Kapitola III.

Určitý integrál a počátky teorie míry (19. století)

18. století bylo obdobím nakupení velkého množství nových poznatků, které však nestály na pevném základě. Nejasnosti a problémy se objevily kolem nekonečně malých veličin, konvergence řad, limity, ale i derivace a integrálu. V 19. století nastupuje období zpřesňování matematické analýzy, jejímiž představiteli byli B. Bolzano, A.-L. Cauchy, N. H. Abel, P. G. L. Dirichlet a později R. Dedekind a K. Weierstrass.

Teprve v 19. století byly vysvětleny a odstraněny paradoxní výsledky získávané např. přerovnáváním konvergentních řad, limitními přechody v konvergentních posloupnostech funkcí apod. K tomu bylo nezbytné rozlišit pojmy konvergence a absolutní konvergence řad, konvergence a stejnoměrná konvergence posloupností funkcí, spojitost a stejnoměrná spojitost funkcí apod. Tyto pojmy se v 18. století při intuitivním přístupu k problémům nedařilo rozlišovat; teprve aritmetizace analýzy (tzv. $\varepsilon - \delta$ jazyk) a zvýšená pozornost ke kvantifikátorům v definicích pomohla objasnit tyto pojmy.

Připomeňme, že v osmnáctém století bylo integrování považováno za inverzní operaci k derivování a funkce se integrovaly pomocí Newtonova fundamentálního vztahu. Na Eudoxovu exhaustivní metodu se jakoby zapomnělo, byla však občas užita při aproximaci velikosti plochy pod křivkou v kartézském systému souřadnic v rovině, když k dané funkci nebylo vhodné nebo možné určit primitivní funkci.

1. Cauchy a jeho přístup k integraci

Jedním z matematiků, kteří se věnovali upřesnění pojmu integrálu, byl A.-L. Cauchy.

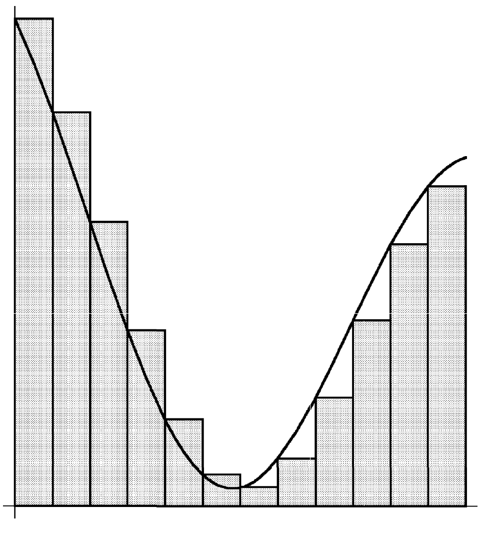
Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) se narodil a vystudoval v Paříži. Po červnové revoluci roku 1830 musel odejít do vyhnanství, které trávil v Turinu a v Praze. Po další revoluci roku 1848 začal působit na Sorbonně.

A. Cauchy

Význam Cauchyho díla v matematické analýze spočívá mimo jiné v tom, že položil základy matematické analýzy v dnešní podobě. Učinil tak zejména ve svých učebnicích *Cours d'Analyse* z roku 1821 a *Résumé des leçons données sur le calcul infinitésimal* z roku 1823. Definované pojmy a matematické metody buduje na analytickém základě.

Významný kus teoretické práce vykonal také v teorii obyčejných diferenciálních rovnic. Jemu patří např. první rigorózní důkaz věty o existenci řešení tzv. počáteční úlohy.

V roce 1823 Cauchy formuloval novou definici integrálu a zabýval se jeho existencí pro poměrně širokou třídu funkcí. Cauchy se snažil pro funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ určit obsah plochy vymezené osou x, přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem funkce f.



Obr. 13. Cauchyův integrální součet

Pro spojitou funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ postupoval Cauchy takto:

Rozdělil interval $[a, b]$ na n částí pomocí bodů $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$. Tomuto dělení D intervalu $[a, b]$ přiřadil aproximující součet

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}), \tag{1}$$

kterým vyjádřil součet obsahů obdélníků se základnou $[x_{i-1}, x_i]$ a výškou, která je dána funkční hodnotou $f(x_{i-1})$. Cauchyovým úmyslem bylo definovat integrál $\int_a^b f(x)dx$ jako limitu součtů tvaru (1), když maximum délek „dělicích" intervalů $[x_{i-1}, x_i]$ bude konvergovat k nule. Jde tedy o aproximaci integrálu, tj. obsahu výše vymezené plochy v rovině, pomocí součtu ploch obdélníků. Za pozornost stojí i ta skutečnost, že při vytváření součtu S použil Cauchy pro interval $[x_{i-1}, x_i]$ funkční hodnoty funkce f *v levém* bodě tohoto intervalu. Podobně lze použít funkční hodnoty $f(x_i)$ v pravém koncovém bodě. Obdobné pojmy se užívají dodnes pod názvem *levý* resp. *pravý Cauchyův integrál.*

Cauchy se samozřejmě snažil ukázat, že zmíněná limita integrálních součtů existuje. K tomu poznamenal, že

... když délky dělících intervalů jsou velmi malé a jejich počet n velmi velký, bude mít způsob rozdělení pouze neznatelný vliv na hodnotu S.

Cauchyovu prohlášení je třeba rozumět tak, že když utvoříme integrální součty pro dvě dělení, která sestávají z dost malých intervalů, potom se odpovídající integrální součty S utvořené dle (1) budou od sebe málo lišit.

K důkazu použil následujícího výsledku:

Když jsou $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ kladná a $a_1, a_2, \dots, a_n$ libovolná čísla, potom

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = \overline{a}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = \overline{a} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,$$

kde $\overline{a}$ je nějaká hodnota, která leží v intervalu $[\min a_i, \max a_i]$.

Když položíme $\alpha_i = x_i - x_{i-1}$ a $a_i = f(x_{i-1})$, dostaneme pro součet (1) vztah

$$S = \overline{a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \overline{a}(b-a),$$

kde $\overline{a}$ je někde mezi hodnotami $\min f(x_{i-1})$ a $\max f(x_{i-1})$. Podle věty o mezihodnotách spojité funkce musí proto být $\overline{a}$ hodnotou funkce f v některém z bodů intervalu $[a, b]$, tj. $\overline{a} = f(a + \theta(b-a))$ s nějakou hodnotou $\theta \in [0, 1]$, a tedy

$$S = f(a + \theta(b-a))(b-a). \tag{2}$$

V dalším pak Cauchy vyšetřuje případ, když se dělení

$$D : \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$$

zjemní dělením D' tak, že každý interval z dělení D' je částí některého z intervalů $[x_{i-1}, x_i]$ v dělení D. Pak lze součet S', který odpovídá novému dělení D', psát ve tvaru

$$S' = S'_1 + S'_2 + \cdots + S'_n,$$

kde S'_k je součet těch členů z S', pro které příslušné intervaly dělení D' leží v k–tém intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ dělení D.

Když nyní použijeme (2) na každý interval $[x_{k-1}, x_k]$, dostaneme

$$S'_k = f(x_{k-1} + \theta_k(x_k - x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})$$

pro $k = 1, 2, \ldots, n$ a nějaké $\theta_k \in [0,1]$. Proto máme

$$(3) \qquad S' = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1} + \theta_k(x_k - x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})$$

a ovšem

$$(4) \qquad S' - S = \sum_{k=1}^{n} (f(x_{k-1} + \theta_k(x_k - x_{k-1})) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}).$$

Odtud pak Cauchy vyvozuje, že

… hodnota S vypočítaná tak, že intervaly $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, jsou malé, se znatelně nezmění, když se přejde k jinému způsobu výpočtu, kde se každý z prvků dělení $[x_{k-1}, x_k]$ rozdělí do mnoha dalších.

Z dnešního hlediska zde Cauchy není zcela přesný, protože ze vztahu (4) (správně !) usoudil, že (v překladu do dnešního způsobu zápisu) pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$|S' - S| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_{k-1} + \theta_k(x_k - x_{k-1})) - f(x_{k-1})|(x_k - x_{k-1}) \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon(b - a)$$

jakmile je dělení D dost jemné. Nepřesnost spočívá v tom, že tuto úvahu lze provést jen na základě poznatku, že spojitá funkce f na uzavřeném intervalu $[a, b]$ je *stejnoměrně spojitá,* tj. že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x', x'' \in [a, b]$, $|x' - x''| < \delta$ platí $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Tento pojem však v té době ještě nebyl znám, Cauchy jej možná intuitivně „cítil“, ale nepovažoval za nutné se o tom zmínit.

Dále Cauchy postupoval už obvyklým způsobem; ke dvěma dělením D_1 a D_2 intervalu $[a, b]$ určil jejich společné zjemnění D a s jeho pomocí ukázal, že pro integrální součty S_1 a S_2 odpovídající dělením D_1 a D_2 platí

$$S_1 - S_2 = \eta(b - a),$$

kde η je v absolutní hodnotě malé a dělení D_1 a D_2 sestávají z dostatečně malých (co do délky) intervalů.

Odtud pak klasickou „cauchyovskou“ argumentací dochází k tomu, že integrální součty jsou blízké jisté limitě, která se prohlásí integrálem $\int_a^b f(x)dx$.

Tyto úvahy lze nalézt v *Résumé des leçons donnés a l' École Royale Polytechnique sur le calcul infinitesimal* z roku 1823, které jsou konspektem Cauchyových přednášek. Výklad pak pochopitelně pokračuje dále, jde o kurs integrálního počtu.

Zde se spokojíme s Cauchyovou definicí a s poznámkou, že měla pochopitelné dobové vady. Je třeba kupříkladu říci, že v té době nebylo nic známo o úplnosti reálných čísel v dnešní podobě,[2] a tak vlastně bylo i nekorektní soudit, že při limitním přechodu přes zjemňující se dělení integrální součty tvaru (1) skutečně k nějakému reálnému číslu konvergují. Počátkem 19. století ještě nebyla doba zralá na to, aby byla reálná čísla chápána v dnešním slova smyslu, úplnost byla pokládána za samozřejmost z geometrických důvodů. Teprve v r. 1872 byly publikovány první práce, které se týkaly konstrukce reálných čísel (R. Dedekind, G. Cantor, Ch. Meray, E. Heine). Proces aritmetizace analýzy však v té době už započal a právě Cauchy k tomu nemalou měrou přispěl. Jeho matematické úvahy a důkazy jsou toho druhu, že je lze bez větší námahy překládat do dnešní řeči aritmetizované analýzy včetně pojmu reálného čísla, jak je dnes prezentován. Stejně tak už tou dobou bylo zaseto sémě rozluky analýzy s geometrií, které do té doby v mnoha publikacích bylo těžké odlišit. Publikace z analýzy nemusely být podepřeny geometrickými vývody.

2. Riemann a jeho teorie integrálu

B. Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) se narodil ve vesnici Breselenz (poblíž Dannenbergu v království hannoverském) v rodině kazatele.

V roce 1846 nastoupil na univerzitu v Göttingen. Imatrikulován byl jako student filologie a teologie. Poslouchal však i matematické přednášky (numerické řešení rovnic – Stern, zemský magnetizmus – Goldschmidt, metoda nejmenších čtverců – Gauss, určité integrály – Stern). Shledal, že jeho sklon k matematice je veliký a požádal otce o svolení, aby se jí mohl věnovat zcela. Od 1847 byl na univerzitě v Berlíně, kde setrval do roku 1849.

V r. 1849 se vrátil do Göttingen. Zde pracoval na své disertaci *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* (*Základy obecné teorie funkcí jedné proměnné komplexní veličiny*), která byla velmi uznale posouzena Gaussem. S předložením práce se Riemann pozdržel kvůli pracem experimentální povahy pro přírodovědný seminář a také proto, že věnoval velkou péči způsobu prezentace práce.

Počátkem prosince r. 1853 odevzdal Riemann svůj habilitační spis „*Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*“ (*O reprezentovatelnosti funkce trigonometrickou řadou*).

Po Gaussově smrti (22. února 1855) byl z Berlína do Göttingen povolán **Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805 – 1859). Snahy jmenovat při této

[2] tj. nebylo dokázáno, že každá cauchyovská posloupnost reálných čísel má limitu

příležitosti Riemanna mimořádným profesorem nebyly bohužel úspěšné. Teprve po smrti Dirichleta roku 1859 byl Riemann jmenován řádným profesorem a zvolen členem učené společnosti.

Riemannovy sebrané spisy (*Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass.* Herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber. Leipzig, B. G. Teubner, 1876) obsahují publikované práce a rovněž práce z rukopisné pozůstalosti, která byla po Riemannově smrti v rukou R. Dedekinda. Další část Riemannovy pozůstalosti byla publikována ještě v roce 1902 jako dodatek k jeho sebraným spisům. Obsahuje zejména záznamy Riemannových přednášek.

Riemannův integrál

B. Riemann v roce 1854 znovu nastolil otázku, co vlastně je $\int_a^b f(x)dx$. Ptal se, jak se má chápat to, s čím se už více než jedno století pracovalo a co přinášelo užitečné poznatky a bylo běžně užíváno ve fyzice.

Dejme však slovo B. Riemannovi a citujme některé pasáže z jeho habilitačního spisu *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe.*

Neurčitost, která ještě v některých základních bodech teorie určitého integrálu panuje, nás nutí předeslat něco o pojmu určitého integrálu a o rozsahu jeho platnosti.

Tedy za prvé: Co se má rozumět pod $\int_a^b f(x)dx$ *?*

Abychom toto stanovili, zvolme mezi a *a* b *seřazenou dle velikosti řadu hodnot* $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ *a označme kvůli krátkosti* $x_1 - a$ *znakem* δ_1, $x_2 - x_1$ *znakem* $\delta_2, \dots, b - x_{n-1}$ *znakem* δ_n *a buď* ε *kladný pravý zlomek. Potom hodnota součtu*

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

bude záviset na volbě intervalů δ *a veličin* ε. *Bude-li nyní mít* (ten součet) *tu vlastnost, že ať jsou zvoleny* δ *a* ε *jakkoli, bude se nekonečně blížit k pevné hranici* A *jakmile budou všechna* δ *nekonečně malá, pak se tato hodnota* (tj. A) *nazývá* $\int_a^b f(x)dx$.

Když tuto vlastnost nemá, pak nemá $\int_a^b f(x)dx$ *význam.*

Není příliš obtížné v těchto řádcích rozeznat definici Riemannova integrálu v podobě, která nám je známa z novodobých učebnic. Riemann pak pokračuje krátkým popisem toho, že když dle uvedené definice $\int_a^b f(x)dx$ nemá význam, může se integrálu přesto význam někdy připsat, a popisuje, jak je pomocí limity definován nevlastní integrál (viz k tomu poznámka níže).

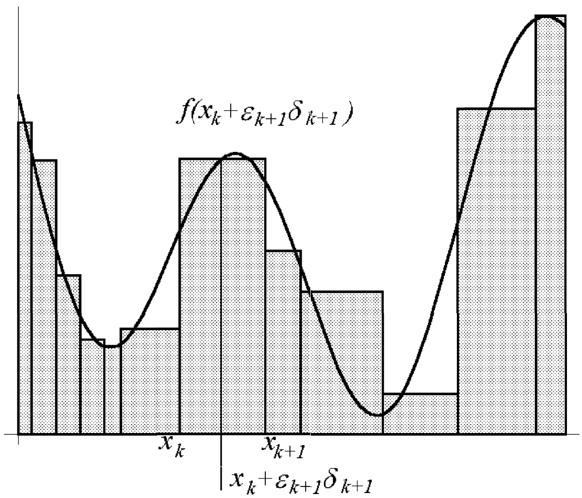
Srovnáme-li Riemannovu definici s definicí Cauchyovou, shledáme, že Riemann volí *libovolný* bod $\xi_i = x_{i-1} + \varepsilon_i\delta_i$ v i–tém intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ v dělení D intervalu $[a, b]$ a podobně jako Cauchy definuje integrál vztahem

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0+} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

kde δ znamená maximum délek δ_i intervalů $[x_{i-1}, x_i]$ v dělení D. Na rozdíl od Cauchyho, který potřeboval spojitost funkce f, Riemann na funkci f nemá žádné požadavky. Tím přímo zobecnil to, jak integrál chápal Cauchy. V Cauchyově případě totiž bylo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0+} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

a to, co Cauchy potřeboval k výkladu své definice (pracoval se spojitou funkcí!) ve vztahu (3), se stává pro Riemanna definicí.



Obr. 14. Riemannův integrální součet

Dále pak Riemann píše:

Vyšetřujme nyní za druhé rozsah platnosti tohoto pojmu (rozuměj pojmu integrálu) *neboli otázku: ve kterých případech připouští funkce integraci, a ve kterých nikoli?*

Způsob, jakým tuto otázku Riemann položil, je typický pro novou matematiku, která se v 19. století formovala. Riemannova definice se totiž týká *libovolné* funkce a jím položená otázka směřuje k vymezení třídy funkcí, pro které má jím zavedená definice integrálu smysl, tj. ptá se po dosahu nového pojmu.

Sledujme dále jeho úvahy:

Pohlédneme na pojem integrálu v užším smyslu, tj. předpokládáme, že součet S konverguje, když se všechna δ stanou nekonečně malými. Když tedy označíme největší rozkmit (Schwankung, oscilace) *funkce mezi a a x_1, tj. rozdíl její největší a nejmenší hodnoty v tomto intervalu, znakem D_1, mezi x_1 a x_2 znakem $D_2, \ldots,$ mezi x_{n-1} a b znakem D_n, musí být*

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$$

nekonečně malé s nekonečně malými hodnotami δ. Předpokládejme dále, že pokud zůstanou všechna δ menší než d, největší hodnota, kterou tento součet může nabýt, je Δ; Δ pak bude funkcí d, která s d vždy ubývá a stane se s touto veličinou nekonečně malou. Je-li nyní celková délka intervalů, v nichž jsou oscilace větší než σ, rovna s, pak bude příspěvek těchto intervalů k součtu $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$ zřejmě větší nebo roven σs. Odtud je

$$\sigma s \ \leq \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n \leq \Delta, \ \text{a proto } s \ \leq \frac{\Delta}{\sigma}.$$

$\frac{\Delta}{\sigma}$ lze nyní, když je σ dáno, udělat volbou vhodného d libovolně malým; totéž platí proto i o s a tedy se dostane:

Aby součet S konvergoval, když budou všechna δ nekonečně malá, je kromě toho, že funkce $f(x)$ je konečná, žádoucí, aby bylo možno udělat celkovou délku intervalů, v nichž jsou oscilace větší než σ, nechť už je σ jakékoli, vhodnou volbou d libovolně malou.

Tuto větu lze i obrátit:

Je-li funkce $f(x)$ vždy konečná (immer endlich) *a když při nekonečném ubývání všech veličin δ se stane celková délka s intervalů, v nichž jsou oscilace funkce $f(x)$ větší než daná veličina σ, také nekonečně malou, pak konverguje součet S, když se všechna δ stanou nekonečně malými.*

Ty intervaly, v nichž jsou oscilace větší než σ, přidají k součtu $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$ hodnotu menší než s násobené největší oscilací (rozkmitem) *funkce mezi a a b, která je (dle předpokladu) konečná; zbylé intervaly přispějí hodnotou menší než $\sigma(b-a)$. Zřejmě lze nyní nejprve považovat σ za libovolně malé a pak ještě velikost intervalů (dle předpokladu) určit tak, aby se i s stalo libovolně malým, čímž lze součet $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$ udělat libovolně malým a tím následně uzavřít hodnotu součtu S do libovolně úzkých hranic.*

Nalezli jsme tedy podmínky, které jsou nutné a postačující pro to, aby součet S při nekonečném ubývání veličin δ konvergoval, a tedy aby v užším smyslu mohla být řeč o integrálu funkce $f(x)$ mezi a a b.

V této ukázce překladu Riemannova původního textu se mluví o integrálu „v užším smyslu“ proto, že – jak bylo podotknuto výše – Riemann mluví při definici i o nevlastním integrálu, definovaném pomocí limit a ten chápe jako integrál „v širším smyslu“.

Nevlastní integrál

Už jsme se zmínili, že Riemann ve svém habilitačním spisu rozlišil vlastní a nevlastní určitý integrál (integrál v užším, resp. širším smyslu). U nevlastního integrálu jde o situaci, kdy je funkce $f(x)$ je integrovatelná mezi $a+\varepsilon$ a b pro jakkoli malé kladné ε, a není integrovatelná mezi a a b. Když pak v této situaci existuje limita

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

pak se pod pojmem *nevlastního určitého integrálu* $\int_a^b f(x)dx$ rozumí právě tato limita.

Jsou celkem přirozené varianty tohoto pojmu pro druhý koncový bod b, pro oba koncové body a i b, nebo pak pro konečný systém bodů v intervalu $[a, b]$. Např.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$$

pro případ „nevlastního“ bodu c v integračním intervalu $[a, b]$. Na limity zde je třeba hledět jako na sobě nezávislé limitní přechody. Může se stát, že pravá strana tohoto vztahu má smysl pouze pro speciální limitní přechod, např. pro $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Tento zvláštní případ najdeme už u Cauchyho, který jej nazval *hlavní hodnotou integrálu* (valeur principal) $\int_a^b f(x)dx$.

Riemannův příklad nespojité funkce

Je na místě znovu podotknout, že Riemann při své definici nikterak nespecifikoval funkce, pro které svůj integrál definoval. Hovoří o funkcích, které připouštějí integraci; řečeno dnešními slovy, o *integrovatelných funkcích.* Zavádí tak novou třídu funkcí, které je vhodné a účelné zkoumat. Sám k tomu říká toto:

Poté, co jsme vyšetřili podmínky pro možnost určitého integrálu obecně, tj. bez zvláštních předpokladů o povaze integrované funkce, budiž nyní toto vyšetřování ve zvláštních případech zčásti použito, zčásti dále rozvinuto, a sice pro funkce, které jsou mezi dvěma jakkoli blízkými hranicemi (body) *nekonečně často nespojité.*

Jelikož na tyto funkce ještě nikde nebylo pohlédnuto, bude dobré vyjít od jistého příkladu.

Poté udává Riemann tento příklad (uvedeme jej v dnešní podobě, abychom se vyhnuli těžkopádnosti a poněkud kroucené české podobě pokusů o doslovný překlad Riemannovy němčiny):

Buď

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{< nx >}{n^2},$$

kde

$$< x >= \begin{cases} x - k & \text{pro } x \in (k, k + \frac{1}{2}), \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{pro } x = k + \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x - (k+1) & \text{pro } x \in (k + \frac{1}{2}, k+1), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Funkce $< x >$ je nespojitá v každém bodě $k + \dfrac{1}{2}$ pro k celé. Limita zleva této funkce v $k + \dfrac{1}{2}$ pro k celé je $\dfrac{1}{2}$ a limita zprava je $-\dfrac{1}{2}$; funkční hodnota v tomto bodě je 0. Řada vyjadřující funkci $f(x)$ konverguje (dokonce stejnoměrně, to však Riemann neříká) pro každé x a když je $x = \dfrac{p}{2n}$, kde p, n jsou nesoudělná čísla, je

$$f(x+) = f(x) - \frac{1}{2n^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} = f(x) - \frac{\pi^2}{16n^2}$$

a

$$f(x-) = f(x) + \frac{1}{2n^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} = f(x) + \frac{\pi^2}{16n^2}.$$

Jinak je všude $f(x+) = f(x-) = f(x)$ (zde $f(x-)$, resp. $f(x+)$ znamená limitu funkce f v bodě x zleva, resp. zprava). Riemannova funkce je tedy nespojitá v každém bodě tvaru $\dfrac{p}{2n}$, kde p a n jsou nesoudělná čísla.

Když označíme

$$\omega(f, [\alpha, \beta]) = \sup_{y \in [\alpha, \beta]} f(y) - \inf_{y \in [\alpha, \beta]} f(y)$$

oscilaci funkce f v intervalu $[\alpha, \beta]$ a

$$\omega(f, x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \omega(f, [x - \varepsilon, x + \varepsilon])$$

oscilaci funkce f v bodě x, dostaneme pro $x = \dfrac{p}{2n}$, kde p, n jsou nesoudělná, z výše uvedených jednostranných limit rovnost

$$\omega(f, x) = \frac{\pi^2}{8n^2}.$$

Odtud pro dané $\sigma > 0$ existuje jen konečný počet hodnot n, pro které je $\dfrac{\pi^2}{8n^2} > \sigma$, a proto v každém konečném intervalu je jen konečný počet hodnot x tvaru $x = \dfrac{p}{2n}$, kde p, n jsou nesoudělná, pro které je skok funkce f větší než předepsaná hodnota $\sigma > 0$. Tento konečný počet hodnot tedy lze uzavřít do systému intervalů libovolně malé celkové délky.

Z výše uvedených Riemannových úvah vyplývá, že integrál z této poměrně divoce nespojité funkce existuje přes každý omezený interval. Tímto příkladem Riemann ukázal, že dosah jím zavedeného integrálu jde dosti za třídu spojitých funkcí, tj. že do třídy riemannovsky integrovatelných funkcí patří i „velmi silně“ nespojité funkce. Tím se dostal daleko za Cauchyovy představy o tom, že je rozumné integrovat jenom funkce po částech spojité.

Darbouxův integrál

Připomeňme na tomto místě ještě **Gastona Darbouxe** (1842 – 1917) a jeho práci *Mémoire sur les functions discontinues* z Ann. Ecole Norm. Sup. z roku 1875.

Darboux ukazuje, že když je funkce $f(x)$ omezená, potom horní integrální součet

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{\xi\in[x_{i-1},x_i]} f(\xi)(x_i - x_{i-1})$$

a dolní integrální součet

$$\sum_{i=1}^{n} \inf_{\xi\in[x_{i-1},x_i]} f(\xi)(x_i - x_{i-1})$$

pro dělení $D : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ intervalu $[a, b]$ mají limitu, pokud $\max_i(x_i - x_{i-1}) \to 0$.

Tyto limity jsou horní integrál $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ a dolní integrál $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ pro horní, resp. dolní integrální součty. Pokud horní a dolní integrál má stejnou hodnotu, hovoříme o integrálu funkce f. Tato definice integrálu je ekvivalentní Riemannově definici.

Darbouxova definice založená na horních a dolních integrálních součtech se stala základem výkladu o Riemannově integrálu i u nás, viz např. K. Petr: *Počet integrální* (1915, 2. vyd. z roku 1931) nebo V. Jarník: *Integrální počet I. 1948,* resp. původní verze *Úvod do integrálního počtu* z roku 1938.

Srovnáme-li Newtonovu a Riemannovu definici určitého integrálu, musíme konstatovat, že existují funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ takové, že jsou integrovatelné v Riemannově smyslu, ale v Newtonově nikoliv a naopak.

V. Volterra

Relativně složitý příklad uvedl v roce 1881 **Vito Volterra** (1860 – 1940). Sestrojil příklad spojité funkce, která má omezenou derivaci a tato derivace není integrovatelná v Riemannově smyslu. V tomto Volterrově příkladu jde o to, že je k dispozici spojitá primitivní funkce F a její derivace F', ale integrál z této derivace vytvořený jako „limita“ riemannovských integrálních součtů není vhodný k tomu, aby platil základní newtonovský vztah $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$ s integrálem vpravo chápaným jako Riemannův integrál. Volterra tak určil funkci, která má Newtonův integrál ale nemá integrál Riemannův. Odhalil to, že Riemannův integrál není univerzální v tom smyslu, že by plně pokryl integrál Newtonův, pomocí kterého se prováděly všechny konkrétní výpočty v dřívějších dobách.

Volterrův příklad stejně jako dříve zmíněný příklad Riemannův svědčí o matematických postupech konce devatenáctého století. Jde o snahu uvádět příklady, které se matematikům mohou jevit jako exotické, které však jsou z hlediska matematiky velmi podstatné, jelikož vymezují dosah pojmů a leckdy také boří mýty nebo vžité falešné představy. Do této kategorie patří Weierstrassův (nebo i daleko dřívější Bolzanův) příklad funkce, která je spojitá a přitom nemá nikde derivaci, nebo zmíněný Volterrův příklad funkce, kterou je vhodné integrovat dle Newtonovy definice, zatímco Riemannova definice pro její integrování vhodná není.

Úvahy tohoto typu ze sklonku 19. století jsou předzvěstí zcela nové a převratné teorie integrálu, který byl zaveden a rozvinut Henri Lebesguem hned na počátku století dvacátého. Souvisejí rovněž se vznikem pojmu míry množiny.

3. Cesta k míře množin

V Riemannových úvahách o integrovatelnosti funkcí hrála klíčovou roli oscilace $\omega(f,x)$ funkce f v bodě x. Připomeňme, že je definována jako

$$\omega(f,x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \omega(f,[x-\varepsilon,x+\varepsilon]) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\sup_{y\in[x-\varepsilon,x+\varepsilon]} f(y) - \inf_{y\in[x-\varepsilon,x+\varepsilon]} f(y)).$$

Pomocí ní Riemann formuloval nutnou a postačující podmínku, aby funkce f byla integrovatelná.

Paul Dubois–Reymond (1831 – 1889) ve své práci *Die allgemeine Funktionentheorie I.* v r. 1882 uvádí:

Je-li funkce $f(x)$ taková, že množina

$$\{x; \omega(f,x) > \sigma\}$$

je pro každé $\sigma > 0$ obsažena v konečném systému intervalů o libovolně malé celkové délce, potom je splněna Riemannova nutná a postačující podmínka integrovatelnosti pro funkci f a platí to i naopak.

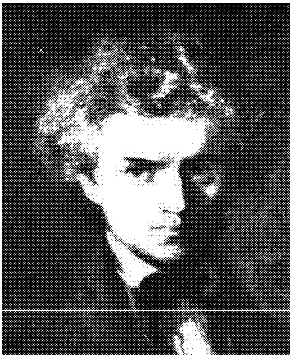
Dubois–Reymondův způsob prezentace Riemannovy podmínky je pozoruhodný tím, jak tato podmínka v sobě obsahuje pojem nulové množiny (množiny nulové délky, míry). Vede také přímo k definici *nulové množiny*:

Množina M je *nulová* (*nulové délky*), jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje *konečný* systém intervalů I_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, o celkové délce $\sum_{i=1}^{n} |I_i|$ menší než ε, pokrývající množinu M. Zde pro interval $I = (c, d)$ užíváme označení $|I| = d-c$ pro jeho délku.

Pojem nulové množiny vznikl v podstatě souběžně s Cantorovou teorií množin a sám Cantor mu věnoval jistou pozornost.

Spolu s výše uvedenou poznámkou lze nyní bez větší námahy usoudit, že funkce f je integrovatelná v Riemannově smyslu, právě když je množina jejích bodů nespojitosti nulová. Povšimneme-li si Riemannova příkladu nespojité funkce, jak jsme jej uvedli dříve, shledáme, že množina bodů její nespojitosti je nulová v tom smyslu, jak to upřesnil Dubois-Reymond.

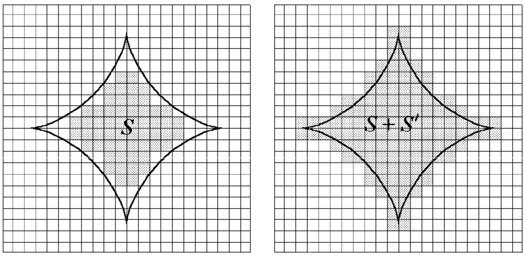
Jordanova – Peanova míra



C. Jordan

Na nulové množiny lze hledět jako na množiny, kterým je přiřazena nulová míra; ta v jistém smyslu vypovídá o tom, že tyto množiny mají nulovou délku (plošný obsah, objem), nebo obecně *míru.* V jistém smyslu bylo přirozené chtít číselně vyjádřit velikost nebo „míru" i pro jiné než nulové množiny. V devatenáctém století byly v tomto směru učiněny jisté kroky. **Camille Jordan** (1832 – 1922) v práci *Remarques sur les integrales définies* z r. 1892 (Journ. de Math.) postupuje v případě rovinných množin takto:

Utvořme v rovině čtvercovou síť (to znají dnes u nás i žáci základní školy) tvořenou přímkami, které jsou rovnoběžné s osami souřadnic. Nechť S je součet obsahů všech čtverců sítě, které jsou ve vnitřku množiny M a nechť S' je součet obsahů všech čtverců sítě, které obsahují alespoň jeden bod hranice množiny M. Součet $S + S'$ vyjadřuje součet plošných obsahů těch čtverců ve čtvercové síti, které obsahují body uzávěru množiny M.

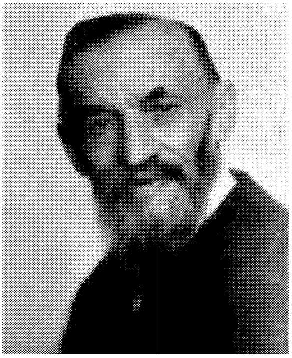


Obr. 15. Vnitřní a vnější Jordanova – Peanova míra

Při neomezeném zjemňování čtvercové sítě, konvergují součty S a $S + S'$ k limitám. První z těchto limit se nazývá *vnitřní*, druhá pak *vnější Jordanova – Peanova míra* množiny M. Jestliže jsou tyto hodnoty stejné, nazývá se množina *M měřitelná v Jordanově – Peanově smyslu* a společná hodnota vnější a vnitřní Jordanovy – Peanovy míry se nazývá *Jordanova – Peanova míra* množiny M.

Při tomto popisu jsme užili jména italského matematika **Giuseppe Peana** (1858 – 1932), který ve své knize *Applicationi geometriche del calcolo infinitesimale* z roku 1887 vnější míru množiny určil jako infimum obsahů všech mnohoúhelníků, které množinu obsahují a vnitřní míru množiny stanovil jako suprémum obsahů všech mnohoúhelníků, které jsou v množině obsaženy.

Ekvivalentnost obou způsobů zavedení těchto měr (tj. Jordanova a Peanova způsobu) lze ukázat elementárně.



G. Peano

Při pohledu na tyto definice se snadno dostáváme k antickým technikám a myšlenkám, které užívali Eudoxos nebo Archimédes. Jsou vylepšeny o pojmy limity, infima a supréma, které v upřesněné podobě přinesl konec 19. století (a které velmi pravděpodobně vyjadřují to, co se antičtí matematikové ve své hrůze z nekonečna báli vyslovit).

Souvislost Jordanovy – Peanovy míry s pojmem Riemannova integrálu je patrná z následujícího tvrzení, které lze nalézt ve výše zmíněném Peanově díle.

Nechť je dána nezáporná omezená funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Buď

$$E(f,[a,b]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in [a,b], 0 \le y \le f(x)\}.$$

K tomu, aby funkce f byla integrovatelná v Riemannově smyslu v intervalu $[a,b]$ je nutnou a postačující podmínkou, aby byla množina $E(f,[a,b])$ měřitelná v Jordanově – Peanově smyslu. Přitom platí, že hodnota integrálu $\int_a^b f(x)dx$ je rovna Jordanově – Peanově míře množiny $E(f,[a,b])$.

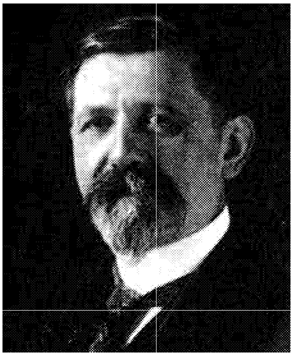
Definitivní podobu získala Jordanova – Peanova míra ve velmi prestižním druhém vydání knihy *Cours d'analyse* od C. Jordana z r. 1893; proto je též nazývána Jordanovým objemem. Je totiž nasnadě, že techniku, kterou jsme popsali pro případ rovinných množin, lze přenést bez podstatných změn i do vyšších dimenzí.

Borelův pohled na míru

Emile Borel (1871 – 1956) v roce 1898 publikoval knihu *Leçons sur la théorie des functions* a formuloval v ní (na malém prostoru čtyř stran) nové principy, kterými by se měl řídit ten, kdo podá definici míry množiny.

Borel podal výčet vlastností, kterým má pojem míry množiny vyhovovat; uvedl tedy *deskriptivní* (popisnou) *definici* míry:

(1) *Míra je vždy nezáporná.*
(2) *Míra sjednocení spočetného systému* (nepřekrývajících se) *množin je rovna součtu jejich měr.*
(3) *Míra rozdílu dvou množin* (tj. množiny a její podmnožiny) *je rovna rozdílu jejich měr.*
(4) *Množina, jejíž míra není nulová, je nespočetná.*



E. Borel

V této souvislosti je zásadní existence objektů, které jsou popisem dány. V našem konkrétním případě se ihned nabízí otázka jak vypadají množiny, pro které lze míru definovat tak, aby vyhovovala výše uvedeným požadavkům a zda taková míra – pokud existuje – je jednoznačně dána.

Borel se pokusil o odpověď na první problém. Vyšel z celkem přirozeného požadavku, že mírou (otevřeného) intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je jeho délka $b - a$.

Je užitečné si uvědomit, co dají vlastnosti (2) a (3) z výše uvedeného Borelova výčtu, tj. o jakých množinách může být řeč, když už víme, jaká je míra otevřeného intervalu v $\mathbb{R}$. Vyjděme z toho, že budeme zkoumat podmnožiny uzavřeného intervalu $[A, B]$. Míru lze přiřadit otevřeným intervalům $(a, b) \subset [A, B]$ a podle (2) také jejich spočetným sjednocením. To znamená, že můžeme určit míru všech otevřených množin, které jsou částí intervalu $[A, B]$. Podle (3) lze určit i míru všech uzavřených množin v $[A, B]$, protože ty jsou komplementem (tj. množinovým rozdílem $[A, B] \setminus G$) nějaké otevřené množiny $G \subset [A, B]$. A tak lze pokračovat.

V dnešní podobě lze říci, že třída množin v $[A, B]$, kterým lze dle Borela přisoudit míru, má tu vlastnost, že je uzavřená vůči tvorbě množinového doplňku, spočetných sjednocení a spočetných průniků. Taková třída množin se nazývá *σ–algebra množin.* Přesně řečeno neprázdný soubor Σ množin $E \subset [A, B]$ je σ–algebra, když splňuje tyto vlastnosti (znakem $C(E) = [A, B] \setminus E$ je označen doplněk množiny E v intervalu $[A, B]$):

1. $E \in \Sigma \implies C(E) = [A, B] \setminus E \in \Sigma$,
2. když je $E_k \in \Sigma$ pro $k = 1, 2, \ldots$, potom také $\bigcup_k E_k \in \Sigma$.

Je vhodné poznamenat, že ze vztahu $C(\bigcap_k E_k) = \bigcup_k C(E_k)$ plyne, že $\bigcap_k E_k \in \Sigma$, když Σ je σ–algebra a $E_k \in \Sigma$ pro $k = 1, 2, \ldots$. Navíc je vidět, že prázdná množina a celý interval $[A, B]$ rovněž patří k σ–algebře.

Nejmenší σ–algebra podmnožin v $\mathbb{R}$, která obsahuje všechny otevřené množiny v $\mathbb{R}$, se dnes nazývá *Borelova σ–algebra* a její prvky se nazývají *borelovské podmnožiny v $\mathbb{R}$.*

Úvahy tohoto abstraktního typu nepocházejí od Borela, jsou formalizací jeho představ v dnešní podobě.

U E. Borela lze nalézt jenom základní ideje, samotné provedení a podrobný popis, jak získat třídu množin, pro něž lze definovat míru při zachování stanovených požadavků, Borel nepodal. Borelův přístup byl zásadně bohatší než Jordanova teorie objemu v tom, že požadoval aditivitu míry pro *nespočetné* systémy množin.

Popis míry vycházející z Borelových postulátů podal v roce 1905 H. Lebesgue; požadované množiny nazval *měřitelnými množinami* (přesněji říkal, že jsou B–měřitelné). Toto umožnilo Lebesgueovi zavedení zcela jiného typu integrálních součtů než použil Riemann.

⋆ ⋆ ⋆

19. století je ve vývoji integrálu důležitým obdobím:

- ► Cauchy a Riemann zavedli konstruktivní, součtové definice integrálu, kterými se vrátili k řecké exhaustivní metodě;
- ► byly dány základní předpoklady pro vznik teorie míry (Jordan, Peano), Borelovy postuláty pro zavedení míry daly podnět k novému přístupu k definici integrálu ve 20. století.