

Učitel matematiky

František Kuřina

Učíme v matematice myslet?

Učitel matematiky, Vol. 5 (1997), No. 3, 168–179

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/151391>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1997

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

UČÍME V MATEMATICE MYSLET?

FRANTIŠEK KUŘINA

Tento článek je upravenou verzí referátu, který jsem přednesl 7. 11. 1996 na 6. semináři o vyučování matematice na nižších gymnáziích v Pardubicích. Problematikou kultivace myšlení ve vyučování matematice se zabýváme v souvislosti s řešením grantu 406/96/1186 *Matematické vzdělávání 5-15letých žáků* na didaktickém semináři katedry matematiky Vysoké školy pedagogické v Hradci Králové a na didaktickém semináři prof. M. Hejného na Pedagogické fakultě UK v Praze.

Ke studiu zmíněné problematiky jsem byl doveden dvěma podněty. Prvním byl dosti formální přístup k vyučování matematice na některých našich školách, druhým byla otázka, kterou položil známý americký matematik maďarského původu G. Polya Čtvrtému mezinárodnímu kongresu o vyučování matematice ICME IV, který se konal v roce 1982 ve Spojených státech [1]:

Co může dělat učitel, aby vyučování matematice rozvíjelo myšlení žáků?

Cílem tohoto příspěvku je všimnout si poněkud podrobněji této problematiky, která je podle mého názoru i dnes aktuální.

O myšlení

Pokusme se nejdříve přiblížit pojem myšlení, aniž bychom se snažili dojít k nějaké jeho formální charakteristice.

Rád bych při této příležitosti uvedl jednu příhodu a citoval několik autorit.

Na jaře 1967 jsem šel v Hradci Králové po ulici, když jsem zaslechl výrazný příkaz: *Kuřino, mysl!*. Toto napomenutí neplatilo mé matematické činnosti, ale pokusům mého syna, který se na sousedním hřišti neúspěšně pokoušel o produktivní fotbal. Ze syna se fotbalista nestal, snad neuměl fotbalově myslet

Albert Einstein prý kdysi napsal [2]:

Někdy se ptám sám sebe, jak se mohlo stát, že právě já jsem vymyslel teorii relativity. Důvod je myslím v tom, že normální

mládenec se nikdy nezatěžuje přemýšlením o problémech prostoru a času. Na takové věci si udělal názor už jako dítě. Můj intelektuální vývoj byl zpožděný, což způsobilo, že jsem se začal trápit prostorem a časem, až když jsem dospíval.

Známa spisovatelka B. Kaufmanová charakterizuje americké studenty slovy:

Děsí mě na nich, jak bez otázek přijímají všechno, co se ze stupínku učí; což nijak neznamená, že by se nebouřili proti autoritám: bouří se to ano, a hlasitě. Ale vůbec je nenapadne, že by mohli také myslet. V našich školách se odměňuje konformita a mlčení. Entuziasmus je přijímán s nelibostí, neboť se dá očekávat, že bude hlučný.

Nemohu srovnávat naše školství se školstvím americkým, ale odhadl bych, že úroveň přizpůsobení se je u nás větší než ve Spojených státech.

Ruský akademik P. L. Kapica píše:

Nejhorší jsou lidé, kteří příliš mnoho pracují a příliš málo myslí.

Tato formulace je jistě poněkud nadnesená, přistoupíme-li však na polaritu práce a myšlení, je zřejmé, že naše škola zdůrazňuje spíše první než druhou činnost.

Další stránku myšlení připomíná v půvabné poznámce spisovatel I. Klíma [3]:

Tuhle v podstatě anekdotu jsem viděl před mnoha lety předvést Jana Wericha. Hrál nemocného, který přišel k lékaři. Lékař ho vyšetřil a nabídl mu zázračné kapky. Stačí je nakapat na lžici, řekl, spolknout před spaním a zdraví se vrátí. Lék má však jednu zvláštnost. Působí pouze pod podmínkou, že ve chvíli, kdy se polyká, nesmí člověk myslet na bobra.

Na bobra?

Na bobra!

Ale to je přece, cha, cha, slyším dodnes nezapomenutelný Werichův smích, to je přece samozřejmé, proč bych měl myslet na bobra? Nikdy na něj nemyslím.

Vzal kapky a spokojeně odkráčel od lékaře. Následovala velkolepá herecká etuda. Werich si z lahvičky nakapal na lžici, najednou

znejistěl. Myslel na bobra. Odložil lžičku, chodil po scéně, uklidňoval se. Stále nové pokusy. Donesl lžiči až k ústům. Marně. Lék s takovou podmínkou se nedá spolknout.

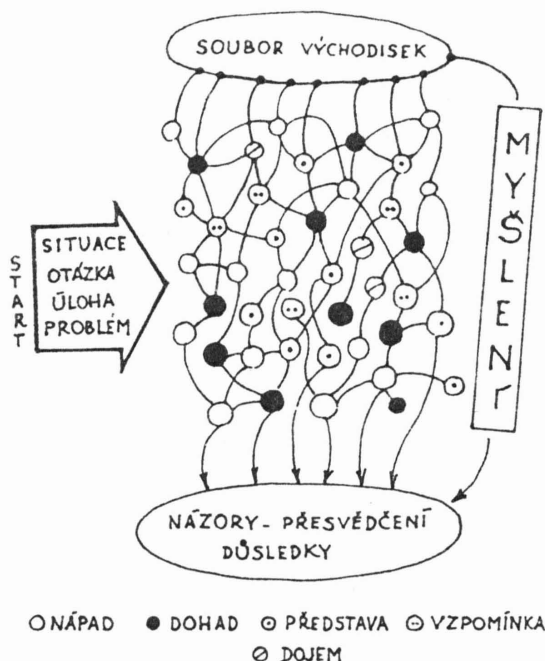
Tato absurdní anekdota ilustruje jeden z rysů myšlení. Nedá se nemyslet na něco ve chvíli, kdy máme (nebo si dáme) za úkol na to nemyslet.

Z uvedených citátů je zřejmé, že pokusit se charakterizovat myšlení, které má hrát roli ve fotbale, a jistě je důležité ve vědě, které nejde nastartovat rozkazem, ale ani umlčet zákazem, je obtížné.

Jen pro zajímavost uvedme dva takové, podle mého názoru málo říkající pokusy.

Myšlení je zobecněný a společenskými znalostmi zprostředkovaný proces odrážení objektivní reality, který se uskutečňuje zpravidla prostřednictvím slov a který umožňuje, aby poznání proniklo od jevové stránky věci k podstatě (Linhart).

Myšlení je poznávací proces, pro nějž je charakteristické, že se skládá z vnitřních, implicitních myšlenkových operací a probíhá jednak na vědomě řízené a kontrolovatelné úrovni (myšlení logické, induktivní, deduktivní), jednak na neuvědomělé úrovni (myšlení intuitivní) (Průcha, Valterová, Mareš).



Má snaha o vyjasnění pojmu myšlení vedla k následujícímu obrázku, který jsem si nakreslil na základě podnětů z Goodovy encyklopedie [4]. Myšlení se tak jeví jako volná hra nápadů, dohadů, představ, vzpomínek a dojmů, kterou nelze nijak ovládat.

Ponecháme-li stranou myšlení, které není spjato s žádným konkrétním cílem (snad bychom mohli říci volné myšlení), je myšlení vlastně řešení úloh a problémů — chápeme-li je v dostatečné obecnosti. Tento přístup je podle mého názoru v souladu s monografií [12] G. Polyi.

Škola a myšlení

Můžeme vůbec myšlení ve škole rozvíjet? Je zřejmé, že škola se svými široce pojatými vzdělávacími cíli rozvíjení myšlení příliš nepřeje. Spisovatel J. Brězan dokonce napsal

Naučil se tolik nového, že se odnaučil myslet.

Americký učitel J. Holt zdůrazňuje v knize [5]:

Rádi říkáme, že posíláme děti do školy, aby se tam naučily přemýšlet. Ale příliš často je tam naučíme myslet špatně, naučíme je vzdát se přirozeného a mocného způsobu myšlení ve prospěch metody, která v jejich případě příliš nefunguje a kterou sami používáme zřídka.

V recenzi na jinou Holtovu knihu píše J. Tůma [6]:

Škola nedává dětem čas, aby na něco přišly samy. Postupně děti odnaučuje používat vlastní rozum k pochopení látky a vede je k tomu, aby ho užily tam, kde je to více třeba: ke zjištění toho, co vlastně učitel očekává jako správnou odpověď.

Myšlení souvisí patrně s vyjadřováním a vyjadřování může škola systematicky pěstovat. Nemyslím si, že je v tomto smyslu všechno v pořádku. Doložme to příkladem.

Dne 19. 6. 1996 mne v Praze na nádraží zaujal titulek Večerníku Praha: Dvě podmínky — postačující a nutná. Oč jde vidíme v podtitulu článku. Autor však dále uvádí:

Jsou tu dvě podmínky. První nutná (v utkání s Ruskem by neměl český tým prohrát) a druhá postačující (Němci nesmějí s Itálií prohrát).

Autor článku má tak nízkou úroveň jazykového citu, že zřejmé souvislosti vykládá zcela zmateně. Snad každý, kdo umí česky, cítí význam spojení postačující podmínka.



STŘEDA 19. ČERVENA 1996 ROČNÍK VI

Dvě podmínky – postačující a nutná

K postupu do čtvrtfinále potřebují čeští fotbalisté, aby neprohráli s Ruskem a zároveň Itálie nevyhrála nad Německem



Dnes večer (20.30, ČT 1) se ukáže, zda fotbalisté České republiky postoupí ze skupiny, považované za nejtěžší na šampionátu, nebo zda budou zítra v hotelu Marriott balit kufry. Bohužel o těchto dvou diametrálně odlišných variantách nerozhodují sami, jsou tu dvě podmínky. První nutná (v utkání s Ruskem by neměl český tým prohrát) a druhá postačující (Němci nesmějí s Itálií prohrát).

Item osobnostem mužstva. Mostovému, Kančelskovi a Kolyvanovovi. Uspěšně Dušan UHRIN. Zápas řídí švédský rozhodčí Andreas Frisk, který patří mezi mladou generaci. Je nuti taktická bitva mezi knížky fází sport, rodnou a Zahrádkabeni Českou reprezentaci řídil v Bělorusku. kdy uběhli 100

Učí se rozumět žáci naší školy takovýmto spojením? Zdá se, že ne. Někteří autoři učebnic však předpokládají, že podobné formulace jsou zcela jasné. Např. v učebnici matematiky pro 8. ročník se můžeme dočíst:

Věta: Necht' AB a CD jsou vektory, které neleží v přímce; potom pro to, aby si vektory AB a CD byly rovny, je nutnou a postačující podmínkou, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl rovnoběžníkem.

Podle mého názoru je nepřirozené a nesrozumitelné vyjadřování, které v matematice někdy tolerujeme, jednou z překážek, které rozvíjení myšlení brzdí.

Je zajímavé, že orientace školního vzdělávání na množinově – logický jazyk, pěstovaná u nás v éře tzv. modernizace, byla nahrazena současnou praxí, kdy se v matematice nepřipomene na vhodných místech ani to, co je definice, a termín matematická věta se téměř neuzívá. To je podle mého názoru nezdravá věc. Myslím si, že J. Šedivý správně připomínal [7]:

Je paradoxní, že se při tradičním vyučování vysvětluje žákům význam matematických termínů obsažených ve větách, ale význam logických termínů se nevysvětluje, ač je někdy dosti odlišný od jejich běžného chápání v hovorovém jazyce. Tento podivný postoj způsobuje, že představa o rozvíjení logického myšlení žáků při tradičním vyučování matematice je velkou iluzí. Průzkumy zaměřené na zjištění, které formy logického myšlení si žáci osvojili během školní docházky, přinesly velmi neuspokojivé výsledky. Zarážející je okolnost, že nebyl zjištěn téměř žádný pokrok mezi úrovní patnáctiletých a osmnáctiletých studentů. Žáci nerozumějí plně matematickému textu, proto nemohou získat ani plnohodnotné matematické znalosti.

Z druhé strany je třeba si uvědomit, že samotné zařazení prvků logiky do vyučování nemusí výrazně k rozvíjení myšlení přispívat. Ani logická struktura matematiky rozvoj myšlení nezaručuje. Způsob kontaktu s matematikou ovšem na myšlení vliv má. Záleží na tom, jak přistupujeme k matematice a jak přistupujeme k žákovi. Ať už vyjdeme z jakéhokoliv pokusu o vymezení myšlení, shodneme se patrně, že myšlení je jakási lidská aktivita a rozvíjet ji můžeme jedině tehdy, budeme-li ji provozovat. Jaké podněty mohou tedy vést k tomu, aby myšlenkové procesy ve vyučování matematice začaly a úspěšně probíhaly? Zdá se, že základním předpokladem je angažovanost jednotlivce, jeho zájem o problematiku. To ovšem znamená, že učitel musí vytvořit prostředí pro takovou aktivitu příznivé.

Nutnou, nikoliv však postačující podmínkou pro to jsou situace, úlohy a otázky, s nimiž se žák setkává. Otázka rozvíjení myšlení tedy souvisí s konstruktivními přístupy k vyučování matematice, kterými se v našich seminářích rovněž zabýváme. Dílčí studie z této oblasti byly publikovány např. ve statích [8] a [9]. Přitom ani tak zdánlivě zřejmá věc, jako je řešení úloh, nemusí automaticky k rozvíjení myšlení vést. Kdosi poznamenal „řešení slovních úloh úsudkem rozvíjí myšlení asi tak, jako výroba stolu pouhou sekýrou rozvíjí dovednost řemeslníka“. Zajímavá a zdá se, že dosud nedostatečně zodpovězená je i otázka tzv. transferu. Naučí-li se člověk myslet v matematice, bude umět myslet i jinde? Nebo jsou

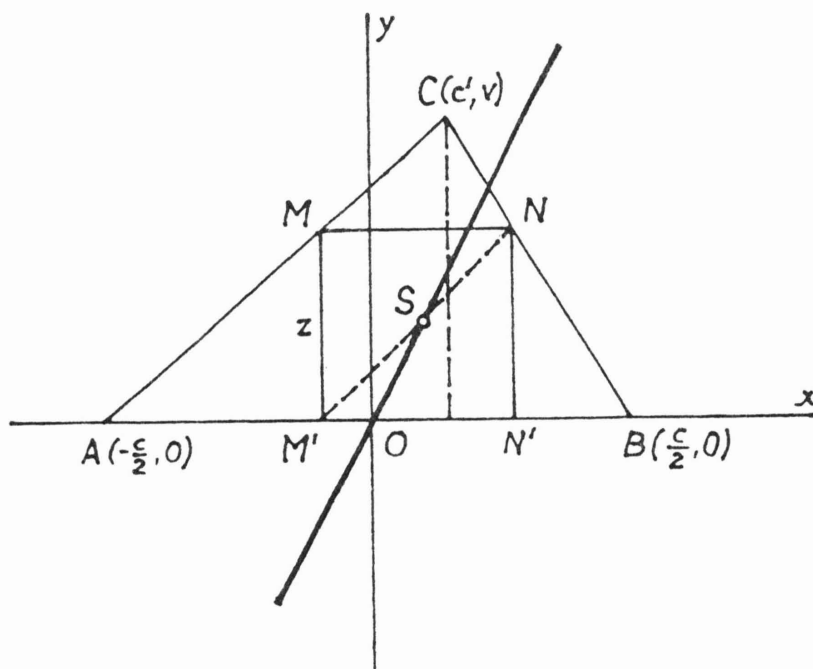
různé oblasti myšlení neprostupné? To je závažná otázka vztahu matematického myšlení a tzv. zdravého rozumu, k níž se ještě vrátíme.

O tom, zda matematika rozvíjí myšlení, můžeme soudit jen na základě důkladného rozboru vzdělávacího procesu, a to ještě v dlouhodobé perspektivě. Příležitost k rozvíjení myšlení může ovšem žákovi poskytovat učebnice. „Dobrému“ učiteli i „špatná“ učebnice takovou příležitost poskytne, „špatný“ učitel nevyužije k rozvíjení myšlení ani nejlepší učebnice. Přesto bych se chtěl na několika příkladech k učebnicím vrátit.

V geometrii pro gymnázia z roku 1946 je analyticky řešena úloha:

Jest vyšetřiti geometrické místo středů obdélníků, vepsaných danému trojúhelníku.

Autoři uvádějí řešení, obrázek a výsledek: Hledaným geometrickým místem je přímka $y = \frac{v}{2c'} \cdot x$.



Jistě je dobrým podnětem k přemýšlení otázka, zda každý bod této přímky je středem obdélníku vepsaného danému trojúhelníku a jak musíme uvedený výsledek korigovat.

V jedné učebnici planimetrie můžeme nalézt tyto formulace:

Úlohy, v nichž je určeno umístění některého z daných prvků, a tím i poloha hledaného útvaru, jsou úlohy polohové. Úlohy, v nichž je poloha daných útvarů volitelná, tzn. že hledanému útvaru jsou zadáním předepsány jen metrické vlastnosti, jsou úlohy nepolohové. V takových úlohách je třeba vždy umístit některý z daných prvků.

A nyní následuje diskutabilní věta:

Na výběru prvku, který umístíme, závisí způsob i počet řešení.

Diskuse o této problematice by měla provokovat myšlení žáků, formální přijetí toho, co je v učebnici — i když to není zcela správné, myšlení nerozvíjí.

Řešení úlohy: *Jsou dány dva shodné trojúhelníky. Zobrazte první na druhý postupným skládáním osových souměrností začíná formulací:*

V případě, že jsou odpovídající si strany daných trojúhelníku rovnoběžné, je zobrazení, které převádí jeden trojúhelník v druhý, posunutí.

Diskuse o tom, zda je to skutečně tak, může opět plodně ovlivnit myšlení třídy. Taková diskuse může být připravena úlohou o sestrojení obrazu trojúhelníku v dané středové souměrnosti. Nekritické přijetí v učebnici uvedené formulace vlastně vede k tomu, že nerozlišujeme větu a větu obrácenou, což jistě k rozvoji myšlení nepřispívá.

Matematické myšlení

Podle článku P. J. Davise [10] závisí tzv. zdravý rozum na době a kultuře, kdežto v matematice „panuje čistá imaginace a čistý rozum“. Co si máme pod tzv. matematickým myšlením představit?

Místo pokusu o precizaci ocitujeme E. Fuchse z knihy [11].

Jakkoliv je přesnost a někdy zdánlivá šroubovanost matematického vyjadřování stylem matematických úvah vymezená, dělají si z nás – matematiků – často legraci i pracovníci jiných, byť rovněž exaktních věd. Okřídlená je např. historka o tom, jak ve vlaku jedoucím skotskou krajinou sedí v kupé astronom, fyzik a matematik.

Astronom vyhlédne z okna, uvidí černou ovci a zvolá: „Přátelé, podívejte. Ve Skotsku jsou ovce černé!“

Fyzik ho opraví: „To přece nemůžeš tvrdit. Víme pouze, že některé ovce ve Skotsku jsou černé!“

A matematik ho rozhořčeně napomíná: „Jediné, co víme, je, že ve Skotsku je aspoň jedna ovce, která je aspoň z jedné strany černá.“

Úroveň svého matematického uvažování si můžete ověřit na následující úloze. Její netriviální řešení najdete na str. 175 - 178 zmíněné publikace.

Jsou dána dvě přirozená čísla větší než 1. Součet těchto čísel přitom není větší než 100. Pánové, které označíme A respektive B , jsou matematici. A zná pouze součin uvedených čísel, B zná pouze součet těchto čísel (a navzájem to o sobě vědí) a vy jste svědky tohoto rozhovoru:

A: „Nevím, která jsou to čísla.“

B: „To jsem věděl.“

A: „Tak já už vím.“

B: „Já taky.“

Vaším úkolem je určit na základě uvedeného rozhovoru, která jsou ta neznámá přirozená čísla.

Otázka zdravého lidského rozumu na straně jedné a matema-



tického myšlení na straně druhé není nevýznamná. Někteří autoři zdůrazňují, že zdravý lidský rozum souvisí s hledáním odpovědi na „reálné“ problémy a matematické myšlení je orientováno do struktury vědy (Goethe, [13], str. 97). Jiní rozdíl stylů myšlení spíše popírají. Např. Descartes v *Rozpravě o metodě* [14] nazývá zdravým rozumem schopnost správně uvažovat a „rozeznávat pravdivé od nepravdivého“.

Skutečnost, že každodenní lidská zkušenost, z níž patrně vyvěrá zdravé lidské myšlení, je omezená především na ty objekty, jejichž existence je „zaručena v přírodě“, ale netýká se již zpravidla např. „konstruované matematické reality“, mluví spíše pro to, že matematické myšlení je fenomén, jehož existenci se nemůžeme při vyučování matematice vyhnout. Jde o to, aby napětí mezi zdravým lidským rozumem a matematickým myšlením bylo produktivní. Tuto polaritu, která souvisí s aplikacemi matematiky v praxi a tvorbou a užitím matematických modelů, je třeba systematicky studovat. Řadu příležitostí k tomu poskytují některé příklady z historie matematiky, např. problémy spjaté s pojmem nekonečno. V každém případě je nutné, aby studenti získávali zkušenosti i s matematickými objekty, a to především zařazováním vhodných činností, které souvisejí s řešením úloh.

Podnětné úvahy k naší problematice formuluje v knize *K záhadám vědy* významný kanadský lékař H. Selye [15]:

Je přímo neuvěřitelné, co zmatku vzniklo proto, že lidé často nechápou tyto tři základní zkušenosti:

a) *S myšlenkami, podobně jako s tekutinami, lze dobře zacházet jen tehdy, když jsou ve vhodném obalu. (V takovém případě je možno je izolovat, měřit, mísit i prodávat.)*

„Obaly“ myšlenek jsou podle mého názoru např. domněnky a tvrzení, formulace definic, zápisy důkazů či konstrukcí, ale i např. vhodná schémata či obrázky. Tyto otázky souvisejí s jazykem matematiky, jehož rozvíjení bychom měli věnovat mimořádnou péči.

b) *Myšlenkové celky obsahují minulé zkušenosti: jen výběr myšlenek v obalu může být nový. Nedovedeme uvažovat o věcech, které mají vlastnosti, s nimiž jsme se ještě nikdy nesetkali.*

Matematika je možná pro mnohé obtížná, protože se někdy uchylujeme v praxi k tomu, že zavádíme pojmy definicemi a chceme, aby studenti ihned uvažovali o struktuře, která je pro ně zcela nová.

c) Myšlenkové celky jsou vázány jen velmi volně a jejich obsah není homogenní. Nejsou to vodotěsné nádrže, které oddělují čistou látku od okolí. Obsah obalů pokud jde o množství není nikdy stejný a vždycky se v něm najdou nečistoty.

Každý učitel matematiky ví, že tomu tak skutečně je. Myšlení probíhá na základě zkušeností s pojmy a ta se snad nikdy nekryje zcela s obsahy požadovanými např. v definicích.

Při rozhodování o zařazení formální logiky do vyučování, je třeba si uvědomit její význam. H. Selye k tomu píše:

... je paradoxní, že v běžném životě i ve vědě má formální logika, zákony myšlení a vědecká metoda jen velmi malý praktický význam. ... cesty do neznáma řídí intuice.

Otázka rozvíjení myšlení v matematice souvisí s otázkou jak chápat matematiku. Chceme-li učit matematiku pro každého, musí tento předmět přispívat ke kultivaci myšlení. Zdá se, že budeme patrně muset ustoupit od tradičního eukleidovsko-logického paradigmatu a nahradit ho paradigmatem „zkušenostním“, jak o tom píše J. Fiala v doslovu knihy [16].

Závěry

Naznačené otázky souvisejí s problémem jak nahradit „transmisivní“ přístup k vyučování přístupem konstruktivním a v současné době znamenají u nás spíše soubor otázek a problémů než návodů k řešení. Sám jsem však přesvědčen o účelnosti uvedených přístupů. Podnítl-li tento článek zájem o naší problematiku, splní svůj účel.

Jde o to uvážít, zda je reálné, abychom ve vyučování matematice učili spíše dokazovat, než důkazy, abychom učili spíše definovat pojmy, než reprodukovat definice, abychom učili spíše řešit úlohy, než učit hotová řešení úloh, abychom učili myslet, spíše než učit formální logiku.

Dovolte, abych na závěr uvedl dva provokativní citáty. První

je od významného matematika A. N. Whiteheada, druhý pochází z pera českého spisovatele J. Šotoly:

Nepůjdu tak daleko, abych řekl, že zabývat se historií myšlení bez důkladného studia matematických idejí jednotlivých epoch je jako vynechat Hamleta ze hry, která je podle něho nazvána. To by bylo přespříliš. Ale jistě by bylo analogické vynechat postavu Ofélie. Takové přirovnání je obzvláště přesné, vždyť Ofélie je pro hru dosti podstatná, je půvabná — a poněkud bláznivá. Řekněme, že posedlost matematikou je posvátným šílenstvím lidského ducha, útočištěm před naléhavými požadavky každodenního dění.

Páter Prosper byl matematik... věděl, že na všechno je správná odpověď a nic nemůže zůstat trvale nejasné. Takoví lidé přesně rozpoznají, kde je právo, čest a pravda člověka, téměř vždycky si ovšem spletou kurvu s pannou.

LITERATURA:

- [1] Polya, G., *Mathematics Promotes the Mind*, in Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, Birkhäuser Boston, 1983.
- [2] Barrow, J. D., *Teorie všeho*, Mladá fronta, 1996.
- [3] Klíma, I., *Nemyslet na bobra!*, Lidové noviny, 12. 10. 1996.
- [4] Good, C. V., *Dictionary of Education*, Mc Graw-Hill, New York, 1959.
- [5] Holt, J., *Jak se děti učí*, Strom, Praha, 1995.
- [6] Tůma, J., *Skryté osnovy*, Respekt 15 (1995).
- [7] Šedivý, J., *O modernizaci školské matematiky*, SPN, Praha, 1969.
- [8] Kuřina, F., *Constructive Dimension of Mathematics*, in: International Symposium Elementary Math. Teaching, Praha, 1993.
- [9] Kuřina, F., *Constructivist Approach to Teaching Geometry*, in: Short Presentations 8th International Congress on Mathematical Education, Sevilla, 1996.
- [10] Davis, P. J., *Matematika a zdravý rozum: jaký je jejich vztah*, Pokroky matematiky, fyziky, astronomie 5 (1996).
- [11] Fuchs, E., *Umíte matematicky myslet?*, in: O tvořivosti ve vědě, politice a umění 3 (1993), Masarykova Univerzita, Brno.
- [12] Polya, G., *Mathematical Discovery, I., II.*, J. Wiley, London, 1965.
- [13] Goethe, J. W., *O přírodě a umění*, Pravda, Bratislava, 1981.
- [14] Descartes, R., *Rozprava o metodě*, Svoboda, Praha, 1992.
- [15] Selye, H., *K záhadám vědy*, Orbis, Praha, 1975.
- [16] Davis, P. J., *Filosofující kočka z Pembroke*, Lidové noviny, Praha, 1994.
- [17] Whitehead, A. N., *Veda a moderný svet*, Pravda, Bratislava, 1989.