Jura Charvát

Dříve P, dnes K?

Učitel matematiky, Vol. 6 (1998), No. 3, 187–190

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151343

DŘÍVE P, DNES K?

poznámka k vývoji výuky matematiky na SŠ

JURA CHARVÁT

Třicet let jako učitel matematiky na Stavební fakultě ČVUT v Praze přicházím do styku s absolventy středních škol. Třicet let se u nich setkávám s různými, často se opakujícími chybnými návyky. Třicet let vnímám v čase poněkud se měnící vztah studentů k matematice a jejich představu o tom, co to matematika vlastně je. Třicet let na studentech pozoruji permanentně probíhající školskou reformu, zejména reformu výuky matematiky na základních a středních školách. Přestože jako pedagog jsem pouhý samouk, myslím si, že některé mé zkušenosti a postřehy by mohly čtenáře tohoto časopisu zajímat.

Studenti často řešení rovnice, nerovnice, soustavy začínají stanovením jejího „definičního oboru" a automaticky zakončují zápisem

$$\mathsf{K} = \{1,3\}, \quad \mathsf{K} = (2,+\infty), \quad \mathsf{K} = \emptyset$$

(dokonce i $\mathsf{K} = \{\emptyset\}$, $\mathsf{K} = \{(2,+\infty)\}$?!) apod. Dříve byli zvyklí psát

$$\mathsf{P} = \{1,3\}, \quad \mathsf{P} = (2,+\infty), \quad \mathsf{P} = \emptyset, \quad \dots$$

Když se jich zeptám, co tím zápisem myslí, kde se vzalo ono písmeno K (P), proč neřekli, co se rozhodli tímto písmenem označit, většinou neumějí odpovědět. Argumentují tím, že se to tak na střední škole učili. Výjimečně student odpoví, že K je množina všech kořenů (P obor pravdivosti) uvažované rovnice, nerovnice, soustavy.

Pokusím se rekonstruovat vznik a vývoj zápisů uvedeného typu.

Bylo období, v němž se matematika na SŠ učila tak, že rovnice a nerovnice byly chápány jako výrokové formy jedné proměnné a jejich soustavy jako výrokové formy více proměnných. Byla to tedy zobrazení a jako taková měla své definiční obory — množiny všech prvků jisté „základní množiny", jejichž dosazením do příslušné rovnice, ... vznikly výroky (ať už pravdivé, nebo nepravdivé). Mělo smysl mluvit o oborech pravdivosti rovnic, ... — vždy šlo o množinu všech prvků z definičního oboru, jejichž dosazením vznikly pravdivé výroky. Množinu všech řešení mělo tedy smysl nazývat oborem pravdivosti rovnice, nerovnice, soustavy. Vše bylo správně, i když na můj vkus příliš formalizovaně. Onen formalismus šel až tak daleko, že řešení každé rovnice, nerovnice, soustavy končilo zápisem: $\mathsf{P} = \ldots$

Studenti se naučili, že na závěr **musí** (?) vždy napsat $\mathsf{P} = \ldots$ Používaná terminologie a používané zápisy byly (v podstatě) dobře. Tím „v podstatě" myslím to, že každý znak, který je použit, by měl být zaveden. Když se psalo P, aniž se řeklo, že P znamená obor pravdivosti, nebo dokonce P_α (pokud šlo o rovnici apod. s parametrem α), aniž bylo uvedeno, co se tím P_α značí, úplně v pořádku to nebylo.

Souhlasím s tím, že je vhodné, když se dnes od popisovaného formalismu upouští.

Často však dochází k tomu, že tento **ústup od formalismu je pouze formální** — místo P se píše K (nazývané množinou všech kořenů). Chápu, že pro toho, kdo byl zvyklý psát vždy $\mathsf{P} = \ldots$, to je jednoduché a pohodlné. Bylo by však třeba jít na věc úplně z jiné strany, nikoliv cestou nejmenšího odporu, kdy se vyjadřujeme opět navyklým způsobem, který byl sice dříve dost formální, ale správný, zatímco dnes je zcela špatně.

Zhruba řečeno, je to asi takto:

Dřívější přístup:

rovnice ... (chápaná jako výroková forma, tj. zobrazení) $\longrightarrow$
$\longrightarrow$ definiční obor rovnice $\longrightarrow$
$\longrightarrow$ obor pravdivosti P

Nyní je nahrazen přístupem:

rovnice ... (chápaná jako co?) $\longrightarrow$
$\longrightarrow$ definiční obor rovnice $\longrightarrow$
$\longrightarrow$ množina všech kořenů K

Co dnes znamená **definiční obor** rovnice?

V *Názvech a značkách školské matematiky* (SPN, 1988) jsem našel pouze definiční obor zobrazení, speciálně definiční obor funkce. O definičních oborech ničeho jiného tam není ani zmínka. Nic jiného jsem neočekával, pouze jsem se utvrdil v tom, že já sám pojem definiční obor chápu správně. Tedy rovnice se dnes pravděpodobně opět chápe jako jakési zobrazení, aniž se to otevřeně přizná. Jako jaké zobrazení? Nenapadá mě nic jiného, než že rovnice je chápaná jako výroková forma (ovšem zamlčeně).

Když už se od výrokových forem upouští, nechť se od nich upustí doopravdy. Nechť se tedy neříká „definiční obor rovnice“, nechť se mluví např. o „množině všech $x \in \mathsf{R}$, pro něž všechny výrazy, které se v rovnici vyskytují, mají smysl (jsou definovány)“.

Ještě **důraznější námitky mám proti písmenu** K, které dnes nahradilo písmeno P.

Co se mi dříve na formálním přístupu k věci zdálo být „nejzrůdnější“, bylo ukončení **každého** řešení rovnice apod. zápisem $\mathsf{P} = \dots$ Studenta to utvrzovalo v dojmu, že matematika je cosi, co se vymyká normálnímu „selskému“ rozumu, co bazíruje na formalismu a nedovoluje vyjadřovat se sice správně a přesně, ale po svém. Na tom se pouhým nahrazením písmene P písmenem K nic nezměnilo.

Navíc, zatímco zápis $\mathsf{P} = \dots$ bylo možné vysvětlit a zdůvodnit, zápis $\mathsf{K} = \dots$ vysvětlíme a zdůvodníme jen stěží.

Symbol K je vysvětlován tak, že jde o *množinu všech kořenů*. Přitom se používá nejen pro rovnice, ale rovněž pro nerovnice, soustavy rovnic apod. Ptal jsem se mnoha kolegů, zda by připustili, aby se uspořádané trojici říkalo „kořen soustavy rovnic o třech neznámých“, nebo třeba číslu 8 „kořen nerovnice $x > 0$“. Nikdo z nich ani jedno z toho nepřipouští. Ani v *Názvech a značkách* jsem nic takového nenašel (tři řádky o nerovnicích na str. 28 jsou tam naprosto nekonkrétní).

Název **kořen** má svůj původ u polynomů. S tím souvisí název „kořen algebraické rovnice n-tého stupně“ (např. kvadratické rovnice). Už třeba pro rovnici $\sin x = 0$ nazývat její řešení jejími kořeny se mi nelíbí, ale nešť — dělá se to. A co třeba rovnice

$x = |x|$? U ní bych o kořenech v žádném případě nemluvil. Přenášet název „kořen" na nerovnice, nebo dokonce soustavy rovnic a nerovnic, je (diplomaticky řečeno) velmi odvážné.

Obávám se, že mnozí z těch, kdo učí studenty řešení rovnic, nerovnic, soustav zakončovat zápisem $\mathsf{K} = \ldots$, si ani neuvědomují, jakou terminologii vlastně zavádějí. Kdybychom přece jen u často používaného formalismu chtěli zůstat, bylo by nutné symbol K zavést nikoliv jako množinu všech **kořenů**, ale jako množinu všech **řešení**. Pak se však vtírá otázka, proč zrovna písmeno K?

Velmi doporučuji řešení rovnice, nerovnice, ... nezakončovat formálním a diskutabilním zápisem

$$\mathsf{K} = \{1, 3\}, \quad \mathsf{K} = (2, +\infty), \quad \mathsf{K} = \emptyset,$$

ale jasným a srozumitelným konstatováním:

— Daná rovnice má dva kořeny $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

— Řešeními dané nerovnice jsou všechna $x \in (2, +\infty)$.
Množinou všech řešení dané nerovnice je interval $(2, +\infty)$.

— Daná rovnice (nerovnice) nemá žádné řešení.

Závěrečná poznámka.

Zajímalo mě, v jakých souvislostech se v historii matematiky objevovalo slovo *kořen*. Ze třístránkové „zprávy o výletu ke kořenům", který na mé přání podnikla kolegyně *Alena Šolcová*, vyjímám:

Slovo *kořen* (*radix*, *root*, *racine*) se vyskytuje v historii matematiky ve třech různých významech:

1. *Kořen* je číselná hodnota, která nahrazuje neznámou v dané algebraické rovnici a zajišťuje rovnost pravé a levé strany rovnice.
   Použití výrazu *kořen* v tomto smyslu se objevuje v 16. století. Autoři jako *Luca Pacioli* (poč. 16. stol.) uvažují o neznámé v algebraické rovnici jako o *radix* (latinsky kořen), nebo *res* (latinsky věc), nebo *cosa* (italsky věc), nebo *Coss* (německy věc). *Cardano* v *Ars magna* nazývá neznámou *rem ignotam* (věc neznámá). *Cardano* a *Ferrari*, Cardanův žák, pak uvažují o *pomyslných* (imaginárních) *kořenech.*
2. *Kořen* je číselná hodnota, z níž umocněním dostaneme dané číslo. Např. 2 je čtvrtý kořen 16. (Existují ještě další čtvrté kořeny 16: -2, $2i$, $-2i$.)
   Rafaelo Bombelli z Bologni se věnuje odmocňování řetězových zlomků a pro odmocninu používá název *radix universalis* — kolem r. 1472.
3. *Kořen kongruence* je celé číslo a, které splňuje danou kongruenci — *C. F. Gauss.*

Stačí vám to? Tím dneska končím.