Pavel Trojovský
Fibonacciova čísla a řady

Učitel matematiky, Vol. 8 (2000), No. 1, 1–12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150914

FIBONACCIOVA ČÍSLA A ŘADY

PAVEL TROJOVSKÝ

Nedávno uveřejněný článek [Ve] obsahuje Binetovu formuli pro Fibonacciova čísla F_n a zmínku o mocninné řadě $\sum F_n x^n$. V tomto článku ukážeme, jak lze Binetovu formuli pomocí této řady *odvodit*. Dále ukážeme, že existuje více řad souvisejících s Fibonacciovou posloupností $\{F_n\}$, jejichž součet lze nalézt poměrně jednoduchými prostředky. Budeme užívat stejné označení jako ve [Ve].

Připomeňme, že Fibonacciova posloupnost $\{F_n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$ je rekurentně popsána vztahem

$$c_{n+2} = c_{n+1} + c_n \,, \tag{1}$$

kde $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ a podmínkou $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Stejná rekurence (1) popisuje tzv. *Lucasovu posloupnost* $\{L_n\}$, ve které je $L_0 = 2$, $L_1 = 1$. Francouzský matematik EDOUARD LUCAS (1842–1891) se zabýval především teorií čísel. Navrhl metodu testování prvočíselnosti a v roce 1876 ji užil k důkazu, že Mersennovo číslo $2^{127} - 1$ je prvočíslo; jde o největší prvočíslo objevené bez pomoci počítače. Lucas se však také věnoval rekreační matematice, je např. autorem dobře známé hry *Hanojská věž*, která pochází z roku 1883.

1. Vzorce

Během uplynulých více než 790 let od vydání knihy *Liber abaci*, v níž se Fibonacciova posloupnost poprvé vyskytla, bylo objeveno velké množství vzorců, v nichž vystupují Fibonacciova čísla F_n.

Z hlediska nalezení součtů některých řad obsahujících Fibonacciova čísla budeme potřebovat pouze některé vztahy, na jejichž odvození se nyní zaměříme. Číslo $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ je užíváno v umění a architektuře pro označení poměru stran ideálního obdélníku a nazýváno ***konstanta zlatého řezu***. Položíme-li $\beta = 1 - \alpha = (1 - \sqrt{5})/2$, snadno ověříme, že platí

$$\alpha - \beta = \sqrt{5}\,, \quad \alpha\beta = -1\,, \quad |\beta/\alpha| = |\alpha - 2| < 1\,. \tag{2}$$

Je-li dána posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, nazývá se funkce

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,. \tag{3}$$

její *vytvořující funkcí.* Vytvořující funkce jsou velmi užitečné např. pro odvozování vzorců pro n-tý člen posloupností, které jsou určeny rekurentně. Není bez zajímavosti, že pro tyto účely je konvergence řady v (3) nepodstatná. Pěknou ukázku užití vytvořující funkce, ač mocninná řada v (3) je pro všechna $x \in \mathbb{R}$ divergentní, bohužel však příliš rozsáhlou pro tento příspěvek, lze nalézt např. v [Gr], str. 346–348.

Tzv. Binetovu formuli pro Fibonacciova čísla odvodil patrně jako první ABRAHAM DE MOIVRE (1667–1754) již v r. 1718, a to právě metodou vytvořujících funkcí; viz [Mo]. Jeho způsob odvození si ukážeme v moderním označení a to pro posloupnost $\{c_n\}$ splňující (1) s libovolnými c_0, c_1; jejich volbou dostaneme každou posloupnost vyhovující rekurenci (1). Členy těchto posloupností se někdy nazývají *zobecněná Fibonacciova čísla.*

Vytvořující funkcí pro $\{c_n\}$ je funkce

$$\mathcal{C}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \,.$$

Konvergence řady vpravo pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (dokonce $x \in \mathbb{C}$), pro něž platí $|x| < 1/\alpha$, je např. důsledkem níže odvozeného vztahu (5); proto jsou pro všechna taková x následující úpravy korektní:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x) - x\mathcal{C}(x) - x^2\mathcal{C}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = \\ &= c_0 + c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n - c_0 x - \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = \\ &= c_0 + (c_1 - c_0)x + \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2} - c_{n+1} - c_n) x^{n+2} \,.\end{aligned}$$

Odtud dostáváme $\mathcal{C}(x)(1-x-x^2) = c_0 + (c_1 - c_0)x$, protože všechny koeficienty u x^{n+2} jsou pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$, vzhledem k (1), nulové. Tedy

$$\mathcal{C}(x) = \frac{c_0 + (c_1 - c_0)x}{1 - x - x^2} .$$

Protože $(1-\alpha x)(1-\beta x) = 1 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta x^2$, je s ohledem na (2)

$$1 - x - x^2 = (1-\alpha x)(1-\beta x) .$$

Určíme $A, B \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo pro $1 - x - x^2 \neq 0$

$$\frac{c_0 + (c_1 - c_0)x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1-\beta x} ,$$

a tedy již pro všechna $x \in \mathbb{R}$

$$c_0 + (c_1 - c_0)x = A(1-\beta x) + B(1-\alpha x) .$$

Dosazením $x = 1/\alpha$ a $x = 1/\beta$ dostaneme po úpravě

$$A = \frac{c_1 - c_0\beta}{\alpha - \beta} = \frac{c_1 - c_0\beta}{\sqrt{5}} , \qquad B = \frac{c_0\alpha - c_1}{\alpha - \beta} = \frac{c_0\alpha - c_1}{\sqrt{5}} ,$$

takže

$$\mathcal{C}(x) = \frac{c_1 - c_0\beta}{\sqrt{5}} \frac{1}{1-\alpha x} - \frac{c_1 - c_0\alpha}{\sqrt{5}} \frac{1}{1-\beta x} .$$

Ze vzorce pro součet geometrické řady dostaneme

$$\frac{1}{1-\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha x)^n \quad \text{a} \quad \frac{1}{1-\beta x} = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta x)^n .$$

První rovnost platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro něž je $|\alpha x| < 1$, tj. $|x| < 1/\alpha$, druhá pro $|x| < 1/\beta$; obě současně pak pro $|x| < 1/\alpha$, protože $\alpha > \beta$ a tedy $1/\alpha < 1/\beta$. Pro tato x tedy platí rovnost

$$\mathcal{C}(x) = \frac{c_1 - c_0\beta}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n - \frac{c_1 - c_0\alpha}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c_1 - c_0\beta}{\sqrt{5}} \alpha^n - \frac{c_1 - c_0\alpha}{\sqrt{5}} \beta^n \right) x^n .$$

Využijeme-li toho, že Taylorova řada funkce C je jednoznačně určena (to na úrovni střední školy musíme žákům říci bez důkazu), dostaneme předpis pro n–tý člen posloupnosti c_n

$$c_n = \frac{c_1 - c_0\beta}{\sqrt{5}}\alpha^n - \frac{c_1 - c_0\alpha}{\sqrt{5}}\beta^n . \tag{4}$$

Volbou $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ získáváme Binetovu formuli

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$$

a podobně volbou $c_0 = 2$, $c_1 = 1$ obdržíme vzorec pro L_n

$$L_n = \alpha^n + \beta^n .$$

Je jistě překvapivé, že se ve vztazích pro n–tý člen posloupností s tak jednoduchým rekurentním předpisem vyskytuje iracionální číslo $\sqrt{5}$.

Dalším ze vzorců, které budeme potřebovat, je tzv. *Cassiniova identita*

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \ , n \in \mathbb{N} .$$

Jde o jeden z nejstarších vztahů mezi Fibonacciovými čísly. Nalezl jej v roce 1680 francouzský astronom GIOVANNI DOMENICO CASSINI (1625–1712).

Dokážeme ji matematickou indukcí vzhledem k n. Je zřejmé, že identita platí pro $n = 1$. Předpokládejme tedy, že identita je dokázána pro nějaké $n = m$. Pak platí i pro $n = m + 1$, neboť

$$\begin{aligned} F_{m+2}F_m - F_{m+1}^2 &= F_{m+2}F_m - F_{m+1}(F_m + F_{m-1}) = \\ &= F_{m+2}F_m - F_{m+1}F_m - F_{m+1}F_{m-1} = \\ &= F_m(F_{m+2} - F_{m+1}) - F_{m+1}F_{m-1} = \\ &= F_m^2 - F_{m+1}F_{m-1} = -(-1)^m = (-1)^{m+1} . \end{aligned}$$

Tím jsme provedli druhý krok matematické indukce a tedy identita platí pro každé přirozené číslo n.

K dalším zajímavým vzorcům patří vztah mezi zobecněnými Fibonacciovými čísly c_n (platí tedy samozřejmě i pro F_n a L_n) a konstantou zlatého řezu α; při odvození užíváme (2) a (4):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(c_1 - c_0\beta)\alpha^{n+1} - (c_1 - c_0\alpha)\beta^{n+1}}{(c_1 - c_0\beta)\alpha^n - (c_1 - c_0\alpha)\beta^n} = \tag{5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(c_1 - c_0\beta)\alpha - (c_1 - c_0\alpha)\beta(\beta/\alpha)^n}{(c_1 - c_0\beta) - (c_1 - c_0\alpha)(\beta/\alpha)^n} = \alpha\,.$$

Pro zjednodušení úvah je užitečné uvažovat Fibonacciova čísla i pro záporná celá čísla n. Můžeme je pomocí (1) následovně vypočítat:

$$F_{-1} = F_1 - F_0 = 1, \quad F_{-2} = F_0 - F_{-1} = -1, \ \dots\ ,$$

a tedy

n	$\cdots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
F_n	$\cdots$	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	$\cdots$

Porovnání hodnot v tabulce vede k hypotéze, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n\,, \tag{6}$$

což dokážeme opět matematickou indukcí. Je zřejmé, že vztah (6) platí pro $n = 1$ a $n = 2$. Předpokládejme tedy platnost pro $n = k$ a $n = k + 1$, což znamená, že platí

$$F_{-k} = (-1)^{k+1} F_k \quad \text{a} \quad F_{-(k+1)} = (-1)^{k+2} F_{k+1}\,.$$

Pak platí i pro $n = k + 2$, neboť

$$F_{-(k+2)} = F_{-k} - F_{-(k+1)} = (-1)^{k+1} F_k - (-1)^{k+2} F_{k+1} =$$
$$= (-1)^{k+1}(F_k + F_{k+1}) = (-1)^{k+3} F_{k+2}\,,$$

a tedy je vztah (6) na základě indukce dokázán.

Jednou z obecných identit, v níž se objevují Fibonacciova čísla, je následující vzorec, který platí pro všechna $m \in \mathbb{Z}$ a všechna $n \in$ $\in \mathbb{N}_0$

$$F_{n+m} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1} \,. \tag{7}$$

Speciální volbou n či m je možno získat mnoho dalších zajímavých vztahů.

Lze snadno ověřit, že (7) platí pro $n = 0$ a $n = 1$. Předpokládejme tedy platnost pro $n = k$ a $n = k + 1$, neboli, že platí

$$F_{m+k} = F_{m-1}F_k + F_m F_{k+1} \text{ a } F_{m+k+1} = F_{m-1}F_{k+1} + F_m F_{k+2} \,.$$

Pak platí i pro $n = k + 2$, neboť

$$\begin{aligned} F_{m+k+2} &= F_{m+k+1} + F_{m+k} = \\ &= (F_{m-1}F_k + F_m F_{k+1}) + (F_{m-1}F_{k+1} + F_m F_{k+2}) = \\ &= F_{m-1}(F_k + F_{k+1}) + F_m(F_{k+1} + F_{k+2}) = \\ &= F_{m-1}F_{k+2} + F_m F_{k+3} \,, \end{aligned}$$

a tedy vzorec (7) je matematickou indukcí dokázán.

Dosazením $-m$ namísto m v (7) získáme

$$F_{n-m} = F_{-(m+1)}F_n + F_{-m}F_{n+1} \,,$$

což na základě (6) lze upravit takto

$$\begin{aligned} F_{n-m} &= (-1)^{m+2}F_{m+1}F_n + (-1)^{m+1}F_m F_{n+1} = \\ &= (-1)^m (F_{m+1}F_n - F_m F_{n+1}) \,. \end{aligned}$$

Pro sudé m pak je

$$F_{n-m} = F_{m+1}F_n - F_m F_{n+1} \,. \tag{8}$$

2. Fibonacciova čísla a řady

Nyní si ukážeme určení součtu některých řad. Půjde vesměs o řady, které lze na základě některého vhodně upraveného vztahu mezi Fibonacciovými čísly vyjádřit jako tzv. *teleskopické řady.*

Nejprve odvodíme, že pro součet řady $\sum_{k=0}^{\infty} 1/F_{2^k}$ platí (srv. [Go])

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1/F_{2^k} = 4 - \alpha \, .$$

Ze vztahu (8) získáme dosazením $n = 2m$, stále uvažujeme m sudé,

$$F_m = F_{m+1}F_{2m} - F_m F_{2m+1} \, ,$$

odkud po vydělení $F_m F_{2m}$ dostaneme

$$\frac{1}{F_{2m}} = \frac{F_{m+1}}{F_m} - \frac{F_{2m+1}}{F_{2m}} \, . \tag{9}$$

Pro částečný součet této řady na základě (9) platí

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{2^k}} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_4} + \frac{1}{F_8} + \cdots + \frac{1}{F_{2^n}} =$$
$$= 1 + 1 + \left(\frac{F_3}{F_2} - \frac{F_5}{F_4}\right) + \left(\frac{F_5}{F_4} - \frac{F_9}{F_8}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{F_{2^{n-1}+1}}{F_{2^{n-1}}} - \frac{F_{2^n+1}}{F_{2^n}}\right) = 4 - \frac{F_{2^n+1}}{F_{2^n}} \, .$$

Odtud s ohledem na vzorec (5) vyplývá

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1/F_{2^k} = 4 - \alpha \, .$$

Pro odvození součtu řady $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k/(F_{k-1}F_k)$ užijeme Cassiniovu identitu, srv. [Va], str. 183,

$$F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2 = (-1)^k \, ,$$

z níž po vydělení $F_{k-1}F_k$ dostaneme pro $k \in \{2, 3, 4, \ldots\}$

$$\frac{F_{k+1}}{F_k} - \frac{F_k}{F_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{F_{k-1}F_k} \, .$$

Pro částečný součet této řady na základě předchozího vztahu platí

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{F_{k-1}F_k} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{F_{k+1}}{F_k} - \frac{F_k}{F_{k-1}} \right) =$$
$$= \left(\frac{F_3}{F_2} - \frac{F_2}{F_1} \right) + \left(\frac{F_4}{F_3} - \frac{F_3}{F_2} \right) + \cdots + \left(\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_n}{F_{n-1}} \right) =$$
$$= \frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_2}{F_1} = \frac{F_{n+1}}{F_n} - 1 \, .$$

Odkud limitním přechodem pro $n \to \infty$, vzhledem k (5), vyplývá

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{F_{k-1}F_k} = \alpha - 1 = -\beta \, .$$

Podobně lze na základě upravené Cassiniovy identity a součtového vzorce pro funkci arctg určit, že pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(1/F_{2k+1})$ platí, srv. [Va], str. 37,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{F_{2k+1}} = \frac{\pi}{4} \, . \tag{10}$$

Na základě vztahů mezi cyklometrickými funkcemi ze vztahu (10) můžeme získat i další analogické vztahy, přímé odvození prvního z nich lze nalézt např. v [Ca], jako např.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arccotg} F_{2k+1} = \frac{\pi}{4} \, , \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{2 + F_{2k}F_{2k+2}}} = \frac{\pi}{4} \, .$$

Je dobře známo, že harmonická řada $\sum 1/n$ je divergentní. Řady z ní „vybrané“ mohou být divergentní i konvergentní. Např. řada převrácených hodnot všech prvočísel je divergentní[1], ale řada $\sum 1/n^2$ je konvergentní, což lze snadno dokázat např.

[1] Důkaz divergence této řady je uveden např. ve [Vel], str. 153.

na základě srovnání s řadou $\sum 1/(n(n+1))$. To nás motivuje ke zkoumání řady $\sum_{n=1}^{\infty} 1/F_n$. Nutná podmínka pro konvergenci je zřejmě splněna a snadno nahlédneme, že řada s ohledem na vztah (5) podle podílového kritéria konverguje; konvergenci však lze dokázat i bez užití vztahu (5).

Modifikací rekurence (1) zavedeme následující dvě posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$a_{n+1} = a_n + a_n = 2a_n, \quad a_1 = 1,\ a_2 = 2$$

a

$$b_{n+1} = b_{n-1} + b_{n-1} = 2b_{n-1}, \quad b_1 = 1,\ b_2 = 1\,.$$

Vzhledem k jejich konstrukci a zřejmému faktu, že posloupnost $\{F_n\}$ je neklesající, platí pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$b_n \leq F_n \leq a_n\,.$$

Posloupnost $\{a_n\}$ je geometrická posloupnost s kvocientem $q = 2$, tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = 2^{n-1}$. Předpis pro n-tý člen posloupnosti $\{b_n\}$ můžeme určit následující úvahou. Jelikož $b_1 = 1$, musí, vzhledem k $b_{n+1} = 2b_{n-1}$, tvořit liché členy b_{2n-1} geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 2$, tedy $b_{2n-1} = 2^{n-1}$. Zcela analogicky však i pro sudé členy b_{2n} platí $b_{2n} = 2^{n-1}$. Tedy můžeme předpis této posloupnosti pro každé $n \in \mathbb{N}$ vyjádřit s pomocí funkce celé části $[\,\cdot\,]$ takto:

$$b_n = 2^{[(n+1)/2]-1}\,.$$

Platí proto pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$2^{[(n+1)/2]-1} \leq F_n \leq 2^{n-1}\,,$$

neboli

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{[(n+1)/2]-1} \geq \frac{1}{F_n} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\,. \tag{11}$$

Odtud též na základě srovnávacího kritéria pro číselné řady vyplývá, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/F_n$ konverguje. Ze vztahu (11) dostáváme i tuto hrubou podmínku pro její součet:

$$2 \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n} \le 4\,,$$

neboť

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n} = 2 \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-[(n+1)/2]} = 2\sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n} = 4\,.$$

Mnohem lepší odhad výsledku můžeme však získat takto: uvažujme aproximaci součtu řady $\sum_{n=1}^{\infty} 1/F_n$ na základě součtu jejích prvních m členů $\sum_{n=1}^{m} 1/F_n$. Chybu této aproximace můžeme odhadnout pomocí zbytku r_m této řady za m–tým členem:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \le r_m \le \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{[(n+1)/2]-1}\,. \tag{12}$$

Pro součet řady v (12) vlevo platí

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{m} = 2^{1-m}$$

a pro součet řady v (11) vpravo

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{[(n+1)/2]-1} = 4 - \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{[(n+1)/2]-1}\,. \tag{13}$$

Pro m sudé získáváme z (13)

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{1-[(n+1)/2]} = 4 - 2\sum_{n=1}^{m/2} 2^{1-n} =$$

$$= 4 - 4(1-(1/2)^{m/2}) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{m/2}$$

a pro m liché

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{[(n+1)/2]-1}=4-\left(2\sum_{n=1}^{(m-1)/2}2^{1-n}+2^{(1-m)/2}\right)=$$

$$=4-2(2(1-(1/2)^{(m-1)/2}))-2^{(1-m)/2}=3\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{m/2}.$$

Tedy pro libovolné $m\in\mathbb{N}$ získáme odhad

$$2^{1-m}\le r_m\le 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{m/2},$$

z něhož lze snadno získat tento formálně jednodušší tvar odhadu

$$|r_m|<5\left(\frac{1}{2}\right)^{m/2}.$$

Pomocí libovolného systému pro „počítačovou algebru“ tak můžeme získat aproximaci součtu řady s požadovanou přesností. Programem *Mathematica* tak při volbě $m=100$ získáváme následující aproximaci součtu řady $\sum 1/F_n$ přesnou na uvedených 14 desetinných míst:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_n}\doteq 3{,}3598856662431\,.$$

LITERATURA:

[Ca] Calda, E., *Kterak od jedné vlastnosti Fibonacciovy posloupnosti ku číslu π dospěti možno jest*, Matematika – Fyzika – Informatika **8** (1998), 202–204.

[Go] Good, I. J., *A reciprocal series of Fibonacci numbers*, Fibonacci Quarterly **12** (1974), 346.

[Gr] Graham, L. R., Knuth, D. E., Patashnik, O., *Concrete mathematics*, Addison–Wesley Publishing Company, 1994.

[Mo] Abraham de Moivre, *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, London, 1730.

[Va] Vajda, S., *Fibonacci and Lucas numbers and the golden section*, Holstel Press, 1989.

[Ve] Veselý, J., *Zlatý řez a co vše s ním souvisí*, Učitel matematiky **7** (1998), JČMF, 14–24.

[Ve1] Veselý, J., *O některých důležitých řadách*, obsaženo v: Člověk – Umění – Matematika (1996), Prometheus, Praha, 137–154.

[Vo] Vorobjev, N.N., *Fibonacciova čísla*, SNTL, Praha, 1954, přeložil Čech E.

★ ★ ★

Rebus

ČTVERÁK ŠTĚSTÍ

ČTVERÁK ŠTĚSTÍ

ČTVERÁK ŠTĚSTÍ

ČTVERÁK ŠTĚSTÍ

ČTVERÁK ŠTĚSTÍ

(Čím větší čtverák — tím větší štěstí)

Ze sbírky Jaroslava Seiferta *Na vlnách TSF*, 1925