Lada Stachovcová

Vyjádření racionálního čísla pomocí egyptských zlomků

Učitel matematiky, Vol. 9 (2001), No. 4, 211–218

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150908

VYJÁDŘENÍ RACIONÁLNÍHO ČÍSLA POMOCÍ EGYPTSKÝCH ZLOMKŮ

LADA STACHOVCOVÁ

Jeden z nejstarších matematických textů, známý *Rhindův papyrus* (2000–1800 př.n.l.), obsahuje mnoho úloh, které souvisejí s následujícím problémem: dané racionální číslo a/b vyjádřit jako součet převrácených hodnot různých kladných celých čísel, tzn. nalézt taková celá čísla $0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_k$, která splňují

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_k}\,. \tag{1}$$

Zlomky $1/u$ obecně nazýváme *jednotkové*, pokud se však v (1) opravdu žádný nevyskytuje více než jednou, hovoříme o vyjádření čísla a/b pomocí *Egyptských zlomků – Egyptian fraction expansion*. Jedná se vlastně o jediný způsob, jakým dávní Egypťané číslo (množství) a/b vyjadřovali (kromě jednotkových zlomků $1/u$ pak používali ještě zlomek $2/3$, pro který měli speciální znak). Jako pomůcka pro jednotlivé výpočty sloužily tabulky obsahující vyjádření některých racionálních čísel pomocí jednotkových zlomků. V Rhindově papyru je např. uvedena tabulka vyjádření (1) čísel tvaru $2/n$ pro všechna lichá n od 5 do 101. Jedním z posledních matematických textů dokumentujícím používání jednotkových zlomků je *Akhmimský papyrus* (asi 500 n. l.), který obsahuje několik tabulek vyjádření čísel n/p a n/pq (p, q prvočísla) pomocí jednotkových zlomků.

Obecná metoda, jakou Egypťané své tabulky sestavovali, není dodnes známa a toto téma je předmětem mnoha diskuzí.[1] Vyjádření (1) totiž nemusí být nutně jediné, např. $4/5 = 1/2 + 1/4 + 1/20 = 1/2 + 1/6 + 1/10 + 1/30$. Tento článek se ovšem nesnaží zapojit do problému sestavování egyptských tabulek, všímá si spíše

[1] Bližší informace např. na adrese
`http://www2.ecst.csuchico.edu/~atman/Misc/horus-eye.html`.

několika prací zaměřených na téma nalezení obecného algoritmu sloužícího k vyjádření (1) racionálního čísla a/b, kde $0 < a/b < 1$.

Až do konce tedy předpokládejme, že pro racionální číslo a/b platí $1 < a < b$ (rozklad samotných jednotkových zlomků, které jsme podmínkou $a > 1$ vyloučili z našich úvah, lze provést např. způsobem $\frac{1}{b} = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{b(b+1)}$), a dále že je zlomek a/b v nezkratitelném tvaru, tzn. $(a, b) = 1$, kde symbol (a, b) označuje největšího společného dělitele čísel a a b.

Fibonacci–Sylvesterův algoritmus

Asi nejpřirozenější a nejprůhlednější metodou je najít co nejlepší aproximaci zlomku a/b jednotkovým zlomkem $1/u_1$ menším než a/b, tzn. nalézt přirozené číslo u_1 takové, aby

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{u_1} + \frac{a_1}{b_1} \quad \text{a současně} \quad \frac{1}{u_1} < \frac{a}{b} < \frac{1}{u_1 - 1},$$

a stejný postup potom aplikovat na zbytek a_1/b_1. Chceme-li tedy pomocí Egyptských zlomků vyjádřit například racionální číslo $3/13$, bude v tomto případě $u_1 = 5$ ($4 < \frac{13}{3} \doteq 4{,}3 < 5$). Dostáváme tak

$$\frac{3}{13} = \frac{1}{5} + \frac{2}{65}.$$

Další člen hledaného vyjádření bude $\frac{1}{33}$ ($\frac{1}{33} < \frac{2}{65} < \frac{1}{32}$). Zbytkem je nyní číslo $2/65 - 1/33 = 1/65 \cdot 33$, což je přímo jednotkový zlomek. Tím jsme dospěli k vyjádření

$$\frac{3}{13} = \frac{1}{5} + \frac{1}{33} + \frac{1}{2\,145} \quad .$$

Tuto metodu popsal již Leonardo Pisánský (Fibonacci) (kolem 1180–1250) ve své knize *Liber Abaci* (1202), podrobněji se jí zabýval až r. 1880 J. J. Sylvester[2] v [7]. Proto bývá uváděna jako Fibonacci–Sylvesterův algoritmus. (Můžeme se však setkat i s termínem *hladový* algoritmus (*greedy algorithm*); „hladově“ totiž

[2]**James Joseph Sylvester** (1814–1897), anglický matematik; zabýval se teorií čísel, teorií forem, teorií matic a teorií elementárních dělitelů.

bereme z možných jednotkových zlomků $1/u < a/b$ ten největší.) Máme ovšem zaručeno, že tento algoritmus vždy skončí a že takto získané jednotkové zlomky jsou opravdu různé? Po prvním kroku dostáváme

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{u_1} + \frac{a_1}{b_1},$$

kde $a_1/b_1 = (au_1 - b)/(bu_1)$ budeme uvažovat již v základním tvaru (tzn. $(a_1, b_1) = 1$). Předpokládejme, že $a_1 \neq 1$ a že tedy postup dále opakujeme a hledáme u_2 takové, aby platilo

$$\frac{1}{u_2} < \frac{a_1}{b_1} < \frac{1}{u_2 - 1}.$$

Číslo a_1/b_1 pak vyjádříme opět ve tvaru $a_1/b_1 = 1/u_2 + a_2/b_2$. Z nerovnosti $a/b < 1/(u_1 - 1)$ plyne $a > au_1 - b \geq a_1$. Posloupnost čitatelů $a, a_1, a_2, \ldots$ je tedy klesající, a jelikož se jedná o kladná celá čísla, musíme po konečném počtu kroků dospět k číslu 1. Počet těchto kroků je nejvýše $a - 1$, tedy vyjádření (1) čísla a/b obsahuje obecně nejvýše a členů – obvykle je však pro velká b tento počet mnohem menší. Z nerovností

$$\frac{1}{u_2} < \frac{a_1}{b_1} = \frac{au_1 - b}{bu_1} < \frac{a}{bu_1} < \frac{1}{u_1}$$

je dále vidět, že posloupnost jmenovatelů $u_1, u_2, \ldots$ je rostoucí; žádný z takto nalezených jednotkových zlomků $1/u_i$ se proto ve vyjádření čísla a/b nebude vyskytovat více než jednou. Nárůst čísel u_i však bývá poměrně prudký, čehož je možné si všimnout již na rozkladu čísla 3/13.

Golombův algoritmus

S. W. Golomb[3] v [6] použil následující postup: k danému racionálnímu číslu a/b nalezneme celé číslo a' takové, aby $aa' = 1 + br$ pro nějaké celé číslo r, přičemž $0 < a' < b$. Vzhledem

[3]**Solomon W. Golomb**, americký matematik, v současné době profesor na University of Southern California. Do okruhu jeho působnosti patří kombinatorická analýza, torie kódování a kryptografie, teorie čísel a teorie her.

k tomu, že $(a, b) = 1$, dá se snadno na základě *Bezoutovy identity*[4] dokázat, že takové a' existuje a je jediné. Tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + br}{a'b} = \frac{1}{a'b} + \frac{r}{a'}$$

a pro číslo r platí $(r, a') = 1$ a $0 < r < \min(a, a')$. V případě, že $r \neq 1$, můžeme opět pokračovat, tzn. vzít celé číslo r' tak, aby $rr' = 1 + a's$, kde $0 < r' < a'$. Dostaneme tak rozklad

$$\frac{r}{a'} = \frac{1 + a's}{r'a'} = \frac{1}{r'a'} + \frac{s}{r'},$$

kde opět $0 < s < \min(r, r')$. Daný postup opakujeme tak dlouho, dokud čitatel zbytku nebude roven jedné (vzhledem k tomu, že kladná celá čísla v čitateli klesají, toto opět po konečném počtu kroků, kterých je stejně jako u Fibonacci–Sylvesterova algoritmu nejvýše $a - 1$, nastane). A jelikož $r' < a'$ a $a' < b$, dostáváme $r'a' < a'b$, neboli jmenovatelé takto vygenerovaných jednotkových zlomků se v každém kroku zmenšují.

Ukažme si Golombův postup opět na příkladě čísla $3/13$. Nejprve je tedy třeba určit $a', 0 < a' < 13$, tak, aby platilo $3a' = 1 + 13r$ pro nějaké celé číslo r. Zcela evidentně $a' = 9$, $r = 2$, tzn. dostáváme

$$\frac{3}{13} = \frac{1 + 13 \cdot 2}{13 \cdot 9} = \frac{1}{13 \cdot 9} + \frac{2}{9}$$

a stejným způsobem pak můžeme rozložit $2/9 = 1/45 + 1/5$. Pro $3/13$ tedy máme vyjádření

$$\frac{3}{13} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45} + \frac{1}{117},$$

které sice obsahuje stejný počet členů, jako tomu bylo v případě Fibonacci–Sylvesterova algoritmu, ovšem velikost největšího jmenovatele je podstatně menší (zřejmě je $a'b \leq (b - 1)b$).

---

[4] *Bezoutova identita*: pro libovolná celá čísla a, b existují celá čísla u, v taková, že $au + bv = (a, b)$.

Erdősův algoritmus

Roku 1950 publikoval P. Erdős[5] článek [5], v němž dokazuje vztah $N(a,b) \leq 8 \ln b / \ln \ln b$, kde $N(a,b)$ označuje délku k nejkratšího možného vyjádření (1) čísla a/b. K důkazu použil postupu, který je označován jako *Erdősův algoritmus* a jehož hlavní princip je následující: Nejprve je potřeba k danému a/b určit přirozená čísla n a z taková, aby platilo

$$(n-1)! \leq b < n! \quad \text{a} \quad \frac{z}{n!} \leq \frac{a}{b} < \frac{z+1}{n!} \ .$$

Další postup je založen na tvrzení, že pro libovolná přirozená čísla p, q ($p < q!$) lze p vyjádřit jako součet navzájem různých kladných dělitelů čísla $q!$, přičemž počet sčítanců nepřesáhne q.[6] Čísla z a $an! - bz$ (obě menší než $n!$) tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$z = d_1 + d_2 + \cdots + d_r \qquad (1 \leq r \leq n) \ ,$$

$$an! - bz = d'_1 + d'_2 + \cdots + d'_s \qquad (0 \leq s \leq n) \ ,$$

kde $0 < d_1 < \cdots < d_r$, $0 < d'_1 < \cdots < d'_s$ jsou dělitelé čísla $n!$ ($s = 0$ odpovídá případu „nulového součtu", kdy je $an! - bz = 0$). Potom už stačí jen položit

$$u_i = \frac{n!}{d_i} \ (i = 1, \ldots, r) \quad \text{a} \quad u'_j = \frac{n!b}{d'_j} \ (j = 1, \ldots, s) \ .$$

Čísla u_i, u'_j budou navzájem různá (zřejmě $0 < u_r < \cdots < u_1 <$ $< u'_s < \cdots < u'_1$), a snadným dosazením se můžeme přesvědčit, že

$$\frac{1}{u_1} + \cdots \frac{1}{u_r} + \frac{1}{u'_1} + \cdots \frac{1}{u'_s} = \frac{a}{b} \ .$$

[5]**Paul Erdős** (1913–1996), matematik pocházející z maďarské židovské rodiny; významných výsledků dosáhl především v teorii grafů, teorii čísel a kombinatorice.

[6]Toto tvrzení lze dokázat matematickou indukcí vzhledem k q. Předpokládáme-li totiž jeho platnost pro $3, \ldots, q-1$ (platnost v případě $q = 2$ je evidentní) a vyjádříme-li p ve tvaru $p = qr + s$, kde $0 \leq s < q$ (dělení se zbytkem), pak na základě jednoduchých úvah zjistíme, že $r < (q-1)!$. Z indukčního předpokladu a skutečnosti, že buď $s = 0$, nebo $s | q!$, již plyne uvedené tvrzení.

Jak tedy budeme postupovat při rozkladu čísla 3/13? Nalezneme n takové, aby platilo $(n-1)! \leq 13 < n!$. Tento vztah splňuje $n = 4$. Nyní je potřeba určit celé číslo z, pro které platí

$$\frac{z}{4!} \leq \frac{3}{13} < \frac{z+1}{4!} \ .$$

Tímto číslem je $z = 5$. Vyjádříme tedy čísla $z = 5$ a $an! - bz = 3 \cdot 4! - 13 \cdot 5 = 7$ jako součty dělitelů $4! = 24$, např. $5 = 2 + 3$, $7 = 3 + 4$. (Tato volba není jediná; stejně tak bychom mohli vzít např. $5 = 1 + 4$ a $7 = 1 + 6$, což by také vedlo ke správnému výsledku, tj. k vyjádření čísla 3/13 pomocí Egyptských zlomků, ovšem s poněkud většími jmenovateli.) Máme tedy

$$u_1 = \frac{24}{2},\ u_2 = \frac{24}{3},\ u_1' = \frac{24 \cdot 13}{3},\ u_2' = \frac{24 \cdot 13}{4} \ ,$$

neboli

$$\frac{3}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{78} + \frac{1}{104} \ .$$

Tento rozklad čísla 3/13 je co do velikosti jednotlivých zlomků srovnatelný s výsledkem Golombova algoritmu, obsahuje však větší počet členů.

Srovnání a příklady

Obecně bohužel není možné určit, který z algoritmů je nejlepší (ideální by byl takový, jehož výsledkem by bylo co nejkratší vyjádření (1) s co nejmenšími jmenovateli). Pro jednotlivé algoritmy sice platí

— $k \leq a$ a $u_k < b^{2^k}$ v případě Fibonacci–Sylvestrova algoritmu ([4]),

— $k \leq a$ a $u_k \leq b(b-1)$ pro Golombův algoritmus,

— $k \leq O(\sqrt{\ln b})$ a $u_k \leq \frac{4b^2 \ln b}{\ln \ln b}$ pro velká b v případě Erdősova algoritmu ([2,5,8]),

skutečné výsledky však záleží na konkrétní volbě čísel a a b. Užitím Fibonacci–Sylvestrova algoritmu obvykle dostaneme vyjádření (1) s poměrně malým počtem členů ([4] odhaduje $k \leq O(\ln a)$), velikost čísel u_i ovšem roste exponenciálně. Je-li a blízké b, Golombův algoritmus produkuje vysoký počet členů (pro $a = b - 1$ je přímo $k = a$). V mnoha případech proto bývá nejvýhodnější použít postup Erdősův, který je ale na druhou stranu při počítačovém zpracování časově náročnější.

Př. 1 V případě 4/23 je výstup všech algoritmů stejný

$$\frac{4}{23} = \frac{1}{6} + \frac{1}{138}\,.$$

Př. 2 Je-li $a/b = 7/23$, užitím Fibonacci–Sylvesterova algoritmu dostáváme

$$\frac{7}{23} = \frac{1}{4} + \frac{1}{19} + \frac{1}{583} + \frac{1}{1\,019\,084}\,,$$

užitím Golombova algoritmu

$$\frac{7}{23} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{70} + \frac{1}{230}$$

a výsledkem Erdősova algoritmu je

$$\frac{7}{23} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{138} + \frac{1}{184}\,.$$

Př. 3 Pro $a/b = 20/23$ jsou jednotlivé výstupy

Fibonacci–Sylvesterův algoritmus

$$\frac{20}{23} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{28} + \frac{1}{1\,932}\,,$$

Golombův algoritmus

$$\frac{20}{23} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{105} + \frac{1}{345}\,,$$

Erdősův algoritmus

$$\frac{20}{23} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{46} + \frac{1}{69}\,.$$

Výše uvedené tři algoritmy samozřejmě nezahrnují všechny způsoby, jakými lze vyjádření (1) čísla a/b nalézt. Podrobnější rozbor dalších metod, včetně jejich zdrojových kódů v programu MATHEMATICA, obsahuje článek [4]. Třebaže některé z nich jsou pro konkrétní případy efektivnější, nelze obecně prohlásit některou metodu za nejlepší.

LITERATURA

[1] Bleicher, M. N., *A new algorithm for the expansion of Egyptian fractions*, Number Theory **4** (1972), 342–382.

[2] Bleicher, M. N., Erdős, P., *Denominators of Egyptian fractions*, Number Theory **8** (1976), 157–168.

[3] Boyer, C. B., *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1968.

[4] Eppstein, D., *Ten algorithms for Egyptian fractions*, Mathematica in Education and Research **4** (1995), 5–15.

[5] Erdős, P., *Az* $1/x_1 + 1/x_2 + \cdots + 1/x_n = a/b$ *egyenlet egész számú megoldásairól*, Mat. Lapok **1** (1950), 192–210.

[6] Golomb, S. W., *An algebraic algorithm for the representation problems of the Ahmes papyrus*, Amer. Math. Monthly **69** (1962), 785–787.

[7] Sylvester, J., *On a point in the theory of vulgar fractions*, Amer. J. Math. **3** (1880), 322–335, 388–389.

[8] Vose, M. D., *Egyptian fractions*, Bull. London Math. Soc. **17** (1985), 21–24.

Mgr. Lada Stachovcová
VBÚ Praha
Vítězné náměstí 5, Praha 6
email: stachovl@army.cz