Bernard Bolzano a jeho význam v mathematice

II. [Vědecká práce Bolzanova v náboženství, filozofii a v matematice]

In: Karel Petr (author): Bernard Bolzano a jeho význam v mathematice. Přednáška, kterou proslovil nastupující rektor Karlovy University PhDr. Karel Petr. (Czech). Praha: UK Praha [?], 1926. pp. 12--19.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400452

že nejedná se tu o to, jak věc sama o sobě jest, nýbrž jaká představa o ní jest nejpůsobivější (erbaulichste), a bylo na snadě tuto zásadu použíti i v jiných obdobných případech. O Lindovi, kterého profesor Masaryk označil za spolupracovníka na R. Z. a Svobodovi, příteli Hankově, kterého rovněž někteří pokládali za pomocníka při spisování R. K., jest známo, že byli Bolzanovými žáky.*) Svoboda výslovně přiznává, že kněz a učitel B. Bolzano, zbožňovaný ideál studentstva pražského, mocně a rozhodně na něj působil a praví doslovně o něm, že „svým idealistickým filantropismem a novokřesťanským humanitismem sta a sta nejlepších hlav a srdcí odchoval v Čechách".**)

II.

Přejdu nyní k vědecké a literární činnosti Bolzanově. Tato týkala se výhradně vědy náboženské, filosofie a mathematiky. Hlavní spisy, které za života jeho vyšly, jsou Lehrbuch der Religionswissenschaft (4 sv.) a Bolzano's Wissenschaftslehre (4 sv.). Obě tato veliká díla byla vydána Bolzanovými žáky a přáteli v Sulzbachu v létech 1834 a 1837, prvé anonymně. Není mi známo, zda Bolzano při vydání jich nějak spolupůsobil. V Rakousku bylo censuře zakázáno povoliti tisk jiných Bolzanových spisů než mathematických a teprve po roku 1837 vyšly v Praze kratší práce jeho z estetiky a obsahu biografického. Vedle uvedených velkých děl***) vyšla řada menších obsahu filosofického, theologického, fysikálního a mathematického. Pro nás mají v dnešní přednášce důležitost pouze práce mathematické. Tyto vztahují se ponejvíce k základům vědy mathematické, objasňujíce hlavní methody pro hledání a poznávání pravdy v mathematice. Souvisí velmi úzce s Bolzanovou Wissenschaftslehre (logikou), v níž pojednával Bolzano o hledání a poznávání pravdy se stanoviska obecného; jeho vyšetřování mathematická pak jsou často použitím těchto obecných a byla patrně Bolzanovi prostředkem k jich verifikaci, a naopak, vyšetřování mathematická zase dávala Bolzanovi podněty k novým koncepcím logickým a filosofickým. Opětovně ve svých spisech zdůrazňoval vzájemný užitek, který si přinášejí obě vědy filosofie a mathematika, hlavně zabýváme-li se jich základy, a po-

---

*) Viz Literatura česká XIX. století, 1. sv., str. 737, 764.

**) Liter. č. XIX stol., 1. sv., str. 737.

***) K těmto spisům lze ještě připojiti „Athanasia oder Gründe für die Unsterblichkeit der Seele", Sulzbach, 1827. I toto dílo Bolzanovo vyšlo anonymně a teprve druhé jeho opravené vydání (r. 1838 vydané) uvádí jméno spisovatele. Spis ten jest určen pro širší publikum; druhé vydání má podtitul „Ein Buch für jeden Gebildeten, der hierüber zur Beruhigung gelangen will".

žadoval od filosofa, aby se obeznámil s elementy mathematiky a od mathematika, aby znal základy filosofie.

Litoval zejména,*) že jest malý počet mathematiků, kteří by svou vlastní vědu pomocí filosofie k vyššímu stupni dokonalosti povznésti mohli, kteří by připustili, že by to byl zisk pro vědu mathematickou, kdyby se podařilo mnohé v ní se vyskytující pojmy složené, jež, poněvadž se pokládají za obecně známé, se nechávají bez definice, rozložiti na jich součásti a kdyby veliké množství vět, jež zůstávají jakožto samozřejmé bez důkazů, se dokázalo na základě jistých pravdivých vět mezi základními pojmy; věty tyto by byly pak mnohem obecnější než ony. Jak nepatrný jest počet mužů, praví dále, kteří zabývají se přesnějším odůvodněním mathematického systému, práce, která, zdaří-li se, nejpodstatnější užitek — třeba ne hmotný — s sebou přináší.

Ve snaze mathematiku v tomto směru zdokonaliti, konstruovati nové, základnější pojmy a odvoditi přesné důkazy zejména vět, jež dosud se pokládaly za samozřejmé, tkví hlavní význam Bolzanův v mathematice. Abych zevrubněji to objasnil, pojednám o některých jeho výkonech.

Nejprve zabývati se budu prací „Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie“ (1804 v Praze). Práci tuto vydal Bolzano jako 23letý jinoch a nemůžeme na ni klásti přísné měřítko jako na jeho práce pozdější. Byla však své doby velmi ceněna a za jednu z nejdůležitějších jeho prací pokládána a vznikl na jejím základě a pak z okolnosti, že sepsal spis Anti-Euklid, který však zůstal v rukopise a nyní jest ztracen, náhled, že dospěl k t. zv. neeuklidovské geometrii, náhled, který není zdůvodněný. V práci této zavádí pojem podobnosti výrokem: „Dvě prostorové věci slují podobny, jestliže všecky znaky, jež porovnáváním části jedné každé z těch věcí mezi sebou vznikají, při obou věcech jsou stejny.“ Definice tato jest velmi obecna, avšak v důsledku toho jest pro mathematiku skoro bezcenná, neboť v mathematice snažíme se požadovati, aby každému použitému slovu příslušel pojem přesně definovaný. To v Bolzanově definici není; máme tam na př. slova „porovnávání“, „část“, jež na tomto místě mají nejasné a z pojednání Bolzanova ztíží vysvětlitelné významy. Můžeme však tu, abychom vyložili jeden Bolzanův výkon z citovaného pojednání, abstrahovati od této definice a omeziti se pouze na trojúhelníky, pro které Bolzano postuluje (zdánlivě dokazuje) zásadu: Dva trojúhelníky, jichž strany jsou úměrné, mají stejné úhly. Postuluje tedy Bolzano existenci t. zv. podobných trojúhelníků. Z tohoto postulátu pak dokazuje

*) Viz předmluvu k jeho pojednání „Versuch einer objectiven Begründung der Lehre von den drei Dimensionen des Raumes“; Prag, 1843. (Sepsáno v podstatě v roce 1815.)

Bolzano známý axiom Euklidův o rovnoběžkách. Postupuje při důkaze axiomu toho tudíž podobně jako později o 13 let Legendre, což právě u mnohých rozhodovalo při oceňování té práce, avšak také jako Lambert v druhé polovici 18. století, což tenkráte nebylo ještě dostatečně známo. Nebylo by tedy vhodno, abych se o této práci Bolzanově, jakožto méně důležité, zmiňoval, kdybych nechtěl poukázati k tomu, jak zcela jednoduché použití stanoviska, zaujatého Bolzanem ve Wissenschaftslehre, mohlo vésti Bolzana k zcela jinému, daleko důležitějšímu výsledku, a zdůrazniti tak veliký význam a užitek principů hlásaných Bolzanem, svrchu vyložených (naznačujících užitek noetiky při budování mathematiky).

Jak lze vysvětliti, táže se Bolzano ve Wissenschaftslehre (svazek 3., str. 244.), že ve čtyřech vědách logice, arithmetice, geometrii a theoretické fysice jsme získali veliké množství pravd všeobecně uznávaných. Odpovídá pak k tomu (v jisté opposici proti Kantově filosofii), že příčina tkví v tom, že základní nauky těch věd velmi snadno a mnohostranně lze pokusy přezkoumati a také vskutku byly přezkoumány; dále, že ony věty, jež usuzováním byly odvozeny, nespočetněkrát mohly býti a byly souhlasně odvozeny, při čemž toto posuzování bylo provedeno, jelikož lidských vášní se nedotýká, s nestranností a náležitým klidem. Tak na př. tisíceré soudy dle formy Barbara, Celarent, ..., jež jako správné se osvědčily, způsobily, že vznikla v nás nezviklatelná víra ve správnost oněch logických forem. Dále uvádí, že obdobně tomu jest i v mathematice. Spočívá tedy v krátkosti jeho náhled v tom, že veškerá jistota o pravdivosti našeho vědění spočívá v jakési empirii, ať jest to empirie v pravém slova smyslu anebo myšlenková — vnitřní — empirie.

Uvažme, jak se věci mají při Euklidově axiomu. Ten jest: „A když přímka protínajíc dvě přímky (téže roviny) tvoří na téže straně vnitřní (přilehlé) úhly o součtu menším dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce dostatečně daleko, protínají se na té straně přímky, kde jsou úhly vnitřní o součtu menším než dva pravé.“ Tuto větu nemůžeme empiricky prozkoušet, neboť nemůžeme, je-li součet vnitřních úhlů příliš blízký dvěma pravým, ony dvě přímky tak daleko prodloužit, aby se protly. Jak jest tomu s větou, kterou Bolzano (Lambert) zavádí místo Euklidova axiomu a kterou postuluje existenci podobných trojúhelníků? I tuto nemůžeme empiricky přezkoumat a také ne, že součet úhlů v trojúhelníků jest 180^o (což z předcházejících snadno plyne). Ba ani nelze tvrditi, že úhel rovnostranného trojúhelníka rovinného jest 60^o, jelikož úhly lze změřiti jenom přibližně. Není tedy pro Euklidův axiom (ani pro věty s ním ekvivalentní) splněno to, co dle Bolzana propůjčuje math.

větám jistotu o jich pravdivosti a jsme v důsledku toho nuceni připustiti možnost, že axiom ten v prostoru našem trojrozměrném není vůbec platný. Jest ovšem platný v té nepatrné části celého prostoru, ve které právě žijeme, s velikým přiblížením; pravděpodobnost, že by byl tu platný přesně, zdá se býti rovna nule. Euklidova geometrie jeví se z tohoto stanoviska jako myšlenková konstrukce stejně jako čtyřdimensionální geometrie, jenomže jako taková má prvá zároveň daleko větší praktický význam než druhá.

Není pochyby, že v době, kdy Bolzano žil a možno, že i dříve, k těmto důsledkům dospěli někteří mathematikové; známo jest to na př. o Gaussovi.*) Prvý však, který měl odvahu s příslušnými tvrzeními veřejně vystoupiti, byl Rus Lobačevský, který také sestrojil geometrii na základě obecnějšího předpokladu, než jest axiom Euklidův (r. 1829.).

Na principu podobnosti založil Bolzano definice délky křivé čáry, velikosti křivé plochy a odvodil z definic těch pozoruhodným způsobem příslušné vzorce; s touto věcí však nelze mi tady se zabývati. Rovněž nebudu šířeji pojednávati o jeho spise „Paradoxien des Unendlichen“, ve kterém zabývá se paradoxními výroky, jež v mathematice a jejích applikacích vznikly. Ukazuje, že to jsou vesměs jenom zdánlivé paradoxie, jež vznikly jednak zneužitím logiky, jednak v důsledku nesprávné definice příslušných pojmů. Podává tu Bolzano prvý ze všech mathematiků přesné definice některých pojmů, které k slovu nekonečný v mathematice se pojí (zejména pojmů vlastně a nevlastně nekonečné veličiny); stal se pak tím spisem předchůdcem zbudovatele theorie množství G. Cantora. Ostatně již ve Wissenschaftslehre jsou předmětem jeho úvah četné známé paradoxie; zejména hledí tam také dokázati, že usuzování, které Kanta vedlo k paradoxiím Kantovým, jež označuje K. jménem antinomie čistého rozumu, jest logicky neoprávněné.

Obraťme se nyní k hlavnímu směru Bolzanově v mathematice, týkajícímu se analyse mathematické. Tu za nejdůležitější zásluhu pokládám jeho snahu zaváděti pojmy a důkazy, jež neopírají se o názor. Abych co nejlépe a nejpřesněji podal smýšlení Bolzanovo v té věci, uvedu příslušné místo z jeho Wissenschaftslehre**) doslova: „Kant domníval se, že mezi dů-

---

*) Gauss píše na př. Besselovi v r. 1830.: „Musíme v pokoře připustiti, že, i když číslo jest pouze výtvorem našeho ducha, prostor také neodvisle od našeho ducha má realitu, jíž nemůžeme a priori její zákony úplně předpisovati.“ Náhledy však, které o prostoru měl Gauss, neuveřejnil z obavy — jak rovněž v dopise k Besselovi poznamenává — že by vznikl křik Bőoťanů („Geschrei der Bőotier“).

**) Bd. IV., str. 291., 2. Anmerkung.

kazy, jichž používají jednak mathematik a jednak filosof, jest zvlášť důležitý rozdíl, jelikož důkazy mathematické postupují v názoru na příslušný předmět, důkazy filosofické však provádějí se pouhými slovy (pojmy). Dokonce na str. 755. „Kritice čistého rozumu“ čteme, že geometr dle své methody ve filosofii nic jiného by nevykonal než budovu z karet, filosof pak dle své v mathematice by vytvořil jen prázdný tlach.“ „Jaký škodlivý vliv,“ praví B., „taková tvrzení měla ve filosofii, již na jiném místě jsem vyložil; zde chci jenom ještě poznamenati, že neméně škodlivy jsou při vybudování mathematiky na základě přesně vědeckém. Neboť, byli-li mathematikové již dříve náchylni při dokazování svých vět k tomu, aby se odvolávali na to, co pouhý pohled na obrazec nám praví, tak domnívali se nyní (nejenom v Německu, nýbrž i ve Francii, Anglii a všady, kam pronikla Kantova nauka), že mají plné právo, aby tak si počínali. Já sice nepopírám, že takové právo jest v knihách pro ty čtenáře, u nichž nelze předpokládati výcvik v myšlení a předběžné vědomosti dostatečné k tomu, aby bylo možno je přivésti k poznání objektivního důvodu pro mathematickou pravdu. Avšak tam, kde takovými ohledy vázáni nejsme, tam, kde chceme dosíci nejvyššího stupně vědeckosti, pokládám za povinnost, aby se nic nedokazovalo z pouhého pohledu na figuru, z t. zv. názoru, ať čistého, ať jakéhokoliv jiného; tam, krátce řečeno, postupovati se musí jako při důkaze pravd filosofických. Že tato methoda se často nezdařila a že mnozí, kteří mathematické pravdy chtěli dokazovati způsobem ve filosofii používaným, přednesli pouhý tlach, z toho nenásleduje, že to jest nemožno; naopak z toho, co jsem svrchu řekl o nicotnosti Kantovy nauky o čase a prostoru, že od pokusu takové důkazy hledati nikdy se nesmí upustiti.“

Oprávněnost těchto Bolzanových náhledů mohu doložiti dvěma vysoce významnými výkony. Prvý jest obsažen v práci „Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dasz zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege“.*) Práce ta týká se důkazu fundamentální věty algebry, že každá rovnice algebraická má aspoň jeden kořen. Věta ta vyslovena byla nejprve od d'Alemberta, po několika nezdařených pokusech různých mathematiků dokázána poprvé Gaussem v r. 1799. Avšak důkaz Gaussův opírá se o tvrzení, jež dovolím si tu vysloviti jenom populárně: Spojím-li bod, nacházející se na stropě tohoto sálu, s bodem na podlaze čarou spojitou (znázorněnou ku př. nití), pak tato čára protíná aspoň jedenkráte rovinu, jež probíhá vodo-

*) Abhandlungen der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, Praha, 1817.

rovně mezi stropem a podlahou. Větu tuto, o níž nám názor ihned praví, že jest správná, pokládá Gauss ve svém důkazu za samozřejmou a cítil sám Gauss v tom nedostatek svého důkazu. Avšak i druhý a třetí důkaz Gaussův, které později byly uveřejněny, opírají se, jak Bolzano ve svém pojednání ukazuje, o větu oné v podstatě ekvivalentní. Následkem toho pokládal Bolzano za důležito větu tu přímo bez použití názoru dokázati a také to učinil. Užitek z toho plynoucí jest pak mnohostranný; Bolzano jest nucen zaváděti při tom řadu nových pojmů a definic — uvádím pojem veličiny volně proměnné, spojitě proměnné, pojem horní hranice čísel obsažených v nějakém množství číselném, pojem spojité funkce, pojmů z části tenkráte zcela nových, z části novým, lepším způsobem definovaných, vesměs však pro rozvoj vědy mathematické vysoce důležitých. Konečně dokazuje při tom fundamentální větu z theorie limit, dávající nutnou a postačitelnou podmínku pro to, aby řada čísel u_1, u_2, $u_3, \ldots$ měla limitu. Věci tyto získaly v rozvoji vědy mathematické důležitost základní a ke dvěma z nich, totiž k větě o horní hranici a k větě o existenci limity, zůstane jméno Bolzanovo na vždy připojeno. Ovšem jest třeba poznamenati, že důkazy přesné těchto dvou vět umožněny byly teprve zavedením přesného pojmu čísla reálného a podány byly o mnoho později (o 67 let).

V práci, o které jsem právě mluvil, provedl Bolzano důkaz věty, jež názorem nám podávána jako samozřejmá; v jiné práci, o které nyní budu mluviti, obsaženo jest ještě skvělejší potvrzení výroků Bolzanových, odsuzujících užívání názoru při podávání důkazů v mathematice, neboť v této druhé práci se ukazuje, že názor nás vede při pojmech mathematických také k závěrům nesprávným. Názor geometrický nás totiž svádí k mínění, že spojitá čára má v každém bodě svém tečnu, po případě aspoň jednu tečnu s jedné a jednu s druhé strany toho bodu, mathematikové pak se vskutku domnívali v důsledku toho, že spojitá funkce má v každém svém bodě derivaci, po případě derivaci zprava a derivaci zleva, nehledě k isolovaným bodům intervalu, v němž spojitá funkce ta jest definována. Teprve Weierstrass ukázal, že náhled ten není správný a že jsou spojité funkce, které v žádném bodě intervalu, v němž jsou definovány, nemají derivaci; ukázal to v práci, jež vyšla r. 1875. Výkon Weierstrassův označil Emil du-Bois-Reymond jakožto nejúchvatnějším z výsledků novější mathematiky.

Z toho, co jsem právě uvedl, jest pochopitelna velikost překvapení, které vzniklo, když neunavný badatel v rukopisné pozůstalosti Bolzanově prof. Jašek oznámil math. veřejnosti, že v rukopise Bolzanovy Funktionenlehre se nachází konstrukce funkce, jejíž hlavní vlastnost jest táž, jako vlastnost funkce Weierstrassovy. Bolzano sice dokázal o ní ve zmíněném rukopise, že nemá derivace v žádném bodě jistého množství číselného všude hustého, avšak k důkazu, že funkce ta nemá derivaci vůbec v žádném bodě, nebylo již mnoho potřeba a byla konečně tato okolnost i docela vedlejší. Kdyby Bolzano svůj objev byl uveřejnil v době, kdy jej napsal (kolem r. 1834) do své Functionenlehre, stala by se pozdější Weierstrassova práce bezvýznamnou. Nad to jest ještě poznamenati, že Weierstrassova funkce jest značně umělá, užívajíc řad trigonometrických věci, o niž jde, zcela cizích, Bolzanova pak neobyčejně jednoduchá, ba můžeme říci, že patří k nejjednodušším, jež byly sestrojeny k naznačenému účelu. Weierstrass dospívá ke své funkci, jak by se Bolzano byl vyjádřil, „per aliena et remota“, Bolzano při konstrukci své zavádí jen to, co jest k tomu nezbytně třeba.

V předcházejícím jsem stručně načrtl hlavní výkony Bolzanovy v mathematice, pokud jsou ovšem známy. Avšak z mathematických prací Bolzanových jest známa jenom malá část. Za jeho života vyšlo pět menších pojednání mathematického obsahu, po jeho smrti vydány z pozůstalosti „Paradoxien des Unendlichen“, na nichž prý pracoval v posledním roce svého života. Velká část jeho prací vědeckých z mathematiky jest v rukopise. Na popud prof. Jaška pod dojmem objevu, o němž byla právě řeč, odhodlala se Kr. Č. U. Společnost, jejímž velmi horlivým členem Bolzano byl, k soubornému vydání spisů B. Bolzana, při čemž měla ovšem na zřeteli hlavně práce v rukopisech anebo práce jinak těžko přístupné, a tak, jak se zdá, bude splněna dávná tužba žáků a ctitelů Bolzanových, že i spisy Bolzanovy v rukopise se nacházející budou vydány tiskem.

Již dávno se také čeští vlastenci starali o vydání souborné Bolzanových spisů. Tak ku př. biografie Bolzanova, již vydala Červinková-Riegrova, vnučka Palackého, která měla pravděpodobně různé zprávy ze života Bolzanova též od svého děda, byla vydána ve prospěch vydání těch spisů v jazyce českém; byly konány též sbírky k tomu účelu. Výsledek však nebyl takový, aby se k vydání mohlo přikročit. Založena pouze dvě stipendia, jedno na české, druhé na německé universitě Pražské, každé s výnosem asi 200 zl. ročně, jimiž mělo býti podněcováno studium Bolzanových spisů, zvláště rukopisných.

Doufejme, že nyní v osvobozené vlasti krok podniknutý Kr. Č. Uč. Společností povede ke zdárnému konci. Pan president republiky přislíbil blahovolně k tomu svoji podporu a věnoval komisi Bolzanovské pro počátek 50.000 Kč. Také ministerstvo školství umožnilo poskytnutím dovolené prof. Jaškovi a přiměřenou podporou srovnání rukopisů Bolzanovských, jež se nacházejí v Národní knihovně ve Vídni, a jich ofotografování. Vznáším appel na p. ministra šk. a n. o., aby se zasadil, by úspornými opatřeními v republice zaváděnými nebyla ochromena činnost Bolzanovské komise a zejména, aby i nadále byla uvolněna pracovní síla, jež by se o vydávání spisů stále a intensivně mohla starati.

Vydáním Bolzanových spisů — aspoň těch, jež jsou v rukopise — byl by splacen dluh, který český národ jest dlužen památce velikého myslitele, který bude vždy patřiti k největším, již zrozeni byli v české zemi. Myslitele, který lnul láskou k zemi české a utištěnému lidu, se kterým žil a o jehož kulturní i hmotné povznesení účinně se staral. Myslitele, který byl zároveň světcem a revolucionářem.

Poznámka. Nejlepší a nejvěrnější (dle úsudku vrstevníků) portrét Bolzanův jest obraz Fr. Horčičky, který jest nyní majetkem slečny R. Kirschbaumovy na Smíchově. S laskavým svolením majitelky ofotografoval grafický závod Štencův onen obraz a reprodukce úryvku fotografie jest přidána k tomuto článku.