Lenka Dalecká
Kuželosečka stokrát jinak

Učitel matematiky, Vol. 5 (1997), No. 2, 105–117

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151403

KUŽELOSEČKA STOKRÁT JINAK

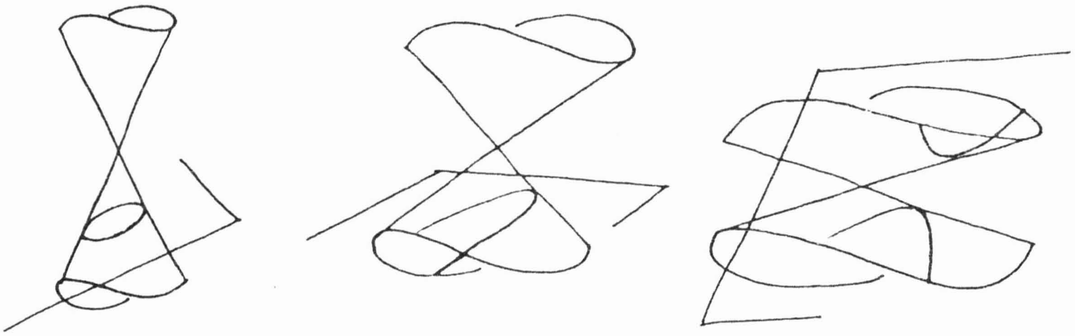
LENKA DALECKÁ

S kuželosečkami se člověk nejspíš setká poprvé, když hodí nějakým předmětem, případně když uvidí vytékat vodu z kašny. Tehdy ale většinou neví, že to, co vidí, je kuželosečka. Dozví se to teprve na střední škole. Tam se se kuželosečky zavádějí jako množiny bodů daných vlastností. Začne se od elipsy, na jejíž přiblížení se použije tzv. zahradnické definice. Zahradník upevní v zemi dva kolíky a na ně přiváže provázek delší než je vzdálenost mezi nimi. Třetím kolíkem pak vyrývá čáru, jak jen mu napnutý provázek dovolí. Touto čárou je elipsa a její definici lze nyní snadno vyslovit. Elipsa je množina bodů majících od dvou pevných bodů konstantní součet vzdáleností (délka provázku). Nahrazením slova součet slovem rozdíl dostaneme definici hyperboly, která už není tak názorná. (Hyperbola je k vidění na chladírenských věžích, což se ale většinou nezmiňuje.) Konečně parabola se přibližuje pomocí trajektorie tělesa hozeného šikmo vzhůru nebo jako tvar proudu vody vytékající z vodorovného potrubí. Definuje se pomocí ohniska a řídící přímky. Poté, co jsou tyto tři křivky probrány, se řekne, že se jedná o kuželosečky, neboť vznikají jako řezy na kuželové ploše. Žáci pak většinou počítají s analytickými rovnicemi, učí se hledat rovnice tečen, určují body dotyku atd. Nesetkají se však s žádným příkladem z praxe, jako třeba v kapitole o pravděpodobnosti, kterou mohou aplikovat téměř každý den (například při sledování televizních soutěží). A přece před více než dvěma tisíci lety to byl právě praktický příklad, který uvedl kuželosečky do světa matematiky.

Přenesme se tedy do platónské akademie v Řecku, kde se ve 4. století př. Kr. řešil tzv. délský problém. Je to jeden ze tří proslulých problémů starověké matematiky, známý jako

Mgr. Lenka Dalecká (1972), absolventka PřF MU Brno (matematika – výpočetní technika), postgraduální studentka na katedře matematiky PřF MU Brno.

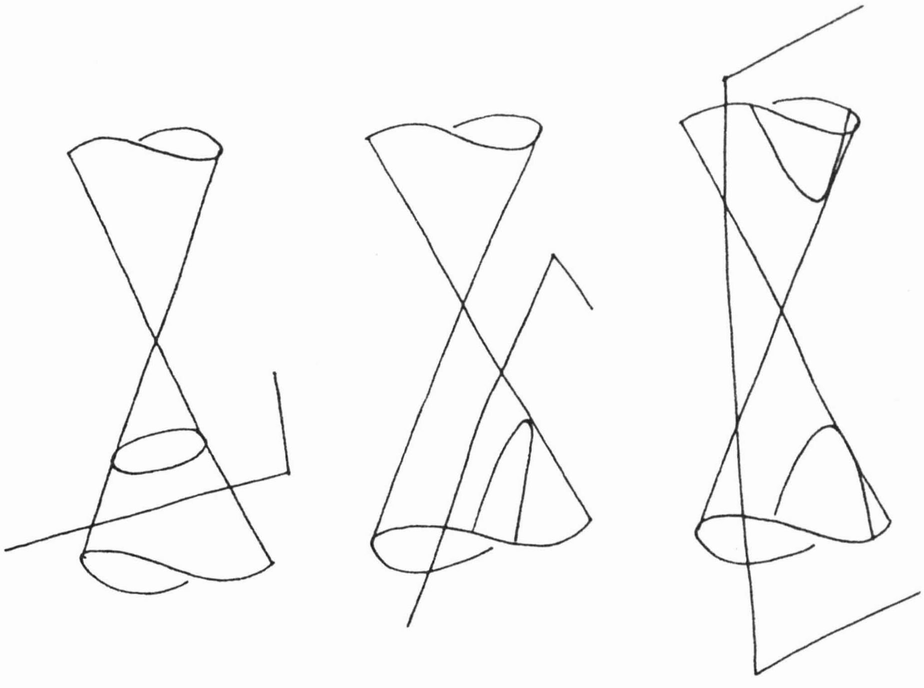
problém zdvojení krychle. Je opředen touto legendou: když na ostrově Délos vypukla morová epidemie, obrátili se obyvatelé na zdejší věštírnu o pomoc. Dověděli se, že hněv bohů může být usmířen jedině tehdy, když bude krychlovitý oltář ve věštírně zdvojnásoben. Byl tedy odlit nový krychlový oltář a postaven na původní, mor však stále trval. Nestačilo oltář zvětšit, ale bylo nutné zachovat i jeho tvar. A jak tento problém souvisí s kuželosečkami? Matematici se snažili najít řešení různými způsoby. Hippokratovi z Chiu (2. pol. 5. stol. př. Kr.) se problém podařilo převést na úlohu nalezení veličin x, y, pro něž by platilo $a : x = x : y = y : b$, kde a, b jsou předem dané veličiny. Takto transformovanou úlohu ve 4. stol. př. Kr. řešil Platónův a Eudoxův žák Menaechmos a při jeho řešení využil právě kuželoseček. Budeme-li totiž veličiny x, y pokládat za souřadnice bodu v rovině, pak tento bod je průsečíkem dvou parabol ($x^2 = ay$, $y^2 = bx$). Podrobné řešení lze nalézt v [Be] na str. 87–88.



Obr. č. 1

Jak však Menaechmos a jeho současníci kuželosečky vytvářeli? Jak se dá předpokládat, potřebovali k tomu kuželovou plochu a to ne jednu, ale hned tři: kuželové plochy s ostrým, tupým a pravým úhlem při vrcholu. Tyto kuželové plochy pak řezali rovinou kolmou k jedné tvořící přímce kuželové plochy. Tím získali tři typy křivek: 1) řez ostroúhlého kužele, 2) řez tupoúhlého kužele, 3) řez pravoúhlého kužele. Názvů elipsa, hyperbola a parabola tehdy ještě neužívali.

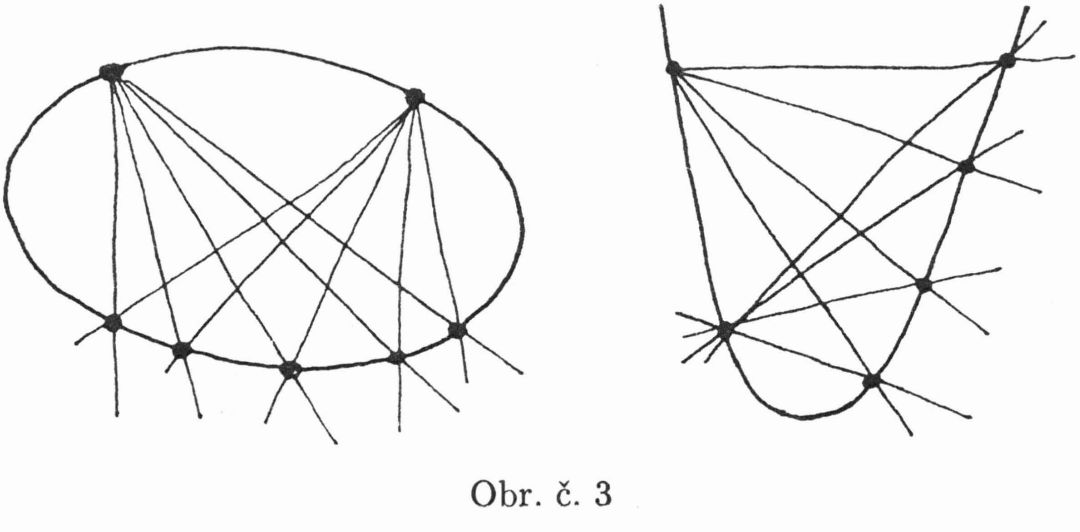
Na střední škole nám sice ukazovali, jak řezem kužele vznikají kuželosečky, ale stačil k tomu kužel jeden. Naopak poloha roviny řezu byla proměnlivá, nikoliv jen kolmá k některé tvořící přímce. Tento postup pochází od Apollonia z Pergé (2. pol. 3. stol. př. Kr. – poč. 2. stol. př. Kr.), který kuželosečkám věnoval dílo o osmi knihách, nazvané, jak jinak, *Kuželosečky*. Od něj také pochází názvy pro parabolu, hyperbolu a elipsu. Slovo „ellipsis" znamená nedostatek, „hyperbolé" přebytek a „parabolé" přiložení. Jak k těmto názvům Apollonios přišel? Zabýval se vlastnostmi jednotlivých typů kuželoseček a dostal se k něčemu, co bychom jazykem



Obr. č. 2

moderní matematiky nazvali rovnicemi kuželoseček, které by mohly vypadat asi takto: parabola $y^2 = px$, elipsa $y^2 = x(p - \frac{p}{a}x)$, hyperbola $y^2 = x(p + \frac{p}{a}x)$, kde x, y jsou souřadnice bodu, p je parametr, a délka průměru. Apollonios pochopitelně rovnice nevyjádřil takto formálně, pouze je slovně popsal. Tento nový postup – popis kuželosečky jako množiny bodů daných vlastností umožnil Apolloniovi konstruovat všechny tři kuželosečky pomocí tzv. metody přikládání ploch. Odtud tedy název pro parabolu (přikládání). Podíváme-li se na rovnici paraboly očima geometra, můžeme ji přečíst takto: najdi čtverec se stranou y o stejném obsahu jako obdélník se stranami p, x. Tuto úlohu pak Apollonios řešil tehdy obvyklou metodou přikládání ploch. Tato metoda byla založena na Pythagorově větě a porovnávání obsahů obdélníků a je podrobně popsána opět v [Be] na str. 63 – 68. Původ názvu pro elipsu (nedostatek) je vidět na pravé straně její rovnice. Abychom mohli použít stejné úvahy jako pro parabolu, musíme obdélník, jehož obsah má být stejný jako obsah hledaného čtverce, o kousek zmenšit. U hyperboly obdélník naopak zvětšujeme.

Nyní proveďme skok o několik století až do doby renesance. Renesanční umělci se začali zajímat o zákonitosti lidského vidění a svých poznatků se snažili využít. Interpretovali obraz jako okno do světa, kterým vidíme prostor, jako řez v kuželi vidění. Tak vznikla na půdě umění perspektiva. V hlavách geometrů se začala rodit otázka: co mají společného dva perspektivní obrazy téhož útvaru? To byl impuls ke studiu obecnějšího zobrazení než je perspektiva, totiž zobrazení projektivního, které vznikne složením perspektiv. Vznikla tak nová geometrická disciplína – projektivní geometrie. Jaký vztah má ke kuželosečkám? Do té doby bylo nutné provádět veškeré úvahy pro každý typ kuželosečky zvlášť. Teprve prostředky projektivní geometrie dovolily „uchopit“ kuželosečku jako jeden pojem. Jak?



Obr. č. 3

Uvažujme dva různé svazky přímek v rovině a projektivní zobrazení přiřazující každé přímce jednoho svazku přímku druhého svazku. Jak vypadá množina průsečíků navzájem si odpovídajících přímek ? (V projektivní rovině pro každou dvojici přímek takový průsečík existuje.) Odpověď se nabízí – průsečíky vytvoří kuželosečku.

A je na světe zcela „konstruktivní" definice kuželosečky, která se na rozdíl od „destruktivního" řezání kužele odehrává pouze v rovině (projektivní). Tuto definici objevil v roce 1832 švýcarský matematik Jakob Steiner (1796 – 1863) *na základě projekce z rovnosti úhlů obvodových v kružnici nad týmž obloukem* ([Vo] str. 161, pozn. 4). Skutečně, kružnici totiž můžeme považovat za množinu průsečíků sobě odpovídajících přímek dvou shodných svazků přímek v rovině.

O takto definované kuželosečce pak nebyl problém dokázat, že je křivkou druhého stupně, tj. má s libovolnou přímkou dva společné body. Lze ale naopak každou křivku druhého stupně takto vytvořit ? Odpověď dal roku 1852 Francouz Michael Chasles (1793 – 1880), který dokázal, že *každou čáru takto vytvořenou lze pokládat za průmět kružnice.* ([Vo] str. 161, pozn. 4). Kuželosečku tedy lze definovat i jako křivku druhého stupně.

V roce 1847 se objevuje ještě zcela jiná definice kuželosečky. Jejím autorem je německý matematik Karl Georg Christian von Staudt (1798 – 1867). Definice vychází z pojmu polarita. Představme si vzájemně jednoznačné zobrazení v rovině, které bodům přiřazuje přímky a přímkám body a to tak, že je při tom zachována incidence. Takovému zobrazení se říká korelace. Polarita je jejím speciálním případem – je to involutorní korelace, tj. složena sama se sebou dává identitu. Staudt se zajímal o body ležící na jim odpovídající poláře (přímce, která je jejich obrazem v polaritě). Zjistil, že takovéto body, které nazýval autopolární, vytvoří právě kuželosečku.

Od Staudtovy definice není daleko k analytickému vyjádření kuželosečky rovnicí v projektivních souřadnicích. Stačí analyticky vyjádřit polaritu a vyjádřit podmínku pro „autopolární" body.

Tolik tedy kuželosečky v průběhu staletí. Všímejme si nyní, jak chápou kuželosečky autoři českých učebnic.

Jako první začal v Čechách přednášet projektivní geometrii

Wilhelm Fiedler. Tyto německé přednášky probíhaly na pražské technice v letech 1864 – 1867. *České přednášky z projektivní geometrie zahájil Josef Šolín (1841 – 1921) v roce 1870 a o dva roky později je vydal litograficky.* ([Ná] str. 71)[1].

První českou učebnicí projektivní geometrie je společné dílo bratří Weyrů *Základové vyšší geometrie.* Je to třídílná série, která vycházela na pokračování v časopise Živa. O kuželosečkách pojednává 2. díl nazvaný *Theorie křivek stupně druhého.* Kapitola I. je nazvána *Výtvary prvořadých útvarů promítavých (kuželosečky)* a píše se v ní toto:

Křivka vytvořená promětnými svazky protnuta jest libovolnou příčkou v dvou bodech a jest tudíž křivkou stupně druhého. ([WW] II. díl, str. 9).

Dále pak dokazují tvrzení: *Každá křivka druhého stupně jest výtvarem promítavých svazků, jejichž vrcholy mohou býti libovolné dva body na obvodu křivky.* ([WW] II. díl, str. 12).

Pokračují komentářem: *Z toho plyne, že výtvary promítavých svazků jsou nejvšeobecnější křivky druhého stupně, a že vůbec jiných křivek druhého stupně nesestává mimo výtvary svazků promětných.* ([WW] II. díl, str. 12).

Později vydali oba bratři samostatně knihy o stejné tematice jako ve společném díle. Nejdříve tak učinil Emil ([Ná], str. 83), ale v němčině (*Die elemente der projectivischen Geometrie*).

Následoval Eduard knihou Projektivná geometrie základných útvarů prvního řádu ([Ná], str. 83). Tato učebnice vychází poprvé v roce 1898, druhého vydání se dočkala o 13 let později, v roce 1911. Definice kuželosečky je zde již jiná: *Kuželosečkou zveme každou rovinnou čáru, již lze vytvořiti jakožto centrálný průmět kružnice, tedy jakožto řez kruhového kužele, t.j. kužele vedeného kružnicí, s rovinou neprocházející vrcholem kužele. Každá kuželosečka jest tedy čára příslušná kružnici perspektivně; poněvadž perspektivné systémy sklopením se stávají homologickými, a naopak homologické otočením perspektivnými, jest každá čára homologická s kružnicí kuželosečkou a naopak.* ([We] str. 80).

---

[1]Tyto přednášky se mi bohužel dosud nepodařilo objevit, takže bych byla vděčná za jakékoliv informace.

Je to jen jinými slovy vyřčená Apolloniova definice. Pomocí kolineace Weyr dokazuje, že takto definovaná kuželosečka je křivkou druhého stupně. Na tomto místě je ale v 1. vydání chyba, zřejmě tisková. Laskavý čtenář ji jistě najde:

Poněvadž ve dvou perspektivných soustavách přísluší bodu bod, přímce přímka, tečně čáry tečna perspektivně sdružené čáry, jest patrné, že kuželosečku, tak jako kružnici, libovolná přímka protne buď ve dvou bodech, neb v jednom bodě (čili ve dvou splývajících) jsouc tečnou čáry, aneb ve dvou imaginárných bodech, jakož že libovolným bodem v rovině kuželosečky procházejí dvě tečny její, neb jen jedna (čili dvě splývající), je-li totiž bod na čáře, aneb dvě imaginárné tečny. Vzhledem k první okolnosti jest kuželosečka čarou prvního stupně, a vzhledem k druhé jest současně čarou druhé třídy; udává totiž stupeň algebraické čáry v rovině počet její průsečíků s libovolnou přímkou a třída počet její tečen, procházejících libovolným bodem. ([We] str. 80 -81).

Následuje důkaz toho, že definice v *Základech* je s definicí v této Eduardově učebnici ekvivalentní:

Dva projektivné svazky v téže rovině, jež nejsou perspektivné, vytvořují kuželosečku, procházející jejich vrcholy a dotýkající se v nich paprsků, jež přísluší projektivně společnému paprsku obou svazků. ([We] str. 85).

V dalším textu pak Weyr k důkazům vět využívá tohoto ekvivalentního tvrzení a k původní definici se již nevrací. Bezprostředně po Weyrově učebnici, v letech 1908 – 1918, vydává profesor pražské techniky Vincenc Jarolímek (1847 – 1921) sérii prakticky zaměřených učebnic nazvanou *Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru.* O kuželosečkách pojednává hned 1. část I. dílu. Kapitola II je nazvaná *Theorie kuželoseček.* Kuželosečka je zde zavedena jako křivka 2. stupně a vzápětí se dokazuje, že dva projektivní svazky takovou křivku vytvoří:

Křivky druhého stupně jsou totožny s křivkami druhé třídy, a nazývají se také kuželosečkami, jakožto průniky roviny s plochou kuželovou, ovšem stupně druhého. Tyto křivky vytvořujeme v geometrii polohy takto : Dva nesoumístné, prostě projektivné svazky paprskové $s_1(A_1B_1C_1\dots)s_2(A_2B_2C_2\dots)$, *které leží v jed-*

né rovině, vytvořují průsečíky sdružených paprsků $(A_1A_2) \equiv a$, $(B_1B_2) \equiv b$, ... *křivou řadu bodovou druhého stupně, jejíž spojnicí jest kuželosečka, která prochází body* s_1s_2. ([Ja] str. 28–29).

Dokazuje také větu obrácenou:

Řada druhého stupně promítá se z každých dvou svých bodů svazky projektivnými. ([Ja] str. 30).

Jarolímek, stejně jako Eduard Weyr, nepracuje s definicí kuželosečky tak, jak si ji sám zavedl, ale s následně dokázaným ekvivalentním tvrzením o vytvoření kuželosečky projektivními svazky.

Až téměř o dvacet let později, v roce 1932, vydává Jednota Československých matematiků a fyziků kompendium profesora pražské techniky Jana Vojtěcha (1879 – 1953) nazvané *Geometrie projektivní*. Její podtitul zní: *Synthetické i analytické vyšetřování projektivních příbuzností a útvarů*. Je to dílo rozsáhlé (880 stran) i obsáhlé. Jeho charakter vystihuje nejlépe sám autor v předmluvě:

Hlavní zásadou autora bylo pojmouti do knihy výhradně věty projektivní, tak aby charakter její po této nejdůležitější stránce byl jednotný; na příbuzné speciální věty geometrie obyčejné, které k nim velmi často bývají připojovány, upozorňuje se (hlavně s počátku) jen v poznámkách. Pokud jde o nástroj geometrických úvah, bylo postupováno metodou jak synthetickou, tak analytickou, protože obě mají značné výhody, a nelze se při žádoucí jednoduchosti, přístupnosti a přesnosti omeziti na jednu z nich; přirozeně se užívá prvé metody hlavně v úvahách počátečních a jednodušších, druhé později při výkladech soustavných a složitějších (některé předměty byly však vyloženy – jak bylo nutné neb aspoň pro ocenění vhodné – oběma metodami).

Skutečnost, že se Vojtěch v učebnici projektivní geometrie drží jen projektivních pojmů, není samozřejmá. Všechny tři dříve zmiňované knihy, ale i díla novější studují vedle projektivních vlastností kuželoseček i vlastnosti afinní a metrické bez výraznějšího upozornění. Co se kuželoseček týče, Vojtěchova učebnice obsahuje hned několik definic. První z nich je obvyklé Steinerovo vytvoření projektivními svazky: *Korespondující paprsky dvou nesoumístných svazků paprskových v téže rovině určují bod, svůj průsečík; tyto průsečíky vytvořují jednomocnou spojitou soustavu* *bodů, řadu bodovou (v širším smyslu) čili čáru jako geometrické místo vytvořujícího bodu (jenž sluje bodem čáry).* ([Vo] str. 156).

Definice je následována tvrzením:

Protože tedy na libovolné přímce v rovině leží dva body čáry, vytvořené dvěma projektivními svazky paprskovými této roviny, sluje čára ta křivkou druhého stupně. ([Vo] str. 157).

A dále se říká:

Protože křivka 2. stupně a 2. třídy jest průsekem kužele (2. stupně a 2. třídy), sluje stručně kuželosečka. ([Vo] str. 176).

Poté, co Vojtěch probere vlastnosti korelací a polarity, dává do souvislosti Steinerovu a Staudtovu definici: *Existuje-li v rovinné polárnosti jediná dvojice bodu a přímky k sobě příslušných (pólu a poláry), jež jsou incidentní, tedy jeden bod autokonjugovaný a jedna přímka autokonjugovaná, existuje v ní neomezené množství bodů soběsdružených, jež vytvořují křivku 2. stupně. Autokonjugované body polárnosti v rovině promítají se ze dvou bodů takových projektivními svazky paprsků.* ([Vo] str. 310).

Nechybí zde ani analytická definice:

Analyticky definujeme čáru 2. stupně jako soubor reálných nebo imaginárních bodů, jejichž homogenní souřadnice x_1, x_2, x_3 vyhovují rovnici kvadratické

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

([Vo] str. 320).

Další učebnice nazvaná *Projektivní geometrie I* vychází v roce 1944 tentokrát v Melantrichu a jejím autorem je Václav Hlavatý (1894 – 1969), matematik, který od roku 1948 působil v USA a spolupracoval s Albertem Einsteinem. Václav Hlavatý stejně jako většina autorů definuje kuželosečku podle Steinera:

Buďtež dány dvě nesoumístné lineární přímkové projektivní soustavy

$$h(A, B, C, \dots) ::: h'(A', B', C', \dots)$$

v téže rovině. Množství všech průsečíků odpovídajících si přímek (reálných nebo imaginárných) to jest množství všech bodů

$$a = AA', b = BB', c = CC', \dots$$

nazývá se bodová kuželosečka ^2b *a tyto body se nazývají body bodové kuželosečky.* ([Hl] str. 95, def (1,1)).

V roce 1952 vydává Eduard Čech (1893 – 1960) II. díl kompendia *Základy analytické geometrie*, v němž pojednává o projektivním prostoru a útvarech a zobrazeních v něm definovaných. Jak již název napovídá, jeho metoda je analytická. Neomezuje se jen na prostory dimenze 2 a 3, ale pracuje v obecném n-rozměrném projektivním prostoru, který definuje jako množinu jednorozměrných podprostorů $(n+1)$-rozměrného vektorového prostoru (aritmetický základ). Tím převádí problémy geometrické na problémy vektorové algebry. Výsledky získané algebraickým aparátem pak jen zpět překládá do řeči geometrie. Kuželosečka je pro něj jen speciálním případem kvadriky, kterou definuje takto:

Budiž opět W_{m+1} *aritmetický základ projektivního prostoru* P_m. *Nazveme kvadrikou prostoru* P_m *neboli* $(m-1)$*-rozměrnou kvadrikou a označíme* Q_{m-1} *množinu všech těch bodů* $\{X\}$ *prostoru* P_m, *pro něž je* $f_2(X) = 0$, *kde* f_2 *je daná kvadratická forma v* P_m.([Če] str. 106).

Jinými slovy – kvadrika je tvořena body, v nichž se „nuluje" jakési zobrazení. Je to zobrazení přiřazující bodu (vektoru) číslo a splňující jisté podmínky. Další v řadě učebnic pojatých synteticky je poněkud praktičtěji zaměřená učebnice Karla Havlíčka *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček.* Vychází v roce 1956. Havlíček zavádí kuželosečku jako řez na kuželové ploše (Apolloniova definice):

... všimneme si vzájemné polohy roviny a obecné kuželové plochy kruhové, která ani nemusí být rotační. ... Tak docházíme k pojmu kuželosečky; kuželosečka je řez kruhové kuželové plochy rovinou. Název je zcela přiléhavý, kuželosečka je křivka, v níž rovina seče kuželovou plochu. ...Budeme hledat takové vlastnosti kružnice, které se promítáním nemění. Ty budou pak zachovány u všech kuželoseček. ([Ha] str. 10)

Takováto definice je sice názorná, ale pro další práci nevhodná, proto Havlíček odvodí tvrzení ekvivalentní o vytvoření kuželosečky projektivními svazky a s ním pak, stejně jako Eduard Weyr, pracuje:

Začneme se známou vlastností kružnice, že totiž všechny obvodové úhly, příslušné ke stejným obloukům kružnice, jsou stejně velké. ...Průmětem kružnice bude kuželosečka a průmětem obou shodných svazků budou svazky, které už asi shodné nebudou, ale budou opět vzájemně projektivní, ... ([Ha] str. 68 – 69).

Havlíčkova učebnice je na rozdíl od ryze teoretických děl Vojtěcha a Hlavatého doplněna obrázky a řešenými příklady. Je psána velmi čtivě.

O dva roky později vycházejí dvoje skripta se stejným názvem *Základy projektivní geometrie*. První na Vysoké škole pedagogické v Praze, jejich autorem je Jan Vyšín, druhá na Vysoké škole železniční v Praze, autorkou je E. Ryšánová. Zatímco Vyšín pojímá skripta teoreticky, Ryšánová po Havlíčkově vzoru (skripta jsou v mnohém podobná knize [Ha]) vytvořila spíše příručku pro řešení konstrukčních úloh. Oba autoři však definují kuželosečku podle Steinera.

Poslední zmínka patří taktéž skriptu *Projektivní geometrie I*, tentokrát vydanému na Matematicko-fyzikální fakultě KU dvojicí autorů Jarolímem Burešem a Jarmilou Burešovou v roce 1983. Také oni vytvářejí kuželosečku pomocí projektivních svazků, jen formulace je formálnější:

Nechť A, B jsou dva různé body projektivní roviny, $\Phi : [A] \to \to [B]$ projektivita. Množina bodů

$$K(A, B, \Phi) = \bigcup_{x \in [A]} [X] \cup [x\Phi]$$

se nazývá kuželosečkou v projektivní rovině p. ([BB] str. 37).

Nutno ještě vysvětlit některé symboly v definici. Symbolem $[A]$ ($[B]$) autoři míní svazek přímek procházející bodem A (B), symbol $[x]$ ($[y]$) pak představuje množinu bodů incidentních s přímkou x (y).

V tomtéž roce vydává v Brně Karel Svoboda skriptum *Geometrie kvadrik*, které je na rozdíl od výše zmíněného vedeno po Čechově vzoru analytickou metodou. Svoboda definuje kvadriku stejně jako Čech, nazývá ji však nadkvadrikou v n-rozměrném prostoru.

Následovateli Eduarda Čecha jsou i autoři vysokoškolské učebnice

Geometrie II Milan Sekanina, Leo Boček, Milan Kočandrle a Jaroslav Šedivý, kteří nepracují sice v obecném projektivním prostoru, ale v projektivním rozšíření prostoru afinního. Definují také nejprve kvadriku.

V roce 1996 vyšlo na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně skriptum *Analytická teorie kuželoseček a kvadrik.* Autoři Josef Janyška a Anna Sekaninová se vydali též cestou Eduarda Čecha. Nepracují s kvadrikou v obecném projektivním prostoru, ale omezují se na prostory dimenze 2 a 3.

Jak je vidět, starší autoři dávali přednost syntetickému pojetí, zatímco současní autoři mají v oblibě metodu analytickou. Proč? Že by doba počítačů? I to je zřejmě jedním z důvodů. Nutno si totiž uvědomit, že syntetická projektivní geometrie byla především jakýmsi teoretickým základem geometrie deskriptivní, která dnes už nehraje tak významnou roli právě proto, že mnohé zvládne počítač právě analytickou metodou. Tato metoda umožňuje pracovat v prostoru libovolné dimenze, navíc umně využívá něčeho už hotového, totiž algebraického aparátu, jehož výsledky stačí jen přeložit do řeči geometrie. Syntetickou metodou lze zachytit nejvýše trojrozměrný prostor. Tato metoda je však názornější a rozvíjí představivost.

Vývoj lidstva se prý opakuje v ontogenezi každého člověka. Není tedy zřejmě možné ve výuce metodu syntetickou opomenout. Dítě se také nejprve učí sčítat jablka, pak teprve abstraktní čísla a jen někteří se dozví něco o grupách. Tento postup však v žádném případě nelze obrátit.

LITERATURA

[WW] Weyr Em. – Weyr Ed., *Základové vyšší geometrie*, Praha, Museum král. Českého, 1871.

[We] Weyr Ed., *Projektivná geometrie základných útvarů prvního řádu*, Jednota Českých Mathematiků, Praha, 1898.

[Ja] Jarolímek V., *Základové geometrie polohy*, Česká matice technická, Praha, 1908.

[Vo] Vojtěch J., *Geometrie projektivní*, Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1932.

[Hl] Hlavatý V., *Projektivní geometrie*, Melantrich, Praha, 1944.

[Če] Čech E., *Základy analytické geometrie II.*, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.

[Ha] Havlíček K., *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*, SNTL, Praha, 1956.

[Vy] Vyšín J., *Základy projektivní geometrie*, SPN, Praha, 1958.

[Ry] Ryšánová E., *Základy projektivní geometrie*, SNTL, Praha, 1958.

[BB] Bureš J. – Burešová J., *Projektivní geometrie I.*, SPN, Praha, 1983.

[Sv] Svoboda K., *Geometrie kvadrik*, UJEP, Brno, 1983.

[SBKŠ] Sekanina M. – Boček L. – Kočandrle M. – Šedivý J., *Geometrie II*, SPN, Praha, 1988.

[JS] Janyška J. – Sekaninová A., *Analytická teorie kuželoseček a kvadrik*, MU, Brno, 1996.

[DP] Dahan–Dalmédico A. – Peiffer J., *Routes et dédales*, Paris–Montréal, 1982, ruský překlad Moskva 1986.

[Ná] Nádeník Z., *O geometrických pracích Eduarda Weyra*, in Bečvář J. a kol.: Eduard Weyr 1852 – 1903, Prometheus, Praha, 1995.

[Be] Bečvář J., *Hrdinský věk řecké matematiky*, in Historie matematiky I, JČMF, Brno, 1994.

★ ★ ★

J

V. Jarník

Čet jsem Diferenciální počet
a hrdliččin hlas ku lásce zval.
Býval bych si jistě krásně počet,
kdybych tu hrdličku nezval dál.

E. Calda