Učitel matematiky

Jindřich Bečvář

Ještě jednou Saint-Exupéry

Učitel matematiky, Vol. 4 (1996), No. 3, 150–154

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151440

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1996

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

JEŠTĚ JEDNOU SAINT-EXUPÉRY

JINDŘICH BEČVÁŘ

V loňském ročníku *Učitele matematiky* byla zveřejněna zajímavá matematická úloha v článku *Sázka mezi Saint-Exupérym a jeho kamarádem, plukovníkem Maxem Gelléem* (viz [1]). V minulém čísle byly otištěny příspěvky E. Caldy [2] a J. Dittricha [3], ve kterých je úloha řešena. Podstatou matematického problému jsou tzv. pythagorejské trojice. K problematice úlohy se ještě vracíme.

Popis všech pythagorejských trojic

V příspěvcích [2], [3] je uveden popis všech pythagorejských trojic, není však odvozen. Vzhledem k tomu, že jde o záležitost poměrně elementární, podáváme ji zde.

Pythagorejskou trojicí budeme rozumět trojici přirozených čísel (x, y, z), pro která je

$$x^2 + y^2 = z^2 . \tag{1}$$

Jsou-li čísla x, y, z nesoudělná, hovoříme o *primitivní pythagorejské trojici*. Vzhledem k podmínce (1) jsou pak nesoudělná každá dvě z čísel x, y, z. Čísla x, y tedy nemohou být obě sudá. Ze symetrie rovnosti (1) vůči x, y vyplývá, že můžeme předpokládat, že x je liché.

Je-li (x, y, z) pythagorejská trojice, je pro každé přirozené číslo k trojice (kx, ky, kz) rovněž pythagorejská. Každá pythagorejská trojice je násobkem nějaké primitivní pythagorejské trojice. Stačí tedy najít popis všech primitivních pythagorejských trojic.

Věta: Trojice přirozených čísel (x, y, z), kde x je liché, je primitivní pythagorejskou trojicí, právě když je

$$x = uv , \quad y = \frac{u^2 - v^2}{2} , \quad z = \frac{u^2 + v^2}{2} , \tag{2}$$

kde u, v jsou lichá nesoudělná přirozená čísla a $u > v$.

Důkaz: Předpokládejme, že (x, y, z) je primitivní pythagorejská trojice, kde x je liché. Ze vztahu (1) plyne rovnost

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y) . \tag{3}$$

Každé prvočíslo p, které dělí číslo x, se v rozkladu čísla $x^2 = (z - y)(z + y)$ vyskytuje v sudé mocnině. Kdyby prvočíslo p dělilo čísla $z - y$ a $z + y$, dělilo by i jejich součet $2z$ a tedy i číslo z (neboť x je liché). Čísla x a z by byla soudělná — spor. Čísla $z - y$ a $z + y$ jsou tedy nesoudělná, v jejich prvočíselných rozkladech se každé prvočíslo vyskytuje v sudé mocnině. Proto můžeme psát

$$z + y = u^2, \quad z - y = v^2 , \tag{4}$$

kde u, v jsou lichá nesoudělná přirozená čísla a $u > v$.

Ze vztahů (3) a (4) snadno dostaneme (2).*)

Není obtížné prověřit, že čísla x, y, z daná vztahy (2), kde čísla u, v splňují uvedené podmínky, tvoří primitivní pythagorejskou trojici. Tím je důkaz ukončen.

Budeme-li postupně dosazovat $(u, v) = (1,3), (1,5), \cdots, (1,13), (3,5), (3,7), (3,11), (3,13), (5,7), \cdots, (5,13), (7,9), (7,11)$, dostanem šestnáct primitivních pythagorejských trojic, ve kterých žádné číslo nepřevyšuje 100; uvádí je E. Calda v [2].

Poznamenejme, že se vzorce popisující pythagorejské trojice často uvádějí mírně modifikované (viz např. [2], [3]). Řada informací z historie této problematiky je v práci [4] (na str. 70 je geometrické odvození vzorců (2)).

Formulace úlohy Saint-Exupéryho

Autoři příspěvků [2], [3] se pozastavili nad formulací úlohy.

Kvádr, jehož výška se rovná úhlopříčce podstavy, je tvořen přesně krychličkami o hraně 1 cm. Obsah základny se rovná násobku 311 850 a neznámého čísla.

---

*) Dvojmoc lichého čísla dává při dělení číslem 4 zbytek 1. Proto je ve vzorcích (2) y sudé a z liché.

Druhá věta je opravdu poněkud zavádějící. Přesná formulace měla být např. takováto:

Obsah základny je **násobkem** *čísla 311 850.*

nebo

Obsah základny je **součinem** *čísla 311 850 a neznámého* **přirozeného** *čísla.*

Není jasné, zda se nedostatek objevuje už u Saint-Exupéryho, nebo zda vznikl nepřesným překladem do češtiny.

E. Calda si navíc povšiml i nepřesnosti v podmínkách sázky: slovo **den** je zde užito ve dvou různých významech. Při doslovném výkladu podmínek sázky mohla nastat situace, že se oba přátelé navzájem obdarovali.

Řešení snadná a nesnadná

Emil Calda ukazuje ve svém příspěvku [2], jak „přelstít" autora úlohy; využívá však nepřesnosti formulace. Obelstít zadavatele úlohy však můžeme i jinak.

Vyjdeme z libovolné pythagorejské trojice (a, b, c). Jak již víme, trojice (ka, kb, kc), kde $k = 311\ 850$, je rovněž pythagorejská. Kvádr o stranách $x = ka, y = kb, z = kc$ vyhovuje požadavkům úlohy, neboť

$$xy = k^2ab = 311\ 850 \cdot n \ , \quad \text{kde } n = kab = 311\ 850 \cdot ab \ .$$

(Pro $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ je $n = 311\ 850 \cdot 12 = 3\ 742\ 200$.)

Lepší řešení získáme, zapíšeme-li $311\ 850 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$ a položíme-li $k = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ a $n = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot ab$. Kvádr o stranách $x = ka, y = kb, z = kc$ vyhovuje požadavkům úlohy, neboť

$$xy = k^2ab = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot (2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot ab) = 311\ 850 \cdot n \ .$$

(Pro $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ je $n = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 12 = 1\ 848$.)

Výše uvedená řešení však nejsou příliš krásná. Cítíme, že číslo n je příliš velké. V příspěvku J. Dittricha [3] jsou nalezena dvě řešení, pro která je $n = 2$ (první z nich nalezl v článku [2] i Emil Calda):

$$x = 1\,155\ , \quad y = 540\ , \quad z = 1\,275\ ;$$

$$x = 825\ , \quad y = 756\ , \quad z = 1\,119\ .$$

Ukážeme, že neexistuje řešení, pro které by bylo $n = 1$.

Víme již, že strany kvádru jsou určeny nějakou pythagorejskou trojicí (ka, kb, kc), kde (a, b, c) je primitivní pythagorejská trojice. Proto je

$$a = uv\ , \quad b = \frac{u^2 - v^2}{2}\ , \quad c = \frac{u^2 + v^2}{2}\ ,$$

kde $u > v$ jsou lichá nesoudělná přirozená čísla. Navíc je

$$k^2ab = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot n\ .$$

Dosaďme za a, b a upravme. Potom je

$$k^2v(u-v)u(u+v) = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot n\ . \tag{5}$$

Čísla $u-v$, $u+v$ jsou sudá, liší se o číslo $2v$, které není dělitelné čtyřmi. Proto je jedno z čísel $u+v, u-v$ dělitelné čtyřmi; celý součin vlevo v (5) je pak dělitelný osmi. Číslo n je tedy sudé, tj. $n \geq 2$.

Naznačme nyní stručně, jak je možno bez užití počítače najít všechna řešení pro $n = 2$, tj. jak vyřešit v oboru přirozených čísel rovnici

$$k^2v(u-v)u(u+v) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11\ . \tag{6}$$

Nesoudělná lichá čísla u, v dělí součin $3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$. Stačí tedy prozkoumat všechny možnosti.

Není obtížné rozvážit, že žádná dvě z čísel $u, v, u-v, u+v$ nemohou být dělitelná stejným lichým prvočíslem (v opačném případě by byla čísla u, v soudělná). Prvočísla 3 a 5 — vzhledem k tvaru rovnice (6) — musí být tedy v číslech u, v obsažena v sudých mocninách. Pro v přichází proto v úvahu jen 1, 7, 9, 11, 25; pro větší v už „nezbude“ na součin $(u-v)(u+v)$.

Předpokládejme, že $v = 1$. Pro u máme tyto možnosti: 3^2, 5^2, 7, 11, 3^4, $3^2 \cdot 5^2$, $3^2 \cdot 7$, $3^2 \cdot 11$, $5^2 \cdot 7$, $5^2 \cdot 11$, $7 \cdot 11$, $3^4 \cdot 5^2$, $3^4 \cdot 7$, $3^4 \cdot 11$, $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ atd. Dosazením do (6) zjistíme, že žádná z těchto možností nevyhovuje. Pro menší hodnoty u se to snadno prověří; pro větší hodnoty u je to zřejmé, neboť „málo zbývá" pro $(u-1)(u+1)$.

Předpokládejme, že $v = 7$. Pro u máme tyto možnosti: 3^2, 5^2, 11, 3^4, $3^2 \cdot 5^2$, $3^2 \cdot 11$, $5^2 \cdot 11$ atd. Snadno se přesvědčíme, že rovnosti (6) vyhovuje jen volba $u = 11$ (přitom je $k = 15$ a dostáváme pythagorejskou trojici $(15 \cdot 77, 15 \cdot 36, 15 \cdot 85)$).

Předpokládejme, že $v = 9$. Pro u máme tyto možnosti: 5^2, 11, $5^2 \cdot 7$, $5^2 \cdot 11$, $7 \cdot 11$ atd. Žádná z těchto možností vztahu (6) nevyhovuje.

Předpokládejme, že $v = 11$. Pro číslo u padají v úvahu tyto hodnoty: 5^2, 3^4, $3^2 \cdot 5^2$, $3^2 \cdot 7$, $5^2 \cdot 7$ atd. Vyhovuje jen hodnota $u = 25$ (přitom je $k = 3$ a dostáváme pythagorejskou trojici $(3 \cdot 275, 3 \cdot 252, 3 \cdot 373)$).

Pro $v = 25$ nevyhovuje žádná volba u.

Literatura

[1] J. Bečvář: *Sázka mezi Saint-Exupérym a jeho kamarádem, plukovníkem Maxem Gelléem,*
Učitel matematiky 3(1994/95), č. 2(14), 57
(viz též 4(1995/96), č. 2(18), 81)

[2] E. Calda: *K sázce mezi Saint-Exupérym a jeho kamarádem,*
Učitel matematiky 4(1995/96), č. 2(18), 85–87

[3] J. Dittrich: *K sázce Saint-Exupéryho,*
Učitel matematiky 4(1995/96), č. 2(18), 82–84

[4] J. Bečvář: *Hrdinský věk řecké matematiky,*
Historie matematiky I, Sborník ze semináře pro vyučující na středních školách, JČMF, Brno 1994, str. 20–107