Darina Jirotková; Jana Slezáková

Metodické materiály typu nedokončené strategie jako nástroj pro rozvoj schopnosti řešit slovní úlohy

Učitel matematiky, Vol. 31 (2023), No. 1, 30–47

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/151732

METODICKÉ MATERIÁLY TYPU NEDOKONČENÉ STRATEGIE JAKO NÁSTROJ PRO ROZVOJ SCHOPNOSTI ŘEŠIT SLOVNÍ ÚLOHY

Jana Slezáková, Darina Jirotková[1]

Úvod

V článku se budeme zabývat jedním typem materiálů, který jsme nazvaly Nedokončené strategie. Materiál vzniká v rámci projektu TAČR, který je představen v článku Havlíčkové a kol. v tomto čísle (Havlíčková et al., 2023).

Cílem metodických materiálů typu Nedokončené strategie je rozvíjet schopnost hledat efektivní řešitelské strategie k různým typům slovních úloh, a tím pomáhat k rozvoji metakognice.[2] Proto je žákům nabídnuto několik různých strategií řešení jedné slovní úlohy s důrazem na ty, které obsahují nějakou formu vizualizace situace slovní úlohy. Žáci strategie dokončují, pak o nich diskutují, porovnávají je a aplikují na řešení dalších úloh.[3]

V materiálech je žákům předložena úloha s nabídkou částečného nedokončeného řešení několika hypotetických žáků. Úkolem řešitele je úlohu započatým způsobem dořešit, musí tedy strategii

[1]Článek vznikl za podpory projektu TAČR – Podpora integrace matematické, čtenářské a jazykové gramotnosti u žáků základních škol, č. TL03000469.

[2]Metakognice je schopnost uvědomovat si svoje myšlení, přemýšlet o něm a regulovat ho (Flavell, 1979). Kromě toho jsou součástí metakognice znalosti o učebních strategiích a o vlastních učebních preferencích (Fernandez-Duque et al., 2000).

[3]Propojení slovních úloh a metakognice považujeme za velmi efektivní (Veenman & Spaans, 2005). Trénink metakognice totiž zlepšuje schopnost řešit slovní úlohy a naopak, rozvoj schopnosti řešit slovní úlohy má vliv na rozvoj metakognice. Existuje mnoho studií, které ukazují, že metakognici je možné rozvíjet zejména v rámci matematiky (Kramarski & Mevarech, 2003).

porozumět tak, aby ji uměl dovést do konce a najít výsledek. Žáci by měli pracovat ve skupinách, kde sdílejí myšlenky, formulují návrhy na dokončení řešení a potvrzují je, nebo vyvracejí. Následně po dořešení úloh ve skupinách žáci nabídnuté strategie porovnají a kriticky je posoudí. Tímto způsobem poznají různé strategie jedné úlohy. Řešitelské strategie jsme navrhly na základě vlastní zkušenosti s prací se žáky, studenty a učiteli. Zvolily jsme takové, o kterých jsme přesvědčeny, že žákovy zkušenosti s řešitelskými strategiemi obohatí. U každé strategie nabízíme učiteli didaktický rozbor, který mu umožní přizpůsobit výběr strategií úrovni žáků.

Na základě pilotáží materiálů provedených učiteli základní školy navrhujeme dva základní přístupy využití materiálů. V prvním přístupu učitel nejdříve nechává žáky úlohu řešit samostatně, projde si použité strategie a v následující hodině žákům nabídne i ty, které se ve třídě neobjevily. To od něj vyžaduje pečlivou přípravu. Ve druhém přístupu učitel žákům zdůrazní, že není cílem, aby každý úlohu vyřešil sám, ale aby žáci ve skupině dokončili strategie hypotetických žáků a pak je porovnali.

Podobu připravovaných metodických materiálů přiblížíme ilustrací, pro kterou jsme vybraly část popisující práci se dvěma úlohami. Úloha Kolik let je Honzíkovi? se dá přizpůsobit potřebám žáků 2. až 9. ročníku a úloha Supermarket je zpracována pro žáky 7. až 9. ročníku.

Kolik let je Honzíkovi?

Dnes jsou Aničce 2 roky. Až jí bude tolik let, kolik je dnes Honzíkovi, bude Honzíkovi 16 let. Kolik let je dnes Honzíkovi?

Tato úloha je dynamická, protože se odehrává ve dvou různých časech. Obecně jsou dynamické úlohy považovány za náročné (Hejný, 2014, s. 159). Strategie řešení úlohy, které nabízíme žákům a které jsou uvedeny v textu níže, rozpracováváme do tří úrovní. První úroveň je doporučena žákům 2. a 3. ročníku, druhá žákům 4. až 6. ročníku a třetí úroveň nabízíme žákům 7. až 9. ročníku.

Parametry obtížnosti úlohy

I když je text úlohy krátký, úloha obsahuje několik parametrů komplikujících porozumění (z hlediska matematické a čtenářské gramotnosti i z hlediska jazyka):

Práce s časem. Příběh úlohy se odehrává ve dvou různých časech, které označujeme „dnes“ a „potom“ (až bude Honzíkovi 16 let). Při řešení úlohy může nastat problém s grafickým znázorněním plynoucího času. Navíc u mladších dětí je práce s časem v budoucnu náročnější než práce s časem přítomným a minulým. Žáci si při řešení úlohy uvědomují dvě důležité zákonitosti o plynutí času: všichni stárnou stejně rychle a věkový rozdíl dvou osob po uplynutí jistého času je stále stejný.

Konjunkce dvou podmínek. Úloha má dvě podmínky, které je potřeba splnit zároveň (dnes jsou Aničce 2 roky, a potom bude Honzíkovi 16 let).

Složená úloha se dvěma výpočty. Při některých postupech řešení této úlohy je třeba, aby si žáci nejdříve našli údaj, jaká doba uplynula mezi dvěma časy „dnes“ a „potom“. Pro tento výpočet si formulují otázku, která v úloze není vyslovena.

Různá role čísel. V tvrzeních „Dnes jsou Aničce 2 roky.“ A „Honzíkovi bude 16 let.“ můžeme čísla 2 a 16 vnímat jako identifikátory času. V grafickém znázornění jsou to dva různé body na číselné ose. Délka doby, která mezi dnes a potom uplyne, je veličina. Na číselné ose je zobrazena jako délka úsečky, kde jednotková úsečka odpovídá jednomu roku.

Skryté údaje a vazba mezi nimi. Dva časové údaje, které hrají klíčovou roli, tj. věk Aničky „potom“ (až jí bude tolik, kolik je dnes Honzíkovi) a věk Honzíka „dnes“, nejsou vyjádřeny a jeden z nich, věk Honzíka „dnes“, se má zjistit. Rovnost těchto dvou údajů je formulována tvrzením „až jí bude tolik, kolik… “. Tedy věk Aničky „potom“ je roven věku Honzíka „dnes“.

Přítomnost antisignálu. Skutečnost, že oběma dětem nějaké roky přibydou, signalizuje operaci sčítání. Zjistit věk Honzíka „dnes“ ze znalosti jeho věku po uplynutí jisté doby vede však k operaci inverzní, tedy odčítání.

Zjednodušení reálné situace. Žáci mohou mít zkušenost, že jeden den jim je 9 let a sourozenci je 11, tedy je „o 2 roky starší“. Ale zítra jim bude 10 let a sourozenci stále 11, tedy bude pouze „o 1 rok starší“. Od tohoto jevu je nutno odhlédnout.

Používání synonym. Synonyma roky a let mohou být zatěžující zejména pro žáky s odlišným mateřským jazykem.

Z žákova uchopení úlohy (vytvoření obrázku, náčrtu, zápisu, podtržení slov v textu apod.) se odvíjí jeho volba řešitelské strategie a vytvoření matematického modelu (Vondrová, 2019). Tím může být rovnice nebo jen výraz, v němž mohou být číselné údaje vyjádřeny i jinými znaky než čísly (např. písmeny Ad může být označen věk Aničky „dnes“).

Před řešením úlohy

Pro lepší porozumění textu a příběhu úlohy doporučujeme učiteli nejdříve otevřít s žáky diskuzi zejména o uvedených komplikujících parametrech. V závislosti na ročníku může pokládat například tyto otázky: Kolik je ti let? Kolik let je tvému sourozenci? Je mladší nebo starší než ty? O kolik let? Kolik ti bude let, až tvůj sourozenec bude o 1, 2, 3, . . . roky starší, než je dnes? Kolik let bude tvému sourozenci, až tobě bude 30 let?

Druhou skupinou otázek, které se týkají čtenářské a jazykové gramotnosti, je možné se zabývat i v hodinách českého jazyka. Navrhujeme např. následující úkoly: Přeformuluj úlohu, aby v ní bylo použito slovo dnes právě jednou. Přeformuluj úlohu, aby v ní bylo použito slovo let právě jednou. Jak bys vysvětlil kamarádovi, co znamená spojka až? Vytvoř tři věty, ve kterých použiješ obrat „tolik, kolik“. Jak bys úlohu sehrál divadelní scénkou? Vyjmenuj/vyznač v textu všechny osoby a vlastními slovy řekni, co o nich víš.

Po vstupní diskuzi učitel třídu rozdělí do skupin po 3 až 4 žácích a rozdá jim pracovní listy (do každé skupiny jeden) se zadáním úlohy a nedokončenými postupy. Úkol zní: „Dokončete řešení uvedených žáků postupem, který započali. Své řešení budete prezentovat jako skupina.“

Nedokončená řešení úlohy

Nabízíme pět nedokončených řešení uvedené úlohy hypotetických žáků (Aleny, Blanky, Cyrila, Dana a Emilky). Všechny strategie vedou ke správnému závěru, že Honzíkovi je dnes 9 let.

Sehrávka a tabulky, strategie Aleny (A)
Alena: „Já jsem tu úlohu řešila tak, že jsem si s bratrem zahrála, jak utíká čas. Položili jsme na zem čísla 1, 2, . . . , 16, 17, 18 do řady. Ta čísla nám znázorňovala věk. Já jsem hrála Aničku a postavila se na číslo 2. Bratr hrál Honzíka, ale nevěděli jsme, kam se má postavit. Tak jsme to nejdříve jenom odhadli a postavil se na 6. Pak už jsme hráli a zaznamenávali do tabulky (tab. 1). Do prvního řádku jsme zapisovali, jak stárne Anička, a do druhého, jak stárne Honzík. Řekla jsem, že jsem zestárla o jeden rok, a udělala jsem jeden krok na 3. Bratr udělal taky jeden krok na 7 a obě čísla jsme zapsali do tabulky. Tak jsme pokračovali, dokud jsem nedošla na 6, abych byla stejně stará jako bratr na začátku. Tenhle pokus ale nevyšel, protože bratr se nedostal na 16, jak je vidět z naší tabulky (tab. 1).

Tab. 1: První pokus Aleny

Věk Aničky	2	3	4	5	6
Věk Honzíka	6	7	8	9	10

Celý pokus jsme opakovali tak, že jsme změnili odhad věku Honzíka. Pro jistotu jsme si vše opět zapsali do tabulky (tab. 2). Je vidět, že druhý pokus nám také nevyšel, protože bratr v roli Honzíka sice dosáhl 16 let, ale já jako Anička jsem nedosáhla 12 let.

Tab. 2: Druhý pokus Aleny

Věk Aničky	2	3	4	5	6
Věk Honzíka	12	13	14	15	16

Pokračovali jsme dále, vyplňovali další tabulky (tab. 3) a nakonec nám to vyšlo.“

Tab. 3: Další pokus Aleny

Věk Aničky	2	3	4	5	6					
Věk Honzíka										

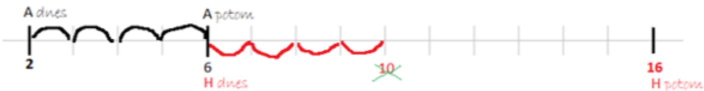
Rozbor strategie Aleny
Popsaná strategie je pokus–ověření–korekce realizovaná sehrávkou. Popis strategie Aleny je dlouhý a tím náročný na porozumění, proto dáváme učiteli na zvážení, do jaké míry žákům pomůže.

Alena si neuměla představit plynutí času a tuto obtíž překonala tak, že si s bratrem situaci sehrála a průběh času ještě zviditelnila tabulkou. (Ta je žákům nabídnuta, protože se jedná podle našich zkušeností o celkem náročnou techniku práce s daty.) Při vyplňování tabulky má Alena příležitost vnímat, že obě děti stárnou stejně rychle.

Očekáváme, že žáci obě sehrávky zopakují. Dva žáci sehrají roli Aničky a Honzíka, provedou oba pokusy včetně záznamů do tabulky a budou pokračovat, dokud se dané podmínky nesplní. To nastane, když je Honzíkovi 9 let. Sémantická zkouška probíhá tak, že Anička stojí na čísle 2 a Honzík na čísle 9 a ve stejném rytmu udělají 7 kroků dopředu (uplyne 7 let) po číselné ose. Anička se dostane na číslo 9, tedy je jí 9 let, a Honzík ve stejnou chvíli na číslo 16, tedy je mu 16 let.

Simulace sehrávky na číselné ose, strategie Blanky (B)
Blanka: „Já jsem si nakreslila časovou osu, podobně jako ji máme nakreslenou na chodbě ve škole. Protože jsou Aničce dneska 2 roky, tak jsem si u čísla 2 napsala *A dnes*. Pak jsem si za každý rok udělala jednu čárku a u 16 jsem si napsala *H potom*. A pak už

jsem začala zkoušet. Když jako uplynul 1 rok, tak jsem si udělala u Aničky a Honzíka oblouček k další čárce. První pokus mi nevyšel, jak je vidět na obrázku (obr. 1), protože Honzíkovi bylo potom jen 10 let, ale má mu být 16. Takhle jsem pokračovala, až mi to vyšlo."



Obr. 1: Sehrávka na číselné ose

Rozbor strategie Blanky

Blanka využila poznatku z předmětu Člověk a jeho svět, že data historických událostí se dají znázornit na časové ose. Řešila problém procesuálně, za každý uplynulý rok udělala u obou aktérů oblouček ve směru zleva doprava. Výsledkem je obrázek, který dává ihned informaci o tom, kolik let uplynulo, kolik let je Honzíkovi a jestli dosáhl 16 let. Tato vizualizace také ukazuje, že obě děti stárnou stejně rychle a že jejich věkový rozdíl se v čase nemění.

Očekáváme, že žáci využijí číselné osy (která symbolizuje časovou osu) od 2 do 16 a zrealizují další pokusy. Protože první pokus skončil, když Honzík došel na číslo 10 (obr. 1), nikoliv na číslo 16, nabízí se zvýšit hledaný Honzíkův věk „dnes" alespoň o 2 roky. Pokud žáci přijdou na efektivní strategii, že Honzík „dnes" musí být zobrazen ve středu úsečky s krajními body v číslech 2 a 16 na číselné ose (tj. 9), znamená to, že si uvědomili, že čas, který uplynul mezi „dnes" a „potom", je pro obě dvě děti stejný. To je klíčová vazba k úlohám tohoto typu.

Zkrácená tabulka, strategie Cyrila (C)

Cyril: „Odhadl jsem věk Honzíka na 6 let. Zjistil jsem, že Anička je o 4 roky mladší než Honzík. Tedy až bude Honzíkovi 16, tak Aničce bude 12. To jsem se nestrefil, protože Aničce mělo být 6. Pro jistotu jsem si to zaznamenal v tabulce (tab. 4). Tam jsem si znázornil červeným rovnítkem, že věk Aničky „potom" se musí rovnat věku Honzíka „dnes". Pokračoval jsem, až mi to vyšlo a rovnost platila."

Rozbor strategie Cyrila

Cyril si pravděpodobně po několika pokusech všiml, že věk Honzíka „dnes“ se musí rovnat věku Aničky „potom“. To vyznačil tak, že spojil červenou čarou dvě pole tabulky (tab. 4), ve kterých by měla být stejná čísla. Využil poznatku, že věkový rozdíl obou dětí je stále stejný. Použil metodu pokus–ověření–korekce a z tabulky je patrné, že první pokus mu nevyšel, neboť 6 se nerovná 12.

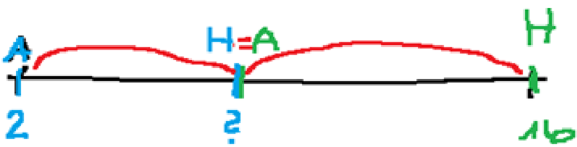
Tab. 4: Řešení Cyrila

1. pokus	dnes	potom
Věk Aničky	**2**	12
Věk Honzíka	6	**16**

Očekáváme, že žáci budou pokračovat v metodě pokus–ověření–korekce tak dlouho, dokud odhadnutý věk Honzíka „dnes“ nebude stejný jako vypočítaný věk Aničky „potom“.

Číselná osa, strategie Dana (D)

Dan: „Já jsem si namaloval tu situaci pomocí časové osy (obr. 2). Vyznačil jsem si věk Aničky dnes (2) modře a Honzíka potom (16) zeleně. Pak jsem odhadnul, kolik asi je dnes Honzíkovi, a vyznačil jsem si to opět modře. Červeným obloučkem jsem vyznačil, o kolik let musela Anička zestárnout, aby dosáhla věku Honzíka dnes, a tím jsem si hned uvědomil, že úplně stejným obloučkem je potřeba vyznačit ...... A pak už jsem to snadno dořešil.“



Obr. 2: Vztahy na číselné ose

Rozbor strategie Dana

Dan znázornil situaci pomocí číselné osy, na níž si vyznačil klíčové údaje, tj. modré A u čísla 2 (věk Aničky „dnes“) a zelené H u čísla 16 (věk Honzíka „potom“). Modré H (věk Honzíka „dnes“) odhadl někde mezi 2 a 16. Průběh stárnutí Aničky si uvědomil při zakreslování červeného obloučku mezi modrými A a H. Při vyznačení, že modré H je rovno zelenému A (věk Aničky „potom“), si uvědomil, že oblouček mezi zelenými písmeny A a H musí být „stejný“ jako mezi modrými A a H. Proto ho také zakreslil červeně. Jinými slovy, Dan přišel na klíčový poznatek, že obě děti stárnou stejně rychle a že jejich věkový rozdíl se s časem nemění.

Úkolem žáků je přijmout myšlenku, že oba červené obloučky jsou stejně dlouhé, i když na obrázku je tato situace v žákovském provedení zakreslena nepřesně. Z toho vyplyne, že věk Honzíka „dnes“ (modré H) a věk Aničky „potom“ (zelené A) se rovnají, a písmena zelené A a modré H tedy označují střed úsečky s krajními body 2 a 16. Červený oblouček tudíž představuje délku uplynulé doby 7 let, tj. polovinu ze 14 let ($14 = 16 - 2$), a u modrého H a zeleného A musí být zapsáno číslo 9.

Tabulka a rovnice, strategie Emilky (E)

Emilka: „Nevěděla jsem, kolik je Honzíkovi dnes. Tak jsem si do tabulky (tab. 5) napsala u Honzíka dnes H. Anička potom má být stejně stará, jako je Honzík dnes, proto jsem si H napsala ještě ...... a pak už jsem uměla sestavit rovnici.“

Tab. 5: Řešení Emilky

	dnes	potom
Věk Aničky	2	
Věk Honzíka	H	16

Rozbor strategie Emilky

Emilka si uvědomila rovnost čísel, která vyjadřují věk Honzíka „dnes“ a věk Aničky „potom“. K sestavení rovnice si ještě díky uspořádání údajů v tabulce uvědomila, že čas mezi „dnes“ a „potom“ je stejný jak u Aničky, tak u Honzíka a že věkový rozdíl mezi Aničkou a Honzíkem dnes je stejný jako mezi Aničkou a Honzíkem potom.

Očekáváme, že žáci doplní do buňky „Anička potom“ písmeno H a že z faktu, že rozdíl věků Aničky a Honzíka dnes je stejný jako potom, sestaví rovnici $\mathrm{H} - 2 = 16 - \mathrm{H}$ a vyřeší ji. Stejnou rovnici dostaneme, když využijeme toho, že mezi „dnes“ a „potom“ uplynula stejně dlouhá doba jak Aničku i Honzíka.

Diferenciace práce s úlohou podle úrovně žáků

Nabídnuté strategie postupně gradují podle míry abstrakce vizualizace situace – od sehrávky situace a řešení metodou pokus–ověření–korekce, přes grafickou simulaci sehrávky na číselné ose a vyznačení vztahů mezi čísly na číselné ose po vyznačení vztahů mezi čísly pouze do tabulky. Tabulka ve strategii Emilky je důležitým východiskem pro sestavení rovnice, ke které směřujeme. Pro žáky ze starších ročníků, kteří mají obtíže si situaci představit a nějak uchopit vztahy mezi číselnými údaji, je vhodná i strategie Aleny nebo Blanky. A naopak, pro některé žáky mladších ročníků může být strategie Aleny pro svou pracnost a časovou náročnost nepřínosná. Je tedy třeba zvažovat jak úroveň celé třídy, tak jednotlivých žáků. Podle našich zkušeností založených na prvních pilotážích úlohy v hodinách matematiky navrhujeme pro 2. a 3. ročník nabídnout strategie A a B, pro 4. až 6. ročník strategie A, B, C a D a pro 7. až 9. ročník strategie C, D a E. Pro 7. až 9. ročník doporučujeme čísla a rozdíl mezi nimi zvětšit (např. 14 a 32, nebo 31 a 57), aby se ztížilo řešení vhledem.

Sdílení

Po vyřešení úkolu je důležité, aby si žáci zvědomili a upevnili strategie, s nimiž se seznámili. K tomu účelu navrhujeme, aby jednotlivé skupiny sdílely použité postupy řešení a aby je vzájemně porovnávaly. Mnozí žáci teprve při diskuzi dojdou k hlubšímu porozumění, o co vlastně v úloze šlo. Proto až po společné diskuzi dáváme žákům reflektivní dotazník, v němž mají zhodnotit předložené strategie, zdůvodnit své preference, vyjádřit se k problémům, na něž při řešení narazili, apod. Pokud úlohu nejdříve řešili samostatně, pak mají svou strategii ještě porovnat s dalšími předloženými strategiemi.

Další úlohy

Ve fázi upevňování strategií učitel nabídne žákům další úlohy a poukáže na to, jakou strategií mají úlohu řešit, nebo volbu nechá na žácích. Některé návrhy úloh uvedeme.

U1: Anička nastoupila do výtahu v mrakodrapu v 19. podlaží. Když vystupovala, potkala Honzíka. Anička řekla: „Až ty vyjedeš tolik pater, co jsem vyjela já, abychom se potkali, tak budeš ve 37. podlaží.“ Ve kterém podlaží se potkali? (Výsledek: Potkali se ve 28. podlaží. Každý z nich vyjel 9 podlaží. Úlohu lze řešit všemi popsanými strategiemi.)

U2: Honzík a Anička přinesli domů kaštany. Anička měla 4 kaštany. Babička řekla, tady máš další kaštany, abys jich měla stejně jako Honzík. Ale Honzík řekl: Mně musíš také přidat tolik kaštanů, kolik jsi přidala Aničce. Honzík jich měl nakonec 26. Kolik kaštanů si přinesl domů Honzík? (Výsledek: Honzík si přinesl domů 15 kaštanů. Babička každému přidala 11 kaštanů. Úlohu lze řešit všemi popsanými strategiemi. Úlohy se liší tím, že místo čísla v roli veličiny v původní úloze je zde číslo udávající počet kaštanů.)

U3: Anička má 2 kaštany, Honzík 16 kaštanů. Kolik má dát Honzík kaštanů Aničce, aby jich měli oba stejně? (Výsledek: 7 kaštanů. Matematický model úlohy je stejný jako u původní úlohy, ale původní úloha je dynamická (čísla v ní jsou veličinami, v této úloze znamenají čísla počet). Je možné použít novou manipulativní strategii: odebíráme kaštany Honzíkovi a přidáváme je Aničce tak dlouho, dokud nebudou mít stejně.)

Supermarket

Z hygienických důvodů byla v době pandemie covid-19 nastavena v supermarketech nová pravidla. Jedno z pravidel znělo: Na 24 m^2 nesmí být v průměru nikdy více než 5 zákazníků. Místní supermarket má rozlohu 840 m^2. Vedoucí supermarketu se rozhodli, že tento požadavek splní tím, že omezí počet košíků, a vydali příkaz, že každý zákazník si musí vzít jeden košík. Kolik košíků maximálně mohou v prodejně pro zákazníky nachystat?

Úloha je určena pro žáky 7. až 9. ročníku. Žáci řeší úlohu na přímou úměrnost a případně mohou i využít procedury naučené u typových úloh – trojčlenku. V nabízených strategiích je i strategie založená na vizuálním situačním modelu úlohy (balíčky), dvě strategie založené na tvorbě tabulky, které umožňují vidět vazbu mezi rozlohou a počtem lidí, a jedna strategie založená na výpočtu (počítání přes jednotku).

Parametry obtížnosti úlohy

Text úlohy je poněkud dlouhý a obsahuje parametry komplikující porozumění:

Neznámý tvar obrazce. Tvar zastavěné plochy supermarketu není dán, je dána pouze jeho rozloha. To může komplikovat situaci těm žákům, kteří by si chtěli vytvořit náčrtek půdorysu supermarketu a v něm vyznačovat části s obsahem 24 m^2.

Dvojí negace a kvantifikátor. Je obtížné z vyjádření „. . . nesmí být . . . nikdy více než . . . “ zjistit, že na 24 m^2 má být v průměru méně než pět nebo pět zákazníků.

Kvantifikátory. V úloze se vyskytují tři kvantifikátory, které nejsou čísly (*maximálně*, *každý*, *nikdy*). Zejména práce s obecnými kvantifikátory (*každý*, *nikdy*) bývá pro žáky náročná, zvláště když se vyskytují v negaci. Slovo *maximálně* si žáci mohou vyjasnit přeformulováním na slovo *nejvýše*.

Vztah mezi počtem zákazníků a počtem košíků. Na konci úlohy je otázka na počet košíků, ale formulace podmínky se týká počtu zákazníků. Vazba mezi zákazníkem a košíkem je formulovaná v poslední ze tří vedlejších vět v souvětí složeném z pěti vět. Žáci se slabší čtenářskou gramotností tedy tuto vazbu nemusí zachytit.

Dvě role čísla. V úloze se vyskytují čísla ve dvou rolích – veličina (rozloha obchodu a jeho části) a počet (počet zákazníků a košíků). Počet se vizualizuje dobře, veličina nikoliv.

Neznámá slova. Pilotáže ukázaly, že někteří žáci neznají slovo supermarket, které se v úloze vyskytuje třikrát (a jednou je uvedeno synonymum prodejna).

Před řešením úlohy

Nejdříve učitel otevře diskuzi s žáky, jejímž cílem je usnadnit žákům porozumění textu, např. těmito otázkami: „Jak si představuješ supermarket? Co to znamená rozloha supermarketu? Některé obchody musí být o svátcích zavřené. Víš jaké? Odhadni, zda supermarket, do kterého chodíš, je větší než tento. Jaká je rozloha Tvého pokoje? Je větší, či menší než $24\,\mathrm{m}^2$? Vysvětli svými slovy pravidlo, ke kterému se rozhodli v supermarketu. Přeformuluj úlohu pro spolužáka, který úloze nerozumí. O co v úloze jde?“

Pro druhý stupeň základní školy doporučujeme, aby se učitel matematiky domluvil s učitelem českého jazyka, který může úlohu využít k diskuzi z hlediska čtenářské a jazykové gramotnosti: „Označ slova, která považuješ za slova cizí a za slova přejatá. (Podklad pro učivo o původu slov – u některých zdomácnělých slov už cizí původ nepociťujeme.). Nahraď slovo *maximálně* českým synonymem. Najdi v textu souvětí složené a proveď jeho větný rozbor. Vysvětli, co znamená sousloví *hygienické důvody*, slovo *pandemie*, slovo *supermarket* a co znamená *nikdy více než*? Čemu ještě nerozumíš?“

Nedokončená řešení

K této úloze nabízíme čtyři různá nedokončená řešení uvedené úlohy čtyřmi hypotetickými žáky (Alice, Borise, Cecilky a Dany). V jedné hodině učitel nabídne první tři, poslední může využít v následující hodině. Všechny strategie vedou ke stejnému závěru: V prodejně mohou nachystat maximálně 175 košíků.

Dlouhá tabulka, strategie Alice (A)
Alice: „Já jsem si udělala takovou tabulku a z ní jsem to snadno dostala.“ (tab. 6)

Tab. 6: Dlouhá tabulka Alice

rozloha v m^2	24	48	72						
počet lidí	5	10	15						

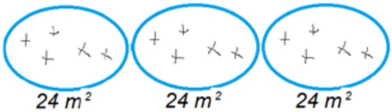
Rozbor strategie Alice
Alice si vypracovala tabulku, do které postupně zapisovala, kolik zákazníků by mohlo být maximálně v prodejně, kdyby prodejna měla rozlohu 24 m^2, 48 m^2, 72 m^2 apod. Strategie je procesuální; zachycuje postupné zvětšování rozlohy prodejny a počtu zákazníků, kteří mohou do prodejny vstoupit. Alice ještě neumí zapsat přímou úměrnost pomocí trojčlenky. Používá sice pracný, ale srozumitelný způsob řešení. S podobnou tabulkou se žáci setkávají, když se seznamují s přímou úměrností.

Očekáváme, že žák porozumí principu doplňování dalších sloupců tabulky a bude ji doplňovat tak dlouho, dokud nedosáhne čísla 840 v prvním řádku (m^2). Doplní 32 sloupečků počínaje číslem 96 v horním řádku (tab. 7). V dolním řádku tedy skončí číslem 175, což je řešení úlohy. Žák může ovšem dospět i k nějakému zobecnění a tabulku doplňovat např. po dvou či třech krocích.

Tab. 7: Dokončení řešení Alice

rozloha v m^2	24	48	72	96	120	...	792	816	840
počet lidí	5	10	15	20	25	...	165	170	175

Balíčky, strategie Borise (B)
Boris: „Já jsem si udělal takové balíčky (obr. 3). Každý z nich má 24 m^2 a do toho jsem si udělal vždy 5 křížků. Pak už mi bylo jasné, že mám nejdříve dělit ...... a pak ....“



Obr. 3: Balíčky

Rozbor strategie Borise
Boris vizualizuje zákazníky pomocí křížků a skupiny lidí povolených na 24 m^2 pomocí balíčků. Stačilo mu nakreslit si tři balíčky a bylo mu zřejmé, že jich musí udělat tolik, aby pokryl plochu 840 m^2. Přišel na to, že počet balíčků dostane, když vydělí $840 : 24 = 35$.

Očekáváme, že žák pozná, že nejdřív se musí zjistit počet balíčků (35), a toto číslo pak vynásobí „počtem zákazníků v jednom balíčku“, tedy $35 \cdot 5 = 175$, což je správný výsledek.

Výpočet přes jednotku, strategie Cecilky (C)
Cecilka: „Já jsem si vydělila 24 pěti, a abych dostala správný výsledek, tak jsem znovu dělila ....“

Rozbor strategie Cecilky
Cecilka si uvědomila, že tím, že číslo 24 (m^2) vydělí číslem 5, získá počet m^2 požadovaných na jednoho zákazníka, což je 4,8 m^2. Počítala přes jednotku stejně, jak se to často dělá v úlohách na procenta. Pomocí dělení celé rozlohy supermarketu rozlohou požadovanou na jednoho zákazníka (4,8 m^2) získala požadovaný výsledek.

Očekáváme, že si žák uvědomí, že vydělením rozlohy 24 m^2 počtem zákazníků (5) získá rozlohu povolenou na jednoho zákazníka ($24 : 5 = 4{,}8$). Tímto číslem pak vydělí rozlohu celého obchodu, $840 : 4{,}8 = 175$, což udává maximální počet zákazníků v obchodě. Žáci pak provedou sémantickou zkoušku, kterou prověří správnost výsledku: V prodejně připraví 175 košíků, takže tam může být maximálně 175 zákazníků. Víme, že na 24 m^2 může být průměrně 5 zákazníků. Takových pětic zákazníků bude 35 (175 : 5) a ty potřebují 840 m^2 ($35 \cdot 24$ m^2) rozlohy obchodu.

Tabulka, strategie Dany (D)
Dana: „Já jsem si udělala tuto tabulku (tab. 8). Řekla jsem si, že stačí těch 120 vynásobit 7, abych dostala 840, a pak je vše jasné.“

Tab. 8: Řešení Dany

počet m^2	počet zákazníků
24	5
48	10
72	15
96	20
120	25
840 ($7 \cdot 120$)	

Rozbor strategie Dany
Dana si všimla, že vazby mezi čísly v prvním sloupci (např. $96 = 4 \cdot 24$) jsou stejné jako mezi odpovídajícími čísly ve druhém sloupci tabulky (tedy $20 = 4 \cdot 5$). Zjistila, že 840 je sedminásobek čísla 120, a z toho vypočítala chybějící číslo v tabulce.

Očekáváme, že žáci použijí ve druhém sloupci tabulky to, co Dana říká o vazbě mezi číslem 120 a 840 v prvním sloupci tabulky. Když je 840 sedminásobek čísla 120, tak také hledané číslo v tabulce musí být sedminásobkem čísla 25, což je 175.

Po vyřešení úlohy
Po vyřešení úlohy můžeme žákům nabídnout další úlohy. Některé uvedeme.

U1: Ze 75 ml malinového koncentrátu připravíme 3 litry šťávy. Kolik ml koncentrátu potřebujeme na přípravu 15 litrů šťávy? (Výsledek: 375 ml. Lze řešit všemi čtyřmi uvedenými strategiemi.)

U2: V receptu na ovocný koláč je uvedeno: na jeden koláč pro 8 lidí je potřeba $\frac{3}{4}$ kg meruněk. V jídelně chtějí upéct koláč pro 400 žáků. Kolik kg meruněk si mají v kuchyni opatřit? (Výsledek: 37,5 kg meruněk. Lze řešit všemi čtyřmi uvedenými strategiemi.)

U3: Na oslavu přijde 80 hostů, budou sedět po 4 u každého stolu. Na každý stůl chce hostitel dát misku s 250 g oříšků. Kolik oříšků má hostitel nakoupit? (Výsledek: 5 000 g oříšků. Lze řešit všemi čtyřmi uvedenými strategiemi.)

U4: Novákovi se rozhodli na svém poli o rozloze 0,75 ha pěstovat brambory. Doporučené množství sadbových brambor je 0,3 t na 1 ha pozemku. Z odborné literatury vyčetli, že maximální výnos je třicetinásobný. Kolik tun brambor maximálně vypěstují? (Výsledek: 6,75 tun brambor. Lze řešit strategiemi C a D.)

Závěr

Skutečnost, že slovní úlohy na 1. stupni základní školy stále patří mezi závažná kritická místa ve vyučování matematice, dokládají výsledky výzkumu Jirotkové a Kloboučkové (2013). Jako nejčastější příčinu problémů učitelé uvádí žákovo neporozumění slovní úloze, což mnohdy interpretují jako nedostatek logického myšlení žáků. Učitelé 2. stupně se vyjadřují podobně a upozorňují na „nedostatky v konceptuálním porozumění, tedy nepochopení textu ve smyslu utvoření si představy o situaci a podstatě problému.“ (Vondrová & Žalská, 2013, s. 97). I když výzkum popsaný v publikaci (Rendl et al., 2013) proběhl již před deseti lety, domníváme se, že od té doby nedošlo k velkým změnám. Proto hledáme způsoby, jak pomoci učitelům zlepšit žákovo porozumění slovním úlohám, jak zlepšit vztah žáků ke slovním úlohám a rozšířit povědomí o tom, že neexistuje jediný správný způsob řešení dané úlohy.

Materiály typu Nedokončené strategie byly dosud pilotovány osmnácti učiteli. Potvrdili nám, že žáci nejsou zvyklí s tímto typem úloh pracovat a že je pro ně obtížné pochopit strategii, kterou navrhuje někdo jiný. Někteří z nich zdůraznili důležitost opakovaného použití materiálu: „Pokud si žáci na tento způsob práce se slovní úlohou zvyknou, začnou si uvědomovat, proč je důležité diskutovat o různých způsobech řešení, jak je důležité, aby poznali, jak jinak řešil stejnou úlohu spolužák nebo hypotetický žák. Obohacují si tak svůj repertoár přístupů a strategií a uvažují nad tím, kdy je efektivní jistou strategii využít.“ Tato vyjádření učitelů potvrzují, že u některých žáků dochází i k rozvoji metakognice. Tento rozvoj se snažíme podpořit i tím, že v rámci společné diskuze a dotazníku mají žáci různé strategie porovnávat a snažit se je pochopit a toto své pochopení si následně upevňují při řešení dalších slovních úloh.