Emil Calda

# O podivuhodném „odvození“ některých vzorců

*Učitel matematiky*, Vol. 8 (2000), No. 3, 149–151

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/150944

# O PODIVUHODNÉM „ODVOZENÍ" NĚKTERÝCH VZORCŮ

EMIL CALDA

*Poznatky nikdy nesdělujeme jen tak, ale blýskáme se jimi.*
(Pedagogická zásada č. 759)

Nejeden čtenář se jistě setkal se vzorcem

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} ,$$

který platí pro všechna přirozená čísla $n$ a všechna reálná čísla $x \neq 2k\pi$. Tento vzorec na střední (a patrně ani na jiné) škole k ničemu nepotřebujeme, ale jeho důkaz matematickou indukcí poskytuje zkušenému pedagogu řadu možností, jak se před studenty blýsknout nejen svými odbornými znalostmi, ale i důvtipem. Z tohoto důvodu a také v naději, že tím mnohému kolegovi ušetříme práci, si tento důkaz připomeneme.

Pro libovolné reálné číslo $x \neq 2k\pi$ a $n = 1$ tento vzorec platí, neboť

$$\sin x = \frac{\sin \frac{2}{2}x \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} .$$

Z předpokladu, že uvedený vztah platí pro libovolné reálné číslo $x \neq 2k\pi$ a libovolné přirozené číslo $n$, plyne:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin kx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sin kx + \sin(n+1)x = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} + \sin(n+1)x .$$

Pomocí vzorce pro $\sin 2x$ a jednoduchou úpravou dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \left(\sin \frac{n}{2}x + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{n+1}{2}x\right)$$

a užitím rovnosti

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \ sin(x+y)]$$

na druhý sčítanec v závorce dojdeme k závěru:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n+2}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} .$$

Podívejme se nyní na dokázaný vzorec z hlediska mírně patamatematického a odmysleme si na jeho pravé straně všechny symboly „sin". Vznikne tak výraz

$$\frac{\frac{1}{2}(n+1)x\frac{1}{2}nx}{\frac{1}{2}x} ,$$

který — jsa vyjádřen ve tvaru $\frac{1}{2}n(n+1)x$ — signalizuje, že jde o součet prvních $n$ členů aritmetické posloupnosti s prvním členem $x$ a diferencí také $x$:

$$x + 2x + 3x + \ldots + nx = \frac{1}{2}n(n+1)x .$$

Znamená to, že pro všechna reálná $x \neq 0$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} kx = \frac{\frac{n+1}{2}x \cdot \frac{n}{2}x}{\frac{x}{2}} .$$

Obrácením tohoto „postupu" dostáváme podivuhodný výsledek:

Abychom získali vzorec

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} ,$$

stačí do rovnosti

$$\sum_{k=1}^{n} kx = \frac{\frac{n+1}{2}x \cdot \frac{n}{2}x}{\frac{x}{2}} ,$$

která platí pro všechna reálná $x \neq 0$, „dosadit“ symboly „sin“ takto:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}\,, \qquad x \neq 2k\pi\,.$$

Je zajímavé, že podobným způsobem se dá „odvodit“ i vzorec

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}\,,$$

který platí pro všechna $x \neq k\pi$ a jehož důkaz si čtenář jistě provede sám.

Vyjdeme z toho, že pro všechna reálná $x$ platí

$$x + 3x + 5x + \ldots + (2n-1)x = \frac{1}{2}n \cdot 2nx = n^2x\,,$$

což znamená, že pro všechna reálná $x \neq 0$ platí také

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)x = \frac{nx \cdot nx}{x}\,.$$

„Dosazením“ symbolů „sin“ do této rovnosti dostaneme požadovaný vzorec, který platí pro všechna $x \neq k\pi$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}\,.$$

Očekává-li nyní čtenář, že tímto způsobem „odvodíme“ ještě vzorce

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{2\sin \frac{x}{2}}\,, \qquad x \neq 2k\pi\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}\,, \qquad x \neq k\pi\,,$$

bude asi zklamán. Patamatematická bádání[15] nepokročila v tomto směru ještě dostatečně daleko.

[15] Jde o intenzívní výzkum doc. PatDr. Emila Caldy. Pozn. redakce.