruhové inverze

Střed O kruhové inverze zvolíme v počátku kartézské soustavy souřadnic. Podle (1) s využitím podobnosti $\dfrac{y'}{x'} = \dfrac{y}{x}$, obr. 2, dostáváme zobrazovací rovnice kruhové inverze



Obr. 2

$$x' = \frac{\kappa x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{\kappa y}{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

Dosazením zobrazovacích rovnic (2) do rovnice

$$ax' + by' + c + d(x'^2 + y'^2) = 0 \tag{3}$$

přímky pro $d = 0$, resp. kružnice pro $d \neq 0$, dostaneme po úpravě rovnici vzoru k obrazu (3)

$$a\kappa x + b\kappa y + c(x^2 + y^2) + d\kappa^2 = 0. \tag{4}$$

Jakého typu je vzor a jeho obraz nebude problém určit podle koeficientů a, b, c, d. Též se dají odvodit další známé vlastnosti inverze uvedené např. v [1].

Při volbě středu kruhové inverze v počátku je výhodné využít polárních souřadnic ϱ, φ. Kruhová inverze má jednoduchou rovnici

$$\varrho \cdot \varrho' = |\kappa|. \tag{5}$$

Obraz kuželosečky v kruhové inverzi, kdy střed inverze není jejím bodem

Obrazem kuželosečky v kruhové inverzi, jejíž střed O není bodem této kuželosečky, je kvartika. Rovnici kuželosečky napíšeme ve tvaru

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{6}$$

Rovnici (6) vyjádříme v polárních souřadnicích, dosadíme do ní $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$,

$$A\varrho^2\cos^2\varphi + B\varrho^2\sin\varphi\cos\varphi + C\varrho^2\sin^2\varphi + \\ + D\varrho\cos\varphi + E\varrho\sin\varphi + F = 0.$$

Protože podle (5) je $\varrho = \dfrac{\kappa}{\varrho'}$, platí pro obraz kuželosečky (6)

$$\kappa^2(A\cos^2\varphi + B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi) + \\ + \kappa\varrho'(D\cos\varphi + E\sin\varphi) + F\varrho'^2 = 0.$$

Přechodem zpět ke kartézským souřadnicím $x' = \varrho'\cos\varphi$, $y' = \varrho'\sin\varphi$ pro obraz kuželosečky (6) dostáváme rovnici

$$\kappa^2(Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2) + \\ + \kappa(Dx' + Ey')(x'^2 + y'^2) + F(x'^2 + y'^2)^2 = 0. \quad (7)$$

1. Střed inverze je středem kuželosečky

a) Pro elipsu ve středovém tvaru v rovnici (6) je

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{b^2}, \quad D = E = 0, \quad F = -1.$$

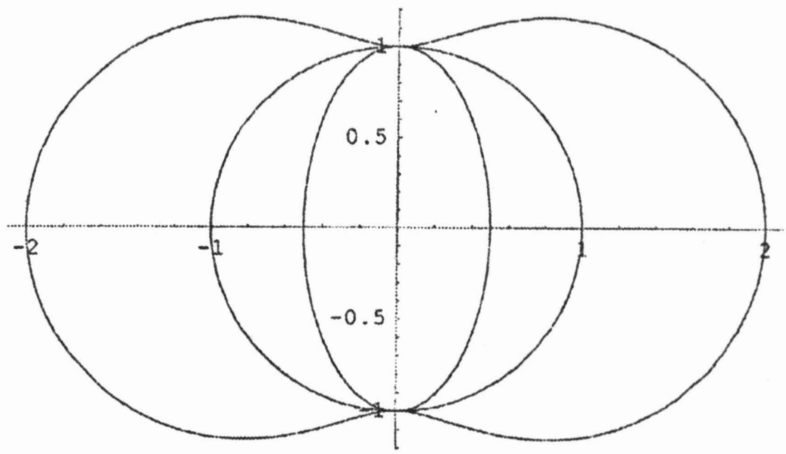
Dosazením do rovnice (7) dostáváme její obraz, je jím **eliptická lemniskata**.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \to \kappa^2\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}\right) = (x'^2 + y'^2)^2.$$

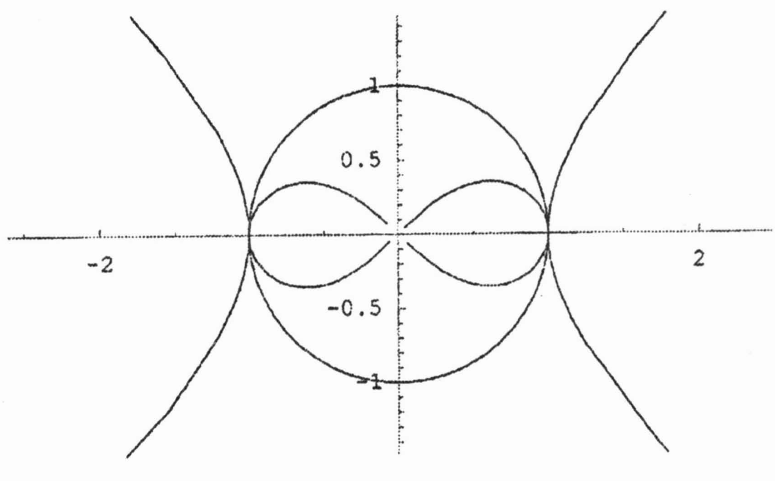
Po úpravě

$$\kappa^2(b^2x'^2 + a^2y'^2) = a^2b^2(x'^2 + y'^2)^2.$$

Pro $\kappa = ab$ je to **Boothova lemniskata** (nebo také **Helmertova křivka**), obr. 3. Vlastnosti lemniskaty a konstrukce jejích bodů s využitím kruhové inverze najdete ve [4].



Obr. 3



Obr. 4

b) Pro hyperbolu ve středovém tvaru v rovnici (6) je

$$A = \frac{1}{a^2}, \ B = 0, \ C = -\frac{1}{b^2}, \ D = E = 0, \ F = -1.$$

Dosazením do rovnice (7) dostáváme její obraz, je jím **hyperbolická lemniskata**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \to \kappa^2 \left(\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} \right) = (x'^2 + y'^2)^2.$$

Po úpravě

$$\kappa^2(b^2x'^2 - a^2y'^2) = a^2b^2(x'^2 + y'^2)^2.$$

Pro $\kappa = a^2$, pro rovnoosou hyperbolu je rovnicí

$$(x'^2 + y'^2)^2 = a^2(x'^2 - y'^2)$$

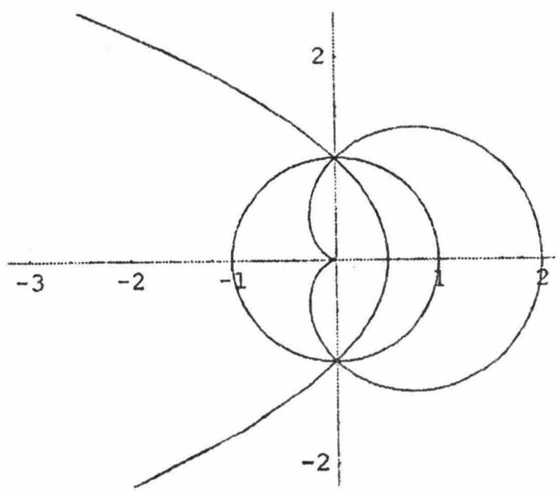
určena **Bernoulliova lemniskata**, obr. 4. Využití kruhové inverze pro konstrukci bodů lemniskaty najdete v [5].

2. Střed inverze je v ohnisku kuželosečky

Bude výhodnější kuželosečku i její obraz v inverzi vyjádřit v polárních souřadnicích. Rovnice kuželosečky je

$$\varrho = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi},$$

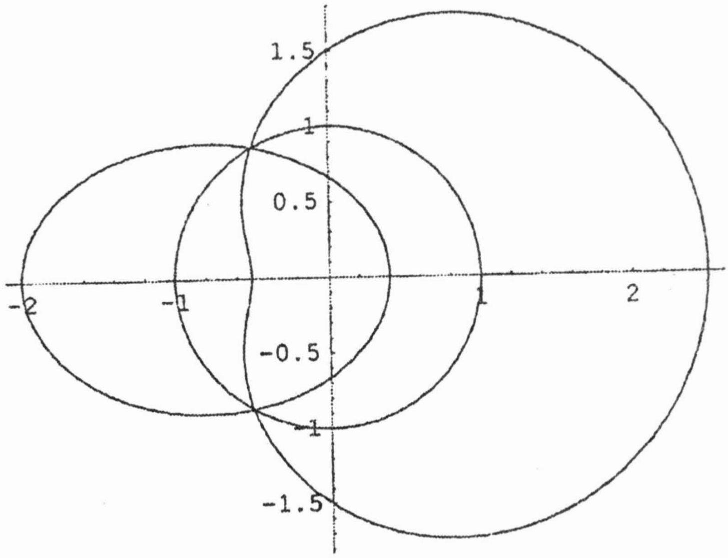
kde $p = \frac{b^2}{a}$ je parametr a $\epsilon = \frac{e}{a}$. Pro elipsu je $\epsilon < 1$, pro hyperbolu je $\epsilon > 1$ a pro parabolu je $\epsilon = 1$.



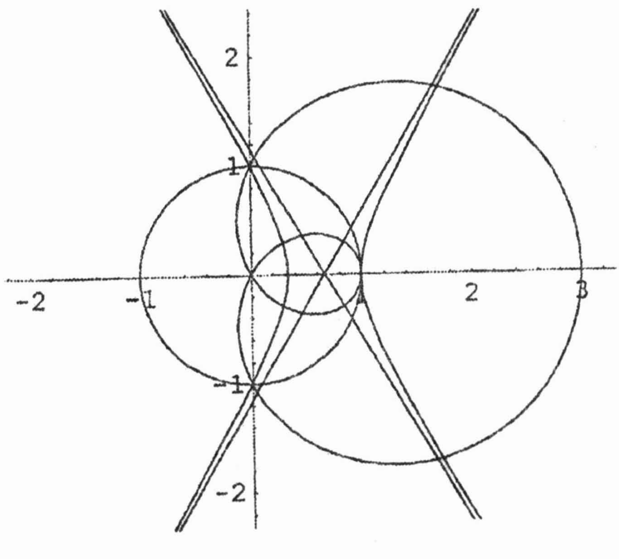
Obr. 5

a) Rovnicí $\varrho = \dfrac{1}{1 + \cos \varphi}$ je určena parabola $y^2 = 1 - 2x$. V kruhové inverzi s koeficientem $\kappa = 1$ ji podle (5) odpovídá křivka, určená rovnicí $\varrho' = 1 + \cos \varphi$, která se nazývá **kardioida**, obr. 5.

b) Rovnicí $\varrho = \dfrac{2}{3 + 2\cos\varphi}$ je určena elipsa $25(x + \frac{4}{5})^2 + 45y^2 = 36$ a v kruhové inverzi s koeficientem 1 ji odpovídá podle (5) křivka, daná rovnicí $\varrho' = \frac{3}{2} + \cos\varphi$, která se nazývá **Pascalova závitnice** obr. 6.



Obr. 6



Obr. 7

c) Rovnicí $\varrho = \dfrac{1}{1 + 2\cos\varphi}$ je určena hyperbola $9(x - \frac{2}{3})^2 - 3y^2 =$

$= 1$, které v inverzi s koeficientem 1 podle (5) odpovídá závitnice $\varrho' = 1 + 2\cos\varphi$, obr. 7.

Obraz kuželosečky v inverzi se středem na ní

Je-li střed inverze bodem kuželosečky, je jejím obrazem racionální kubika.

Navíc uvažujme, že se kuželosečka dotýká jedné z os souřadnic, např. osy y v počátku O. Potom rovnice (6) má tvar

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + x = 0. \tag{8}$$

V polárních souřadnicích

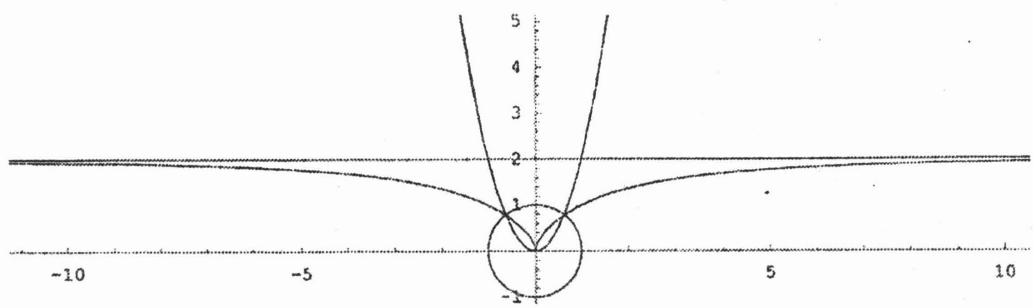
$$\varrho(A\cos^2\varphi + B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi) + \cos\varphi = 0.$$

Dosazením $\varrho = \frac{\kappa}{\varrho'}$ dostáváme rovnici

$$\kappa(A\cos^2\varphi + B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi) + \varrho'\cos\varphi = 0$$

a přechodem zpět ke kartézským souřadnicím má rovnice kubiky tvar

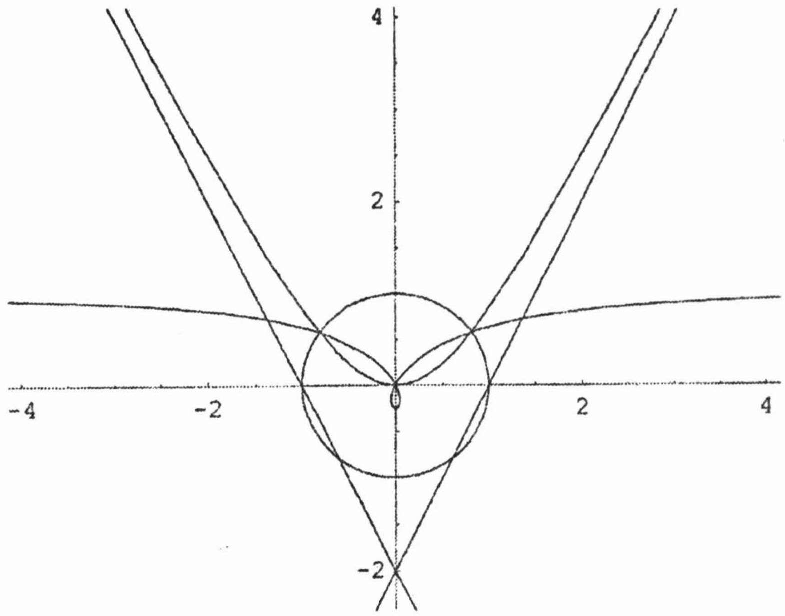
$$\kappa(Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2) + x'(x'^2 + y'^2) = 0. \tag{9}$$



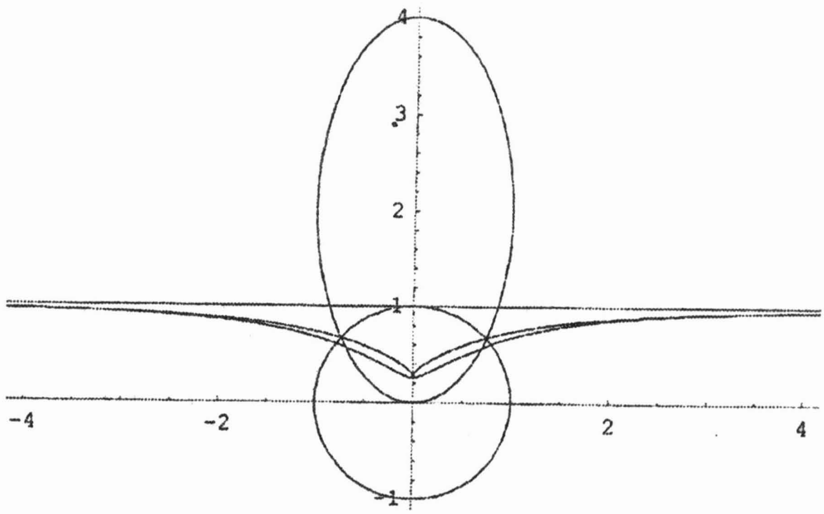
Obr. 8

a) Parabola $y = 2x^2$ má rovnici v polárních souřadnicích $\varrho = \dfrac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi}$. V kruhové inverzi s koeficientem $\kappa = 1$ je jejím obrazem **Dioklova kissoida** $y'^3 = x'^2(2 - y')$ s asymptotou $y' = 2$ a bodem vratu O, obr. 8.

b) Hyperbola $(y+2)^2 - 4x^2 = 4$, v polárních souřadnicích $\varrho = \dfrac{4\sin\varphi}{4\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}$, se v kruhové inverzi s koeficientem $\kappa = 1$ zobrazí na kubiku $4x'^3 + y'^2 + 4x'^2(y'-1) = 0$ s asymptotou $y' = 1$ a uzlovým bodem O, obr. 9.



Obr. 9



Obr. 10

c) Elipsa $4x^2 + (y-2)^2 = 4$, v polárních souřadnicích $\varrho = \dfrac{4\sin\varphi}{\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi}$, se v kruhové inverzi s koeficientem $\kappa = 1$ zobrazí na kubiku $4y'^3 - y'^2 + 4x'^2(y'-1) = 0$ s asymptotou $y' = 1$ a izolovaným bodem O, obr. 10.

Literatura

[1] Kuřina F., *Deset geometrických transformací*, Prometheus, 2002.

[2] Savelov A. A., *Ploskije krivije*, Moskva, 1960.

[3] Moděnov P. S., *Zadači po geometrii*, Moskva, 1979.

[4] Kočandrlová M., Boothova lemniskata, *MFI* **10**(6) 2001, s. 325–330.

[5] Kočandrlová M., O Bernoulliově lemniskatě, *MFI* **10**(5) 2001, s. 257–64.

Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.
Katedra matematiky, Fakulta stavební ČVUT,
Thákurova 7
166 29 Praha 6
e-mail: Milada.Kocandrlova@fsv.cvut.cz