Učitel matematiky

Jiří Taufer
Nevěsta se závojem a pavouček

Učitel matematiky, Vol. 7 (1999), No. 3, 190–192

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151004

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1999

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

NEVĚSTA SE ZÁVOJEM A PAVOUČEK

JIŘÍ TAUFER

Nevěsta s dostatečně dlouhým závojem prochází nezápornou rychlostí dveřmi. Závoj je tak dlouhý, že ho nevěsta za sebou vleče. Je to takový závoj–vlečka. Když je nevěsta vzdálena kladný kousek od dveří, dveře se zabouchnou a přibouchnou závoj–vlečku. Nevěsta pokračuje konstantní rychlostí v chůzi a závoj se přitom rovnoměrně roztahuje. Nyní z opatrnosti vynecháváme ze slovního spojení závoj–vlečka slovo vlečka. Rovnoměrné roztahování znamená, že relativní prodloužení všech částí závoje za dveřmi za stejný časový úsek je stejné.

V době, kdy se dveře zabouchly, spadl se dveří na závoj pavouček a okamžitě se vydal kladnou konstantní rychlostí za nevěstou, aby jí přinesl štěstí. Běžel ovšem po roztahujícím se závoji se svojí konstantní rychlostí vzhledem k roztahujícímu se a tedy pohybujícímu se závoji. Máme zodpovědět otázku: *Dostihne pavouček hlavy nevěsty?* (*I když pavouček vzhledem k závoji běží pomalu a nevěsta jde velmi rychle?*)

Událost, při které se zabouchly dveře, budeme nazývat *Velkým třeskem*; od tohoto momentu začínáme měřit čas, který značíme písmenem t. Rychlost nevěsty a tedy hlavy nevěsty značíme symbolem v_H (index H je podle hlavy, našly by se však i jiné důležité body nevěsty, ale na hlavě má připevněn závoj, navíc to bude ve shodě s označením, které bude zavedeno). Orientace soustavy souřadné je taková, že $v_H \geq 0$. Vzdálenost nevěsty v čase $t = 0$ od počátku (od dveří) je H. Předpokládáme, že $H > 0$. Závoj se rovnoměrně roztahuje, to znamená, že půlka zůstává půlkou, čtvrtina čtvrtinou atd., a toto platí pro každou část závoje. Z toho plyne, že každý bod závoje se pohybuje konstantní rychlostí $v_{x_0} = \frac{x_0}{H} v_H$, kde x_0 je vzdálenost příslušného bodu závoje od počátku v čase $t = 0$. Všimněte si vtipnosti našeho označení pro $x_0 = H$. Pohyb každého bodu závoje je popsán rovnicí

$$x_{x_0}(t) = x_0 + \frac{x_0}{H} v_H t\,, \qquad (\,x_0 = x_{x_0}(0)\,).$$

Hodnota $x_{x_0}(t)$ představuje vzdálenost bodu závoje od počátku v čase t, který v době Velkého třesku byl vzdálen od dveří x_0.

Pavouček se pohybuje kladnou rychlostí $\varepsilon > 0$ vzhledem k závoji; kdyby nebyl na závoji, ale na podlaze, pohyboval by se po podlaze rychlostí ε. Protože je pavouček na závoji, pohybuje se rychlostí závoje v místě, kde se nachází, zvětšenou o ε. Nechť $y(t)$ je trajektorie pavoučka vzhledem ke dveřím. Pak

$$\dot{y}(t) = \dot{x}_{\tilde{x}}(t) + \varepsilon, \quad \text{kde } \tilde{x} \text{ je takové, že} \quad y(t) = x_{\tilde{x}}(t).$$

Nejdříve vypočteme $\tilde{x}$ pomocí $y(t)$.

$$y(t) = x_{\tilde{x}}(t) = \tilde{x} + \frac{\tilde{x}}{H} v_H t \;\Rightarrow$$

$$\tilde{x} = \frac{y(t)}{1 + \frac{v_H t}{H}}\,.$$

Rychlost závoje v místě, kde je pavouček, je tedy rovna

$$\dot{x}_{\tilde{x}}(t) = v_{\tilde{x}} = \frac{y(t)}{H + v_H t} v_H\,.$$

Pro rychlost pavoučka $\dot{y}(t)$ dostáváme:

$$\dot{y}(t) = \frac{y(t)}{H + v_H t} v_H + \varepsilon\,.$$

Dostali jsme obyčejnou lineární diferenciální rovnici prvního řádu pro trajektorii pavoučka. Nyní stačí najít její řešení, které splňuje počáteční podmínku $y(0) = 0$. Laskavý čtenář si odvodí, línější se pouze dosazením přesvědčí, že řešení naší rovnice je:

$$y(t) = \varepsilon t (1 + \frac{v_H}{H} t) \frac{\ln(1 + \frac{v_H t}{H})}{\frac{v_H t}{H}}\,,$$

kde poslední velký zlomek dodefinujeme jedničkou pro $v_H t = 0$, takže nám to funguje i pro případ, že nevěsta stojí tj. pro $v_H = 0$. Jestliže v čase t^* pavouček dostihne hlavy nevěsty, pak nutně $y(t^*) = x_H(t^*)$. Výpočet proveďme pro složitější případ. Předpokládejme, že $v_H \neq 0$. Potom můžeme psát:

$$y(t) = \frac{\varepsilon}{v_H}(H + v_H t)\ln(1 + \frac{v_H t}{H}) .$$

Použitím posledního vztahu přepišme rovnici $y(t^*) = x_H(t^*)$ ve tvaru

$$\frac{\varepsilon}{v_H}(H + v_H t^*)\ln(1 + \frac{v_H t^*}{H}) = H + v_H t^* ,$$

což po úpravě dává

$$t^* = \frac{H}{v_H}(e^{\frac{v_H}{\varepsilon}} - 1) \quad \text{pro} \quad v_H \neq 0 .$$

Snadno zjistíme, že

$$t^* = \frac{H}{\varepsilon} \quad \text{pro} \quad v_H = 0 .$$

Pavouček dorazí k hlavě nevěsty v čase

$$t^* = \frac{H}{\varepsilon}\frac{e^{\frac{v_H}{\varepsilon}} - 1}{\frac{v_H}{\varepsilon}} ,$$

kde poslední zlomek dodefinujeme jedničkou pro $v_H = 0$.

Poznámka

Autor se s touto úlohou seznámil v hospodě *U Kolbenky*, kde mu ji zadali jeho přátelé, kteří ji nejspíše získali také v nějaké restauraci; žádnou citaci práce, která se podobným problémem zabývá, však neuvedli. Později se autorovi podařilo zjistit, že jde o velmi známou úlohu. Ve starších publikovaných verzích hraje úlohu nevěsty červ, který se prožírá rozpínajícím se prostředím.[1]

[1] Zajímavou variantou by byla úloha o hostu, který se prožírá stále se zvětšujícím jídelním lístkem, navíc nekonstantní rychlostí, neboť se současně ožírá. Pozn. B. H.

Uvedené řešení pochází z již zmíněné hospody *U Kolbenky*. Je originální, úloha je půvabná, nevěsta je krásná, je to *krása se závojem*.[2] Použité označení je promyšlené a úsporné; při vědecké práci v hospodě je to samozřejmostí, neboť na pivní tácky, příp. účtenky se zapisují jen ty nejpodstatnější věci.

---

[2] *Krása bez závoje* byl název pořadu, ve kterém byl v krizovém roce 1968 první striptýz v socialistickém Československu. Pozn. autora.

Učitel matematiky uveřejňuje články zaslané vedoucímu nebo výkonnému redaktorovi.
O otištění rozhodne redakční rada.

Vychází čtyřikrát ročně.

Časopis **Učitel matematiky** lze zakoupit **v Praze** v Oddělení historie matematiky MFF UK, Sokolovská 83 a **v Brně** v knihovně matematické sekce Přírodovědecké fakulty MU, Janáčkovo nám. 2a.

Časopis vychází za podpory Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR (Projekt PG 97280)

V tomto čísle jsou použity kresby z publikace I. Volfa a P. Špíny *Kalendář matematiků* a z knihy Jaroslava Žáka *Študáci a kantoři*.