José Marcial Nájares Romero

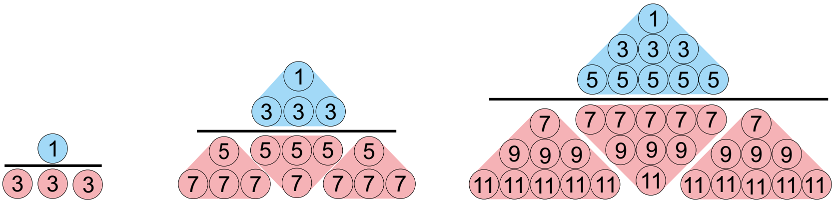
Zobecnění kritéria dělitelnosti třemi a devíti

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 98 (2023), No. 4, 43–47

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/152004`

Analogickým způsobem je možné odvodit celou řadu dalších (i mnohem komplikovanějších) identit, jejichž důkaz obvyklým způsobem (formální úpravou konečných sum) by byl pracný a zdlouhavý.

Poznamenejme ještě, že v [2] najdeme jiné zdůvodnění rovnosti (1), které vychází z obr. 6.



Obr. 6

Čtenář si může vyzkoušet, jak by zdůvodnil výše uvedené identity pomocí takových „trojúhelníkových“ obrázků.

Literatura

[1] Čerňanová, V.: Nepárne čísla v zlomkoch. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 98 (2023), č. 2, s. 1–6.

[2] Nelsen, R. B.: *Proofs Without Words.* The Mathematical Association of America, Washington, 1993.

Zobecnění kritéria dělitelnosti třemi a devíti

José Marcial Nájares Romero, ZŠ Gutova Praha 10

Kritéria dělitelnosti daného přirozeného čísla n prvočíslem 3 či číslem 9 jsou známá již ze základní školy:

Věta 1. *Číslo n, zapsané v desítkové soustavě, je dělitelné třemi (devíti) právě tehdy, když je součet všech jeho cifer dělitelný třemi (devíti).*

Tedy, je-li

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0, \tag{1}$$

pak n je dělitelné třemi (devíti) právě tehdy, když součet $\sum_{t=0}^{k} a_t$ je dělitelný třemi (devíti).

Příklad 1. Číslo $n = 781\,260$ je dělitelné třemi, ale není dělitelné devíti, protože součet cifer je roven $7+8+1+2+6+0 = 24$, což je číslo dělitelné třemi, ale nikoliv devíti.

Tento postup lze zobecnit pro libovolné přirozené dělitele d čísla n využitím eukleidovského dělení.

Věta 2. *Nechť d je přirozené číslo a t je celé nezáporné číslo. Pak existují jednoznačně daná celá čísla q_t a r_t tak, že*

$$10^t = d \cdot q_t + r_t, \quad 0 \le r_t < d. \tag{2}$$

Odtud již vidíme, že n s desítkovým zápisem (1) může být zapsané ve tvaru:

$$n = \sum_{t=0}^{k} a_t \cdot (d \cdot q_t + r_t) = d \cdot \sum_{t=0}^{k} a_t \cdot q_t + \sum_{t=0}^{k} a_t \cdot r_t. \tag{3}$$

Dostáváme tedy tvrzení:

Věta 3. *Číslo n s desítkovým zápisem (1) je dělitelné přirozeným číslem d právě tehdy, když je číslem d dělitelný součet*

$$a_k \cdot r_k + a_{k-1} \cdot r_{k-1} + \cdots + a_1 \cdot r_1 + a_0 \cdot r_0, \tag{4}$$

kde r_t je definováno v (2) pro $0 \le t \le k$.

Uveďme si rovnou ještě vylepšenou variantu kritéria z věty 3. Tvrzení plyne ze stejných argumentů jako výše, jen si navíc musíme uvědomit, že $10^t = d \cdot q_t + r_t \Leftrightarrow 10^t = d \cdot (q_t + 1) + (r_t - d)$.

Věta 4. *Číslo n s desítkovým zápisem (1) je dělitelné číslem d právě tehdy, když je číslem d dělitelný součet*

$$a_k \cdot r_k^* + a_{k-1} \cdot r_{k-1}^* + \cdots + a_1 \cdot r_1^* + a_0 \cdot r_0^*, \tag{5}$$

kde pro $0 \le t \le k$ je r_t definováno v (2) a $r_t^* = r_t$, nebo $r_t^* = r_t - d$.

- Pro $d = 3$ a $d = 9$ jsou všechna $r_t = 1$ a kritérium je velmi užitečné.
- Pro $d = 11$ máme $r_t = r_t^* = 1$ pro sudá t a $r_t = 10$ a $r_t^* = -1$ pro lichá t. Použitím věty 4 dostáváme kritérium, které se vyučuje ve škole: *číslo n je dělitelné 11 právě tehdy, když rozdíl součtu cifer na lichých místech a součtu cifer na sudých místech je dělitelný 11.*

Příklad 2. Číslo $n = 781\,264$ je dělitelné 11, protože $-7+8-1+$ $+2-6+4=0$ je číslo dělitelné 11.

- Pro $d = 7$ je

t	$6s$	$1+6s$	$2+6s$	$3+6s$	$4+6s$	$5+6s$
r_t	1	3	2	6	4	5
r_t^*	1	3	2	-1	-3	-2,

kde $s = 0, 1, \ldots$

Porovnejme aplikaci kritéria pro dělitelnost sedmi z věty 3 a věty 4.

Příklad 3. Nechť $n = 1\,865\,654$. Podle věty 3 je n dělitelné sedmi, právě když je číslo $1\cdot 1+8\cdot 5+6\cdot 4+5\cdot 6+6\cdot 2+5\cdot 3+4\cdot 1=126$ dělitelné sedmi, a to dělitelné je: $126 = 18\cdot 7$. Podle věty 4 je n dělitelné sedmi, právě když je číslo $1\cdot 1+8\cdot(-2)+6\cdot(-3)+5\cdot(-1)+6\cdot 2+5\cdot 3+4\cdot 1=-7$ dělitelné sedmi. Snad je tedy jasné, v čem spočívá výhoda věty 4 zejména pro počítání v ruce: zbytky r_t^* si můžeme volit tak, aby $r_t \geq |r_t^*|$.

Příklad 4. Ukázat pomocí věty 4 dělitelnost sedmi může být zdlouhavé. Uvažujme $n = 6\,231\,887\,919\,328\,651\,846$. Ukázat, že n je dělitelné sedmi, znamená podle věty 4 ukázat, že je dělitelné sedmi číslo

$$\begin{aligned}
&6\cdot 1+2\cdot(-2)+3\cdot(-3)+1\cdot(-1)+8\cdot 2+8\cdot 3+\\
&+7\cdot 1+9\cdot(-2)+1\cdot(-3)+9\cdot(-1)+3\cdot 2+2\cdot 3+\\
&+8\cdot 1+6\cdot(-2)+5\cdot(-3)+1\cdot(-1)+8\cdot 2+4\cdot 3+6\cdot 1=35.
\end{aligned}$$

Výhodnější je zapsat číslo n v soustavě o základu $10^6 = 1\,000\,000$, tj. ve tvaru

$$n = 6\cdot 10^{18} + 231\,887\cdot 10^{12} + 919\ 328\cdot 10^6 + 651\,846,$$

a využít faktu, že číslo $10^{6s}-1$ je dělitelné sedmi pro všechna $s = = 0, 1, 2, \ldots$ Číslo n je tedy dělitelné sedmi, právě když je dělitelné sedmi číslo $6 + 231887 + 919\,328 + 651\,846 = 1\,803\,067$. Opět aplikujeme stejné kritérium a máme, že n je dělitelné sedmi, právě když $1 + 803\ 067$ je dělitelné sedmi. A tím dostaneme číslo o šesti cifrách 803 068, které je podle věty 4 dělitelné sedmi, právě když $8 \cdot (-2) + 0 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 8 \cdot 1 = 7$ je dělitelné sedmi.

Výhodné je rovněž zapsat číslo n v soustavě o základu 10^3:

$$n = 6 \cdot 10^{18} + 231 \cdot 10^{15} + 887 \cdot 10^{12} + 919 \cdot 10^{9} + 328 \cdot 10^{6} + 651 \cdot 10^{3} + 846.$$

V tomto případě využijeme fakt, že číslo $10^{3s} - 1$ je dělitelné sedmi pro s sudé a číslo $10^{3s} + 1$ je dělitelné sedmi pro s liché. Dostáváme tudíž analogické kritérium jako pro dělitelnost 11 pro číslo v desítkovém zápisu. Stačí zkontrolovat, že je dělitelný sedmi součet cifer se střídavými znaménky:

$$6 + 231(-1) + 887 + 919(-1) + 328 + 651(-1) + 846 = 266 = 38 \cdot 7.$$

Úloha 1. Stejně jako jsme určovali dělitelnost čísla prvočíslem 7, rozhodněte, zda číslo $n = 47\,318\,800\,193\,208\,050\,806$ je dělitelné 13. Poznamenejme, že v tomto případě je $r_t = 1$ pro $t = 6s$, $r_t = 10$ pro $t = 1 + 6s$, $r_t = 9$ pro $t = 2 + 6s$, $r_t = 12$ pro $t = 3 + 6s$, $r_t = 3$ pro $t = 4 + 6s$ a $r_t = 4$ pro $t = 5 + 6s$, kde $s = 0, 1, \ldots$

Nyní jsme připraveni popsat obecně postup, který využívá rozdělení desítkového zápisu čísla na „bloky“, tj. zápisu čísla n v soustavě s vhodným základem 10^b.

Nechť b je přirozené číslo. Zapišme číslo n v soustavě o základu 10^b

$$n = B_k \cdot 10^{kb} + B_{k-1} \cdot 10^{(k-1)b} + \cdots + B_1 \cdot 10^b + B_0, \tag{6}$$

kde $B_t \in \{0, 1, \ldots, 10^b - 1\}$ pro $0 \leq t \leq k$, tedy B_t získáme nasekáním desítkového zápisu n z (1) na bloky o b cifrách.

Příklad 5. Jak jsme již viděli, např. $n = 6\,231\,887\,919\,328\,651\,846$ má zápis v bázi 10^6 roven $n = 6 \cdot 10^{18} + 231\,887 \cdot 10^{12} + 919\,328 \cdot 10^6 + 651\,846$.

Pro $t \geq 0$ definujme eukleidovským dělením r_t:

$$10^{tb} = d \cdot q_t + r_t, \quad 0 \leq r_t < d\,. \tag{7}$$

Tím jsme připraveni formulovat slibované tvrzení:

Věta 5. *Nechť $b \in \mathbb{N}$. Číslo n s desítkovým zápisem (1) je dělitelné přirozeným číslem d právě tehdy, když je d dělitelný součet*

$$B_k \cdot r_k + B_{k-1} \cdot r_{k-1} + \cdots + B_1 \cdot r_1 + B_0 \cdot r_0,$$

kde čísla B_t a r_t pro $0 \leq t \leq k$ jsou definována pomocí (6) a (7).

Důkaz. Stačí n zapsat s využitím (7) ve tvaru

$$n = \sum_{t=0}^{k} B_t \cdot (d \cdot q_t + r_t) = d \cdot \sum_{t=0}^{k} B_t \cdot q_t + \sum_{t=0}^{k} B_t \cdot r_t.$$

Pak je zřejmé, že n je dělitelné d, právě když $\sum_{t=0}^{k} B_t \cdot r_t$ je dělitelné d.

Použití jsme ilustrovali v příkladu 4, když jsme číslo n zapsali v bázi 10^6, resp. 10^3.

Důležitý je speciální případ, kdy $r_1 = 1$, tj. $10^b - 1$ je dělitelné d. Dosazením $x = 10^b$ v rovnosti

$$x^t - 1 = (x-1) \cdot (x^{t-1} + x^{t-2} + \cdots + x + 1)$$

odvodíme, že $r_t = 1$ pro každé $t \in \{0, 1, \ldots, k\}$, a tedy můžeme formulovat následující důsledek.

Důsledek 6. *Jestliže se zbytek r_1 ve větě 5 rovná 1, pak číslo d dělí n právě tehdy, když d dělí součet cifer $\sum_{t=0}^{k} B_t$.*

Úloha 2. Dokažte, že číslo $n = 102\,345\,678\,987\,654\,321$ je dělitelné 17. Pro $b = 16$ dostaneme aplikací důsledku 6: 17 dělí n, právě když 17 dělí $10 + 2\,345\,678\,987\,654\,321 = 2\,345\,678\,987\,654\,331 =: n_1$. Čtenáři doporučujeme pro ověření dělitelnosti n_1 číslem 17 aplikovat větu 5 pro $b = 4$, případně opakovaně.

Závěrem poznamenejme, že pro každé prvočíslo $d \neq 2$ a $d \neq 5$ existuje b tak, že d dělí $10^b - 1$, tj. $r_1 = 1$. Malá Fermatova věta zaručuje, že takové $b \leq d - 1$ existuje, protože d dělí $10^{d-1} - 1$. Opakovanou aplikací věty 5 lze tedy převést problém dělitelnosti libovolného přirozeného čísla prvočíslem d na dělitelnost čísla, které má nejvýše $d - 1$ cifer. Poté je vhodné aplikovat větu 5 pro nějaké vhodné menší b, případně rovnou větu 4. Právě tak jsme postupovali v příkladu 4.

Pro další zajímavosti k tématu dělitelnosti doporučujeme článek [1].

Poděkování

Velké poděkování patří redaktorům Rozhledů za jejich konečnou úpravu článku, především za jejich formulace definic a tvrzení.

Literatura

[1] Slavík, A.: Méně známá kritéria dělitelnosti. In: *Rozvíjení matematické gramotnosti na středních školách II.* MatfyzPress, Praha, 2019, s. 93–102.