NEKONEČNO – NEJEN V MATEMATICE
ale i
V KRÁSNÉ LITERATUŘE

FRANTIŠEK KUŘINA[1]

S nekonečnem se setkáváme v poezii i ve filozofii, v běžném životě, ve vědě i ve škole.

Kdo by neznal verše *Jiřího Voskovce* a *Jana Wericha: Nestojím o nekonečno s hvězdami všemi, mně stačí pár krásných let někde na zemi* .... Konečno s nekonečnem spojuje i filozof *Ludwig Wittgenstein: „Prostorový předmět musí ležet v nekonečném prostoru“* ([1], s. 13). S potenciální možností *„počítat neustále dál a dál“* se setkává dítě již v raném věku, aktuální vytvoření *„celé množiny všech přirozených čísel“* provedl, jak známo, až italský matematik *Giuseppe Peano* ve své axiomatice v roce 1889. Je pozoruhodné, že např. rozdílu ve formulacích *„pro každý prvek platí“* a *„pro všechny prvky platí“*, tedy rozdílu mezi *potenciální možností* a její „aktuální realizací“ si všiml *Karel Čapek* v půvabné stati *Každý a všichni* ([2], s. 158).

Možnost dívat se různě na jevy spjaté s nekonečnem lze ilustrovat na vzniku různých „paradoxů nekonečna.“ Hlubokou analýzu problémů spjatých s nekonečnými množinami provedl, jak známo, náš *Bernard Bolzano* v práci [3], která byla publikována v roce 1851, tedy až po jeho smrti. Za zakladatele teorie množin se dnes pokládá německý matematik *Georg Cantor*, který na Bolzana navazuje ([4], s. 159). Významnou českou publikací o nekonečnu je kniha *B. Pospíšila* [5], klasické dílo o množinách je *Aleksandrovův Úvod* [6], z novějších titulů uveďme např. *Fuchsovu* monografii [7]. Podrobnějším studiem didaktických otázek spjatých s nekonečnem se zabývá např. *Žlutá kniha Milana Hejného* [8] a práce *Dariny Jirotkové* [9] a *P. Eisenmanna* [10].

[1] Příspěvek byl připraven s podporou grantu GAČR 406/02/0829

1. Historie

V této části příspěvku připomeneme dva známé paradoxy spjaté s nekonečnem.

Příklad 1. Paradox Zenonův

Permanidův žák *Zenon z Elea* popsal někdy kolem r. 450 před naším letopočtem tento příběh:

Achilles závodí s želvou. Protože se Achilles pohybuje desetkrát větší rychlostí než želva, dá jí náskok 10 m. Za dobu, kdy Achilles těchto 10 m ujde, urazí želva 1 m, než „ujde" Achilles tento metr, uběhne želva 1 dm, než „urazí" Achilles tento decimetr, popoleze želva o 1 cm atd. až do nekonečna. Achilles nemůže želvu nikdy dohonit.

Zřejmá nesprávnost závěru příběhu ještě více vynikne, znázorníme-li situaci v kartézské soustavě souřadnic (obr. 1). Zvolíme-li za jednotku délky dráhu, kterou urazí želva za jednotku času, můžeme situaci popsat rovnicemi (1), kde t znamená čas, s dráhu:

$$\begin{aligned} s &= t + 10, \\ s &= 10t \end{aligned} \tag{1}$$

Z obrázku je patrné i místo a čas setkání. Dráha, kterou želva k setkání urazila, je

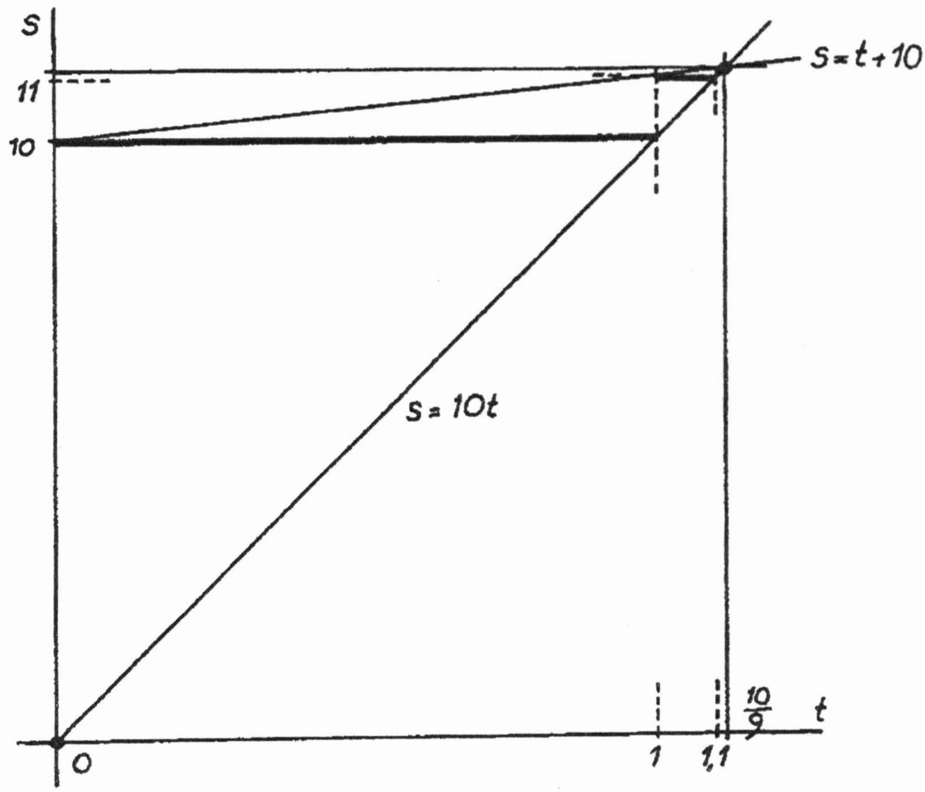
$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots = 1,111\cdots = \frac{10}{9}. \tag{2}$$

Tento výsledek můžeme zdůvodnit užitím vzorce

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q} \tag{3}$$

pro součet geometrické řady s prvním členem a_1 a kvocientem q (v našem případě je $a_1 = 1, q = \frac{1}{10}$), nebo řešením soustavy (1).

V čem spočívá paradox Zenonova příběhu? Proč zdánlivě správná úvaha odporuje zdravému rozumu? Zenon považuje Achillovu výhru za nemožnou, protože se podle jeho interpretace okamžik dostižení želvy odehrává v nekonečně mnoha časových úsecích.



Obr. 1

Přesto, že je těchto úseků nekonečně mnoho, jejich celková délka je konečná. Názorně je to vidět i z obr. 1: vodorovné tlustě vyrýsované úsečky mají dohromady délku $\frac{10}{9}$.

Druhý příklad, který uvedeme, je překvapivě mnohem mladší. Uvádí ho r. 1638 slavný italský matematik a astronom *Galileo Galilei.*

Příklad 2. Paradox Galileův

Zobrazení, které libovolnému přirozenému n přiřazuje jeho druhou mocninu n^2, je prosté zobrazení množiny $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel na množinu K všech kvadrátů přirozených čísel.

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots \\ 1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\cdots \end{array} \tag{4}$$

Množiny $\mathbb{N}$ a K mají tedy stejnou mohutnost (stejný počet prvků), jsou ekvivalentní. Z druhé strany je ovšem zřejmé, že množina K je vlastní podmnožinou množiny $\mathbb{N}$

$$N = K \cup \{2, 3, 5, 6, \cdots\} \tag{5}$$

a množina $\mathbb{N}$ má tedy více prvků než množina K.

Tento paradox dovedl Galilea k závěru, že *vlastnosti rovnost a nerovnost nemají místo v nekonečných, ale pouze v konečných množinách* ([11], s. 210).

O 250 let později, v r. 1883, německý matematik *Georg[5 Cantor* nejenže přijal tento paradox, ale definoval v tomto smyslu nekonečnou množinu:

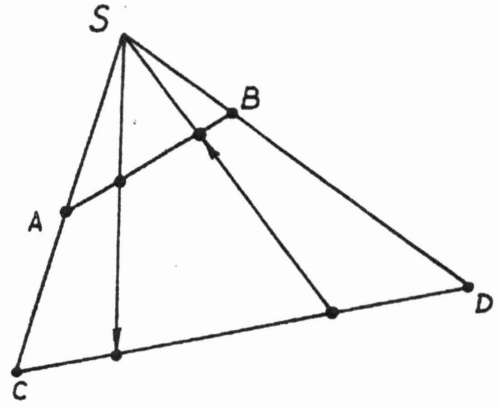
Množina je nekonečná, právě když ji lze prostě zobrazit na její vlastní podmnožinu.

O 125 let později, r. 1998, připouští *P. Vopěnka* v práci [12] na základě studia děl Bolzanových možnost platnosti tzv. *generálního kolapsu*:

Každé dvě nekonečné množiny lze na sebe vzájemně jednoznačně zobrazit. ([12], s. 287).

My se zde ovšem přidržíme cantorovského paradigmatu.

Libovolné dvě úsečky a tedy i libovolné dva intervaly mají stejnou mohutnost (obr. 2). Klasickou *Cantorovou diagonální metodou* lze dokázat, že množina R všech reálných čísel není ekvivalentní s množinou N všech čísel přirozených. V článku [13] jsou tyto známé výsledky připomenuty a je ukázáno i prosté zobrazení uzavřeného intervalu $\langle 0; 1\rangle$ na otevřený interval $(0; 1)$ a prosté zobrazení množiny R všech reálných čísel na interval $(0; 1)$. Tyto výsledky vykazují ovšem rovněž jistou paradoxnost, neboť např. interval délky 1 mm je složen „ze stejného množství" bezrozměrových bodů jako celá přímka.



Obr. 2

2. Škola

V tomto odstavci ukážeme čtyři příklady možných kontaktů studenta střední školy s nekonečnem.

Příklad 3. Dva shodné útvary

Sestrojte dva shodné geometrické útvary U, V tak, aby první byl částí druhého, ale druhý nebyl částí prvního.

Pro útvary U, V má tedy platit zároveň

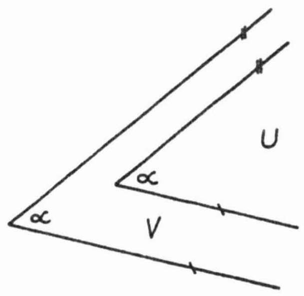
$$U \cong V, \; U \subset V, \; V \not\subset U. \tag{6}$$

Pokusy, které řešitel neznalý úlohy začne dělat, vedou obvykle k závěru, že útvary U, V, které splňují vztahy (6), neexistují. Představuje si, že útvar U je např. mnohoúhelník, útvar V s ním má být shodný a má-li být jeho částí, musí s ním splynout. Pak by ovšem byl i útvar V částí útvaru U. Budou-li však útvary U, V neomezené, pak jeden ze shodných útvarů může být vlastní podmnožinou druhého (obr. 3).

Příklad 4. Dva středy souměrnosti

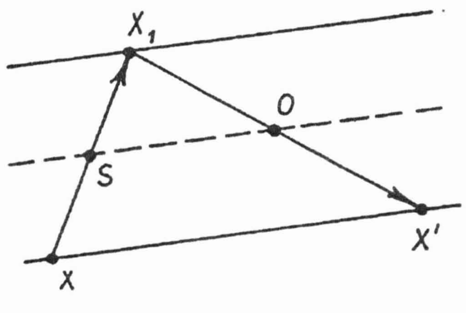
Sestrojte geometrický útvar, který má dva různé středy souměrnosti.

Předpokládejme, že útvar U má středy souměrnosti S a O. Protože S je střed souměrnosti útvaru U, je jeho obraz v souměr-



Obr. 3

nosti se středem S týž útvar U, podobný závěr můžeme udělat i pro středovou souměrnost se středem O. Útvar U přejde tedy sám v sebe v zobrazení, které je složením dvou středových souměrností tj. v posunutí neboli translaci. Takový útvar nemůže být omezený. Může jím být např. pás roviny (obr. 4), sinusoida, ...



Obr. 4

Příklad 5. Nekonečný plot

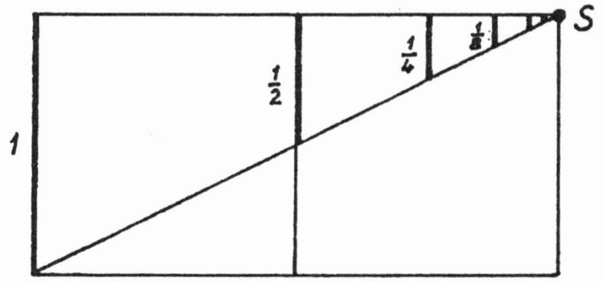
Na obr. 5 a,b jsou nakresleny „perspektivy“ dvou nekonečných plotů. Tyčky prvního z nich jsou obrazy první tyčky ve stejnolehlostech

$$h_n(S; \frac{1}{2^n}), \tag{7}$$

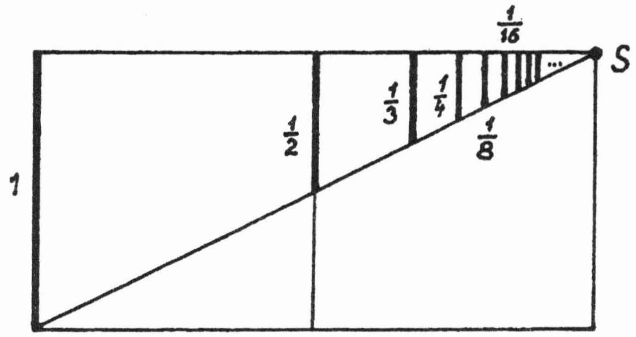
tyčky druhého plotu vzniknou jako obrazy první tyčky ve stejnolehlostech

$$H_n(S; \frac{1}{n}), \tag{8}$$

pro $n = 1, 2, 3, \cdots$. Vypočítejte součet délek všech zmenšujících se tyček v obou plotech.



Obr. 5a

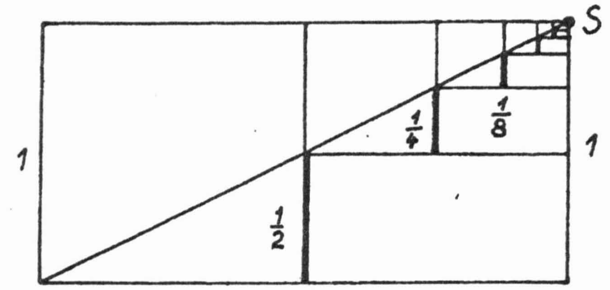


Obr. 5b

V prvním případě jde o součet

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2, \tag{9}$$

neboť zde máme geometrickou řadu s prvním členem 1 a kvocientem $\frac{1}{2}$. Tento výsledek je ovšem vidět i z obr. 6.



Obr. 6

V druhém případě jde o součet

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots . \tag{10}$$

Protože

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

je harmonická řada, roste součet délek „tyček plotu“ nade všechny meze. Tento výsledek můžeme ovšem nahlédnout i na úrovni základní školy, neboť každý z nekonečně mnoha sčítanců v závorce je větší než $\frac{1}{2}$.

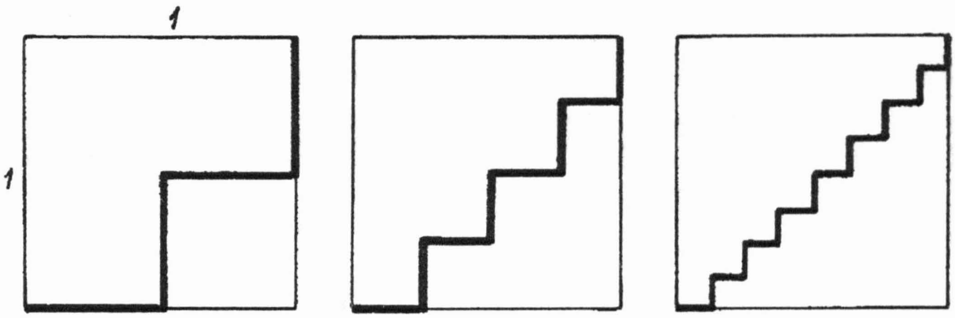
$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \tag{11}$$

$$+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \cdots \tag{12}$$

Tento paradox dvou plotů je pěkný: ačkoliv tyček v obou plotech je „stejně“ (spočetně mnoho), znamenají tyčky, které jsou v druhém plotě navíc, enormní nárůst celkové délky plotu.

Příklad 6. Nekonečné schodiště

Na obr. 7 je nakreslen začátek posloupnosti schodišť: Každé následující má výšku a šířku schodu poloviční vzhledem k předcházejícímu. Máme určit celkovou délku schodiště pro „nekonečně malé trpaslíky“.



Obr. 7

Po ne příliš dlouhé řadě pokusů zjistíme, že obrázek schodiště „splyne“ s úhlopříčkou čtverce. Závěr, že délka schodiště s nekonečně malými schůdky je $\sqrt{2}$ je ovšem zcela nesprávný. Posloupnost délek schodišť je

$$2, 2, 2, 2, \cdots \qquad (13)$$

a tedy i schodiště pro trpaslíky má délku 2.

„Blíží-li“ se vizuálně schodiště úhlopříčce čtverce, neznamená to, že se i jeho délka blíží délce úhlopříčky čtverce.

3. Umění

Je zajímavé, že fascinaci nekonečnem mohou pocítit i osoby, které nemají vyhraněně kladný vztah k matematice. Ilustrujme to na dvou příkladech.

Bohumil Hrabal popisuje své setkání s nekonečnem v textu *Jak jsem dělal maturitu* ([14], s. 18 a 22):

... trvale jsem měl během maturitních zkoušek jasný pocit, že jsem propadl, že ani jinak to nemůže být. Se sklopenýma očima, zlitý potem, jsem nezvedl oči ani v tú chvíli, kdy předseda maturitní komise oznámil, že jsem udělal maturitní zkoušku s dostatečným prospěchem. Přijímal jsem gratulace s pocitem hanby, spíš jako kondolenci k úmrtí v rodině. Zastavil jsem se s maturitním vysvědčením až u řeky, a čím vícekrát jsem si četl, že jsem absolvoval maturitní zkoušky, tím více jsem tomu nevěřil, ani když mi

to četli rodiče, ani když jsem se za noci budil a četl si to maturitní vysvědčení zas a zas ...

... Teď s odstupem let myslívám na jinačí maturity, teď myslívám na tu jistou dospělost, kterou jsem dosáhl možná už jako chlapec, kdy jsem seděl na chodbě na kufru a díval se pozorně na krabičku matičních sirek, na kterých byla nálepka, na které byla zobrazena žena, která na rukou měla děťátko, které v prstech drželo tu samou krabičku matičních sirek, a tedy na té malinké krabičce byl mnohem menší obrázek ženy, která na ruce držela ještě menší děťátko, které drželo zase ještě menší krabičku matičních sirek, zmenšujících se dál a dál až do nekonečna. Možná, že jsem také tenkrát složil maturitu na výtečnou, když slečna Wanda, ta ryšavá houslistka, hrála The Fascination a měla pemzově bílou pleť a zelené oči a na nosíku trochu pih - a já jsem se v těch jejích očích dobral samotného dna nejen ženské krásy, ale krásy vůbec. Na tuhle maturitu, na tyhle zkoušky dospělosti teď často myslívám, na ta podivuhodná setkání s krásou a plnou myšlenkou, ve které zakouším pocit něčeho, co je více než já, co je nade mnou, a přesto ve mně.

Františka Langra uchvátila idea nekonečna v povídce *Přímka v červeném* ([15] , s. 21 - 32):

Ve výstavní síni Foyer de Seine ukazoval své malby jakýsi Dombrowitz a plakát řezaný do linolea, pravděpodobně jeho vlastnoruční výtvor, nazýval výstavu Přímka v červeném ...

... Večerník *France Soir* o výstavě napsal:

Jedinou předností jeho vystavených produktů je ... přesná přímost jejich přímek. Ale i ta je podezřelá. Je asi udělána podle známého receptu užívaného na školách v hodinách geometrie. „Umělec“ z jednoho konce obrazu na druhý asi napjal motouz hustě napuštěný bělobou. Pak motouz ponazvedl jako tětivu luku, spustil jej, nechal dopadnout do kraplakového nátěru a tím vznikla na něm bezvadná přímka. Takhle to dělají školáci s nakřídovaným provázkem na školní tabuli. A nějaký člověk to nazývá uměním.

N. de Y.

Autor Dombrowitz na kritiku reaguje:

Tohle darebáctví nemohu nechat jen tak. Deset let pracuji, než jsem došel k závěru, že přímka musí postačit, aby vyjádřila nejhlubší lidské pocity. Je-li správně vsazena v čase a v prostoru. Kus věčnosti. Dokonalost tady na zemi. Pokaždé ji kreslím s takovým soustředěním, že by stačilo vzkřísit mrtvého. A ten chlap mě podezřívá z provázku, jako bych byl zednický učedník nebo malíř písma!

...

... *Abych dokázal planost pomluvy pana N. de Y., budu dne 7. září o 16. hodině na Place d'Alma veřejně malovat nový obraz z cyklu Přímka ... Ať se pan N. de Y. dostaví, aby mohl na místě zkontrolovat své tvrzení a odvolat svůj odsudek.*

Produkce začíná ...

... *zableskla světla žárovek fotoaparátů a rozsvítil se malý reflektor filmové kamery. Naplno začal hučet agregát v autu televize a rozsvítily se její lampy, které zpočátku prskaly, a když ztichly, byly vystřídány vrčením přijímacího aparátu. Tu právě Dombrowitz zabodl hrot štětce do levého horního rohu plátna. A pak táhl ostrou bílou čáru do pravého dolního. Očekával jsem, že tak učiní jedním rázem, jako řez břitvou. Ne. Táhl štětec pomalu, pozvolna.*

Nezdálo se, že štětec nechává bílou stopu za sebou. Naopak, jeho pomalý pohyb jako by zvolna, nuceně ustupoval bílé barvě, která se milimetr po milimetru za ním odněkud objevuje na plátně. Jako by ji zadržoval, aby nenastupovala příliš překotně, jako by brzdil a hradil její nával. Nebyla to spolupráce štětce a barvy, ale souboj štětce s barvou.

Barva zvolna vítězila, štětec před ní ustupoval. Jenže tak zvolna, až to napínalo, znepokojovalo, plnilo obavou, že se něco stane, někde to zadrhne, něco se přihodí, možná i katastrofa. Štětec neodolá, vzdá se a bílá barva zaplaví pak celý svět. Aspoň půl minuty, snad celá, možná i dvě to trvalo, a po celý ten čas jsem byl napjat, čekal jsem a trnul, než štětec, vlastně bílá barva dospěla z jednoho rohu plátna do druhého.

Ztratil jsem vědomí času po celou tu dobu, kdy se přímka pohybovala po plátně. Ale i vědomí čehokoli jiného. Vnímal jsem jenom ji, jenom ji, a myslím, že stejně tak kruh lidí kolem štaflí, a stejně *i filmový a televizní přijímač. Její rození se stalo záležitostí širokého okruhu. Chodci na ulici se zastavili. Aspoň se mi zdálo, že už není slyšet šoupání podrážek a klapot podpatků o chodník. Věděl jsem, že stojí nehybně, ledaže stoupají na špičky a pohlížejí napjatě sem k nám, jako by tu očekávali nějaké zjevení. A zdálo se mi, že se i auta v jízdní dráze zastavila. Nebylo slyšet ani rachot motorů, ani klaksony, ani svištění pneumatik na asfaltu. Také auta asi stála a zvedala své kapoty jako čumáky a vyvalila své skleněné oči, aby viděla přes hlavy diváků. I vrabci, kteří celý den štěbetají v korunách platanů, utichli a dívali se z větví dolů na nás. Všecko, naprosto všecko napjatě bralo účast na zrození přímky na plátně. Jak jsem řekl, štětec ji nevytvářel. Naopak jen ji zdržoval, dokud nenabyla plné hustoty a tíže. Až se stala zralou k svému zrození. Teď oslavována tolika pohledy se sama ze sebe vytvářela, vznikala, ztělesňovala.*

A já jsem pochopil, že to není lecjaká přímka, nějaká pouhá přímka, přímka kvůli přímce. Není. Nepohybuje se jako každá přímka v čase a v prostoru, ani po plátně a v barvě. Ale že její začátek je někde v nekonečnu a v bezčasu. Že minutu dvě byla zadržena štětcem a pobývá na naší planetě v konečnu a v čase. Že však za okamžik tamhle z rohu plátna zase uběhne do bezedného kosmu a zmizí v něm na věky věků. Taková je to přímka! Abstraktní přímka! Nikdy jsem vlastní smysl abstrakce nepocítil hlouběji než na ní. Ještě víc a závratněji jistě ji cítil Dombrowitz, který své přímky tolikrát vytvářel, takže jsem teď pojal velkou úctu k dílu tohoto člověka, které se na prvý pohled zdálo tak jednoduché a skromné.

Když přímka překročila okraj plátna, malíř zvedl štětec jako jí na pozdrav a nám na znamení, že skončil. Všecko se opět náhle rozzvučelo a rozhýbalo, auta, lidé, dovrčely kamery, muži od televize s křikem stáčeli kabely, vrabci opět pištěli. A na plátně před námi se nad kraplakovým pozadím skvěla napjatá bílá čára, úzká, ostrá jako vryp sklenářského diamantu do červené glazury vzácné majoliky. Diváci se rozcházeli, rozjely se pracovní vozy i francesorovské auto. Někteří z malířových kolegů zavolali na rozloučenou Bravo, Dombrowitz, jiní odcházeli nespokojeni. Očekávali pořádný *skandál, jaký stále ještě vyvolávalo každé veřejné vystoupení abstraktivistů. Dnes skandál nebyl. Strážník se znovu přiblížil, vrhl na plátno téměř znalecký pohled, ale pak se k němu opovržlivě obrátil zády. Možná sám v neděli maluje, jenže doopravdy. Krajiny a takové věci.*

... červené plátno bílou přímkou roztržené ve dví, jako chrámová opona.

... obraz vznikl před mýma očima jako bezmála zázrak. Jako přímka, která přichází z nekonečna a ubíhá do nekonečna. A kterou malíř na minutu dvě zadržel na naší planetě. Jako přímka, která se pohybuje mezi věčností minula a věčností budoucna. A umělec ji na jednu nebo dvě minuty připoutal k naší přítomnosti. Že její tvůrce, Dombrowitz se jmenoval, jeho křestní jméno ani neznám, vytvořil touto krásnou, přesnou, napjatou přímkou nejčistší abstrakci, k jaké může umění dostoupit.

Literatura

[1] Wittgenstein, L., *Tractatus logico – philosophicus*, Svoboda, Praha, 1993

[2] Čapek, K., *V zajetí slov*, Svoboda, Praha, 1969

[3] Bolzano, B., *Paradoxien des Unendlichen*, Reclam, Leipzig, 1851 český překlad *Paradoxy nekonečna*, Praha 1963.

[4] Struik, D., J., *Dějiny matematiky*, Orbis, Praha, 1963

[5] Pospíšil, B, *Nekonečno v matematice*, JČMF, Praha, 1949

[6] Aleksandrov, P., S., *Úvod do obecné theorie množin a funkcí*, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1954'

[7] Fuchs, E., *Základy teorie množin*, SPN, Praha, 1984

[8] Hejný, M. a kol., *Teória vyučovánia matematiky 2.*, Sl'ovenské pedagogické nakl'adatelstvo, Bratislava, 1989

[9] Jirotková, D., Pojem nekonečno v geometrických představách studentů primární pedagogiky, *Pokroky matematiky, fyziky, astronomie* **4**(1998)

[10] Eisenmann, P., Představy žáků o nekonečnu, In: Dva dny s didaktikou matematiky 2002. Sborník příspěvků. UK, Praha, 2002

[11] Barrow, J., D., *Pí na nebesích*, Mladá fronta, Praha, 2000

[12] Vopěnka, P., *Podivuhodný květ českého baroka*, Karolinum, Praha, 1998

[13] Kuřina, F., I elementární matematika může být krásná, *Pokroky matematiky, fyziky, astronomie* **2**(2003)

[14] Hrabal, B., *Kdo jsem*, Hynek, Praha, 2000

[15] Langer, F., *Malířské povídky*, Československý spisovatel, Praha, 1966

Prof. RNDr. František Kuřina, CSc.
Katedra matematiky
Pedagogická fakulta Univerzity Hradec Králové
Víta Nejedlého 573, 500 03 Hradec Králové 3
e-mail: frantisek.kurina@uhk.cz