Učitel matematiky

Miroslav Lávička

Od Descarta k dynamické geometrii

Učitel matematiky, Vol. 9 (2001), No. 4, 219–225

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150909

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2001

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

OD DESCARTA K DYNAMICKÉ GEOMETRII

MIROSLAV LÁVIČKA

V roce 1637 vyšlo v Leydenu filozofické dílo *Discours de la méthode (Rozprava o metodě)*, které bylo provázeno třemi dodatky. Autorem díla byl francouzský filozof a matematik RENÉ DESCARTES a jedním z dodatků *Rozpravy* byl spis *Géométrie*, v němž Descartes podrobil celou klasickou geometrii algebraickým metodám. Hlavní význam *Geometrie* spočíval především ve vytvoření základů tzv. analytické geometrie — matematické disciplíny, která je založena na myšlence, že vlastnosti libovolného geometrického objektu lze studovat pomocí početních prostředků s využitím souřadnicové soustavy. Historicky starší je geometrie syntetická, jež dosáhla vysoké úrovně již ve starém Řecku. Díky výpočetní technice a modernímu didaktickému softwaru (programům tzv. dynamické geometrie) se dnes ve školách můžeme za pomoci Descartovy souřadnicové metody opětovně vrátit zpět ke geometrii syntetické. Díky Descartovi a jeho pokračovatelům je možné geometrické objekty algebraizovat a tím je zobrazovat na obrazovce počítače.

Jak je známo, základní myšlenkou analytické geometrie je skutečnost, že při pevně zvolené souřadné soustavě lze každý bod v rovině jednoznačně zachytit uspořádanou dvojicí reálných čísel. Přímku pak reprezentuje lineární rovnice $ax + by + c = 0$, kružnici kvadratická rovnice $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ a tak dále. Máme-li dány dva body (tj. dvě uspořádané dvojice reálných čísel), potom po krátkém výpočtu jednoduše určíme rovnici přímky, která zadanými body prochází. Číselná změna jakékoliv ze souřadnic obou bodů (neboli změna polohy bodu) znamená nový výpočet — a každá další změna představuje další výpočet. I člověk s velkou dávkou trpělivosti po několika výpočtech zcela určitě rezignuje. A tady se právě otevírá cesta pro výpočetní techniku; nechme ji pracovat za nás. „Pohneme-li“ bodem na nákresně, změní se samozřejmě souřadnice tohoto bodu a současně se automaticky přepočte i rovnice přímky. Jestliže se např. tato přímka protíná s další přímkou, pak zmíněný pohyb bodu způsobí nejen přepočtení rovnice přímky, ale i přepočtení souřadnic průsečíku. A jestliže je tento průsečík ještě středem kružnice, přepočte se současně i rovnice této kružnice — možnosti jsou opravdu téměř neomezené. V „zákulisí" počítače pracují algebraické algoritmy (především řešení lineárních a kvadratických rovnic a jejich soustav), jejichž grafickým projevem je to, co se odehrává na obrazovce počítače — plynulé překreslování přímek, kružnic, popř. dalších určitých množin bodů, které splňují předem dané vlastnosti. Jedná se o nejtěsnější propojení „obou geometrií" — syntetické a analytické.

Mezi nejrozšířenější a nejoblíbenější softwarové prostředky používané k podpoře výuky geometrie dnes bezesporu patří program *CABRI GEOMETRIE*, jehož první verze vznikla již v roce 1988. Ukažme si, jak lze pomocí tohoto programu studovat např. klasické úlohy z již zmíněné Descartovy *Geometrie*. Analytickou metodu při tom budeme využívat pouze nepřímo, tj. jen prostřednictvím počítače. „Nechme" jistou úlohu vyřešit Descarta a pak ukážeme sílu programu *CABRI*.

Zkoumáním Descartova způsobu aplikace analytické metody na různé geometrické úlohy lze ve všech případech vysledovat asi toto schéma řešení. Descartes nejprve slovně popíše určitý geometrický problém. V druhé fázi zavádí označení pro známé a neznámé veličiny a sestavuje rovnici či soustavu rovnic. Konečně na závěr pracuje se získanými rovnicemi až do té doby, než dostane vyjádření jisté křivky.

... Například, chci znát, jakého rodu je křivka EC, kterou si představuji složenou z průsečíků pravítka GL a pravoúhlého rovinného obrazce CNKL, jehož strana KN je neomezeně prodloužena směrem k C a jehož strana KL se pohybuje po přímce BA. Pravítko GL je spojeno s obrazcem CNKL tak, že vždy prochází L.

Vyberu některou přímku, například AB, ke které vztáhnu všechny body křivky EC, a vyberu na ní nějaký bod, vezměme A, u něhož začneme s vyjadřováním ...

... Vyberu na křivce libovolný bod, například C, vedu z bodu C přímku CB rovnoběžnou s GA. Neboť CB a BA jsou dvě neznámé veličiny, označím jednu z nich y a druhou x ...

Vidíme, že Descartes zavádí pravoúhlý souřadný systém, v němž AB je osa x, AG osa y a A je počátek — i když takto přímo Descartes nepojmenovává.

... Abych našel vztah mezi těmito hodnotami, označím rovněž známé veličiny, které popisují křivku, konkrétně GA, kterou označím a, KL, kterou označím b, a NL, rovnoběžnou s GA, kterou označím c. Potom tvrdím, že NL se má k LK neboli c k b jako se má CB neboli y k BK, což je tím pádem $\frac{b}{c}y$ ...

Po převedení do našeho zápisu dostáváme:

$$NL : LK = CB : BK \quad \text{neboli} \quad c : b = y : BK, \text{ tj. } BK = \frac{b}{c}y$$

Descartes pokračuje:

Potom BL je rovno $\frac{b}{c}y - b$ *a AL je rovno* $x + \frac{b}{c}y - b$. *Dále, jako se má CB k LB, neboli y k* $\frac{b}{c} - b$, *tak se má AG neboli a k LA neboli* $x + \frac{b}{c}y - b$. *Násobíme-li druhé třetím, dostaneme* $\frac{ab}{c}y - ab$ *rovno* $xy + \frac{b}{c}yy - by$, *což získáme násobením prvého posledním* ...

$$CB : LB = AG : LA$$

$$\text{neboli} \quad y : \left(\frac{b}{c}y - b\right) = a : \left(x + \frac{b}{c}y - b\right) \implies$$

$$\implies a \cdot \left(\frac{b}{c}y - b\right) = y \cdot \left(x + \frac{b}{c}y - b\right),$$

$$\text{tj.} \quad \frac{ab}{c}y - ab = xy + \frac{b}{c}yy - by$$

Hledaná rovnice má tvar

$$yy = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$$

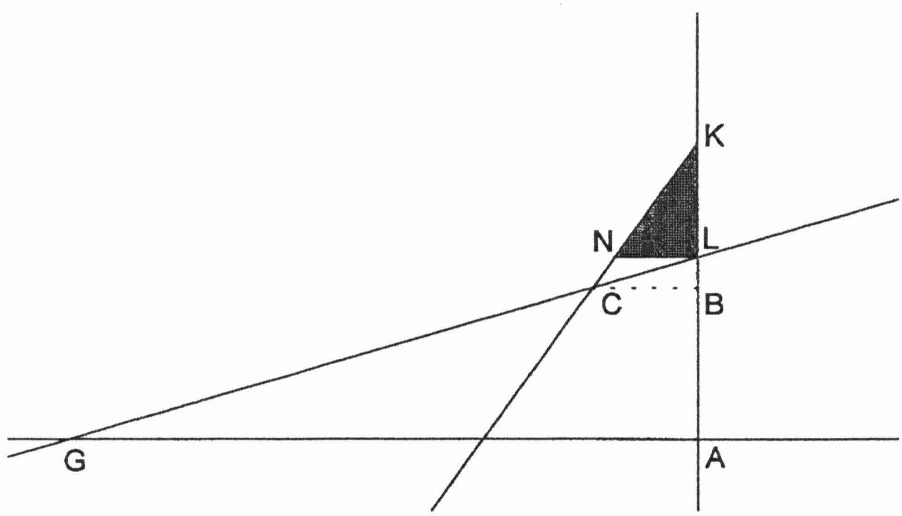
a Descartes po dalších geometrických úvahách konstatuje, že příslušná křivka je hyperbola.

My bychom dnes asi použili modernější zápis této kuželosečky

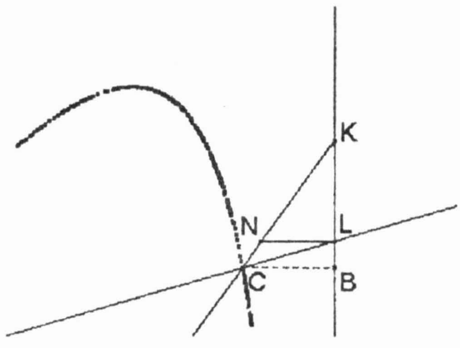
$$\frac{c}{b}xy + y^2 - (a+c)y + ac = 0$$

a při znalosti problematiky analytické geometrie kuželoseček a jejich třídění bychom rovněž snadno zjistili, že se jedná o hyperbolu, neboť

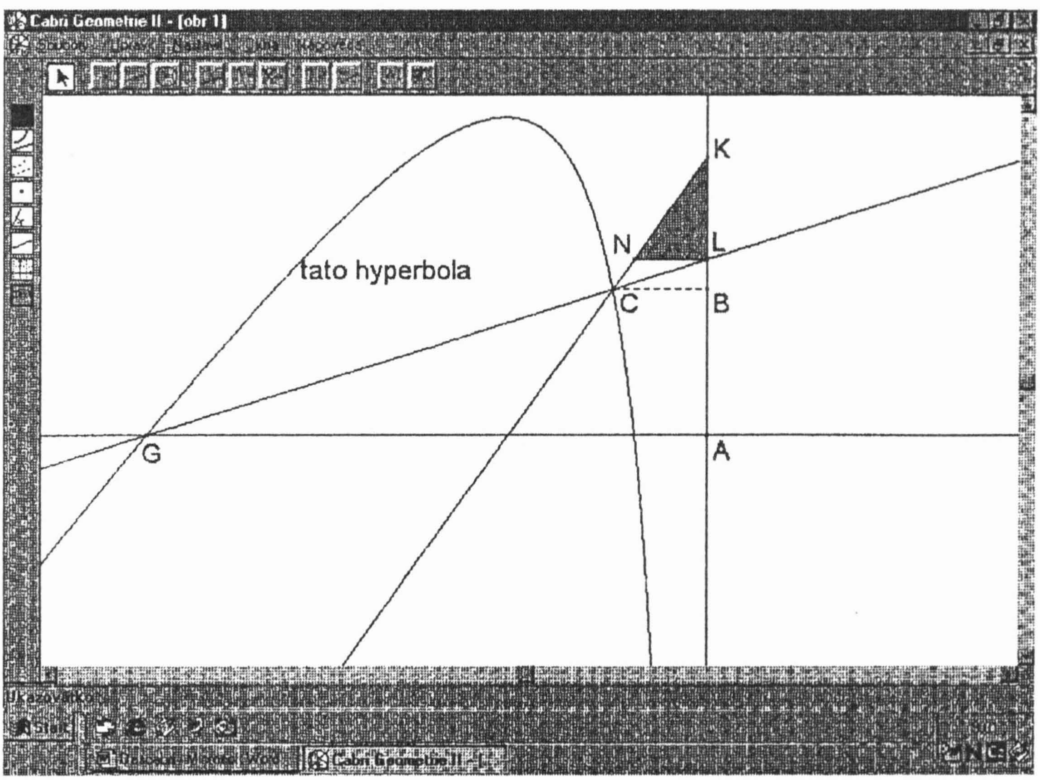
$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{c}{2b} \\ \frac{c}{2b} & 1 \end{vmatrix} = -\left(\frac{c}{2b}\right)^2 < 0$$



A jak jít na stejnou geometrickou úlohu s *CABRI*? Především geometricky! Nabídky programu *CABRI* jsou opravdu bohaté — najdeme zde tvorbu bodů, přímek, kružnic, kuželoseček, konstrukci kolmic a rovnoběžek, nanášení vzdáleností, shodná zobrazení, stejnolehlost a mnoho dalších užitečných funkcí. Přesně pomocí Descartova slovního návodu sestrojíme pravoúhlý trojúhelník NLK, jehož strana LK leží na přímce AB, a přímku GL. Není problémem najít společný bod C přímky GL a přímky KN. Až potud jsme mohli tutéž konstrukci provádět v sešitě nebo na tabuli.



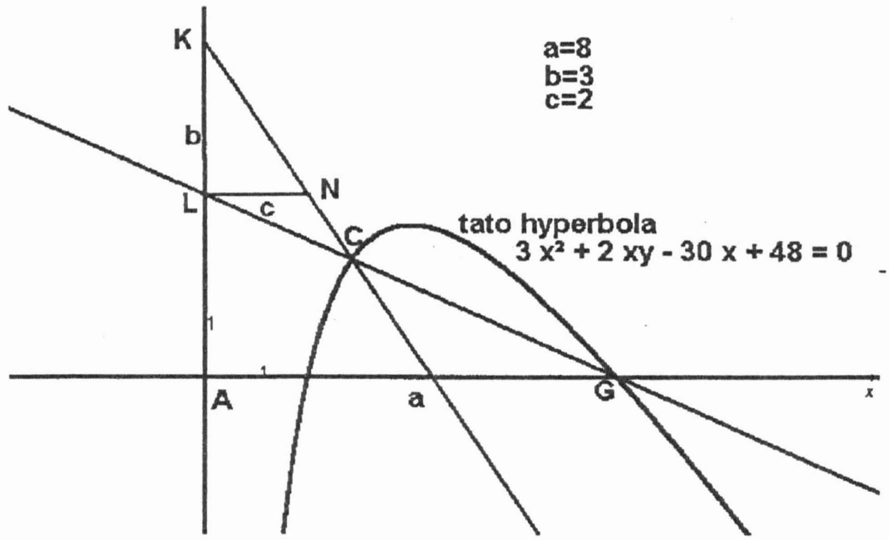
Užitečnost programů dynamické geometrie se ukazuje až v dalším. S geometrickými objekty lze manipulovat — pokud je objekt volný, lze jej uchopit myší a přemisťovat ho po nákresně. Pohybujeme tudíž bodem L, který je vázán na přímku AK, čímž současně dochází k pohybu trojúhelníka NLK i přímky GL. Současně se mění i poloha průsečíku C. Množinu všech bodů C lze postupně vykreslit pomocí tzv. stopy (viz obrázek) a problémem není ani vykreslení množiny rovnou. Poté lze určit i typ vykreslené kuželosečky (viz obrázek)



Zdá se, že jsme úkol vyřešili i bez Descartovy souřadnicové metody — my však víme, že tohle pravda není; bez analytické geometrie by to nešlo. *CABRI* je opravdu velice dovedný nástroj, který nás nechá zapomenout na analytickou geometrii a dovolí nám unášet se jen geometrií syntetickou. A kdo by na analytickém zpracování příkladu stále trval, také by nepřišel zkrátka. Stačí pouze aktivovat souřadné osy, které neviditelně pracují v pozadí, a příklad rázem dostává analyticko–geometrickou podobu.

Na obrázku je znázorněno řešení Descartovy úlohy pro počáteční hodnoty parametrů $a = 8$, $b = 3$, $c = 2$, které vede na rovnici

$$3x^2 + 2xy - 30x + 48 = 0.$$



Uvědomíme-li si, že Descartes používal při řešení úlohy obrácené značení os (stačí v rovnici formálně přeznačit x a y), potom jsme dospěli ke stejnému výsledku jako on

$$x^2 + \frac{2}{3}xy - (8+2)x + 8 \cdot 3 = 0,$$

$$\text{tj.} \quad 3x^2 + 2xy - 30x + 48 = 0.$$

Descartova analytická geometrie nám prostřednictvím *CABRI* pomáhá — alespoň ve škole — znovuobjevovat svoji „syntetickou sestru“. Je zřejmé, že bez „klasických“ znalostí a dovedností bychom toho ani s počítačem mnoho nedokázali. Kdo nezná geometrii, nemůže používat ani geometrický software. Moderní trendy ve výuce musejí směřovat spíše k vzájemnému prolínání obou přístupů, a proto věřme, že v budoucnu se budeme s výukovými a učebními geometrickými programy jako je *CABRI GEOMETRIE* setkávat na našich školách stále častěji. Hodiny geometrie snad potom již přestanou být postrachem nejen žáků, ale — přiznejme si — i učitelů.

RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.
Katedra matematiky Pedagogické fakulty ZČU v Plzni
Klatovská tř. 51, Plzeň
email: lavicka@kmt.zcu.cz

★ ★ ★

OZNÁMENÍ

Matematicko-pedagogická sekce a její odborná skupina středních odborných škol zvou učitele matematiky na středních odborných školách a středních odborných učilištích na konferenci

Jak učit matematiku na odborných školách

Konference se koná ve dnech 20. – 22. září 2001 na Univerzitě Pardubice. Na programu budou:

- otázky týkající se vyučování matematice na odborných školách,
- přednášky z matematistické statistiky, teorie pravděpodobnosti a finanční matematiky,
- společná a školní část maturitní zkoušky z matematiky,
- tvorba sbírek příkladů pro odborné školy.

Účastníci konference budou pracovat především v sekcích podle zaměření studijního oboru a podle hodinové dotace.

Kontaktní adresa: Mgr. František Procházka
SPŠ strojnická Chrudim
Čáslavská 973
537 01 Chrudim
tel.: 0455-688623, fax: 0455-688621
e-mail: prochazka@spss-cr.cz