Augustin Pánek (1843–1908)

Obrázek je převzat z knihy V. Posejpala *„Dějepis Jednoty českých mathematiků“* (Praha, JČM, 1912).

4. Výuka teorie pravděpodobnosti na vysokých a středních školách v českých zemích v 19. století

4.1 Úvod

Obecně lze říci, že v 19. století se u nás teorii pravděpodobnosti nikdo nevěnoval vědecky a nevznikly u nás žádné původní práce z této oblasti[139], teorie pravděpodobnosti se však začala objevovat ve výuce na školách vysokých i na školách středních, což bylo důležité pro další rozvoj této disciplíny.

Pokud se vysokoškolské výuky týče, zdá se, že první tištěnou prací týkající se teorie pravděpodobnosti a určenou vysokoškolským studentům byla malá stať Stanislava Vydry vydaná v r. 1779, o které byla řeč ve 2. kapitole. Vydrovým nástupcem se stal jeho žák Ladislav Jandera (1776–1857), nepodařilo se však zjistit, zda na Vydru nějak navázal, co se teorie pravděpodobnosti týče, a zda do svých přednášek zařazoval nějaké poznatky týkající se teorie pravděpodobnosti.

Kromě profesury matematiky, kterou zastával nejprve Vydra a po něm Jandera, byly na pražské univerzitě ještě další matematické profesury, a to profesura vyšší matematiky a profesura praktické matematiky. Na místech profesorů se zde objevují známá jména (např. F. A. L. Herget, F. J. Gerstner, J. F. Kulik), není však známo, že by někdo z nich ve svých přednáškách věnoval teorii pravděpodobnosti nějakou pozornost.

Zdá se proto, že prvním pražským univerzitním profesorem, který do svých přednášek zařazoval aspoň základní poznatky z teorie pravděpodobnosti, byl Bernard Bolzano, jehož učebnici náboženství jsem věnovali pozornost v předešlé kapitole. Připomeňme v této souvislosti, že úplný titul zmíněné učebnice náboženství zní: *„Lehrbuch der Religionswissenschaft, ein Abdruck der Vorlesungshefte eines ehemaligen Religionslehrers an einer katholischen Universität, von einigen seiner Schüler gesammelt und herausgegeben“*[140]. Kniha vyšla v Sulzbachu v r. 1834, podle názvu však obsahuje Bolzanovy přípravy na přednášky a Bolzano byl zbaven profesury koncem roku 1819[141] , takže je zřejmé, že již před rokem 1820 zařazoval Bolzano do svých náboženských přednášek základní poznatky týkající se počítání

[139] Jedinou výjimku asi představují dvě knihy Emanuela Czubera (viz kap. 5), které byly napsány v době jeho působení na vysokých školách v Praze a v Brně, ale vyšly v Lipsku.
[140] V knize není autor uveden, je však známo, že se jedná o Bolzanovu práci.
[141] Rozhodnutí o Bolzanově sesazení bylo učiněno ve Vídni 24. XII. 1819 a Bolzanovi bylo doručeno 19. I. 1820 ([Fol], str. 13).

s pravděpodobnostmi náhodných jevů. Lze však považovat za jisté, že tím (pokud jde o teorie pravděpodobnosti) nikoho a nic neovlivnil.

Ponecháme-li tedy stranou Bolzanovy náboženské přednášky a budeme-li věnovat pozornost přednáškám matematickým, pak je třeba konstatovat, že dříve než na univerzitě začala být teorie pravděpodobnosti zařazována do přednášek (aspoň občas) na pražské technice. Prvenství v tomto směru zřejmě náleží Christianu Dopplerovi, který na pražské technice působil v letech 1837–1847; této otázce se budeme věnovat podrobněji v následujícím paragrafu.

V krátkém přehledu v knize [Šiš] na str. 199 se uvádí, že po Dopplerovi zařazoval základy teorie pravděpodobnosti do svých výkladů i Karel Kořistka (byl jmenován profesorem na pražské polytechnice 1. září 1851 ([JL], str. 410)) a snad poprvé jako samostatný předmět vyučoval teorii pravděpodobnosti dvě hodiny týdně Heinrich Durège ještě na utrakvistické polytechnice v zimním semestru šk. r. 1866/67 (viz též [JL], str. 520). U žádného z těchto dvou profesorů se nám však nepodařilo najít žádnou publikaci z oblasti teorie pravděpodobnosti a tak se zdá, že této disciplíně věnovali (možná jen občas) jistou pozornost ve svých přednáškách, systematicky se jí však nezabývali.

Pokud jde o pražskou univerzitu, v [DE] na str. 136 se píše: *„Po r. 1848 ... byla hlavně zásluhou Matzkovou věnována větší pozornost geometrii a výjimečně i počtu pravděpodobnosti“*; dále na str. 140 se říká: *„Bez povšimnutí zůstala i teorie pravděpodobnosti, která se teprve v padesátých letech stala předmětem univerzitních přednášek“*.

Wilhelm Matzka se narodil 4. XI. 1798 v Litobratřicích (okres Mikulov), zemřel 9. VI. 1891 v Praze. Studoval na univerzitách v Praze a ve Vídni, pak působil od r. 1832 jako profesor matematiky na dělostřelecké škole ve Vídni, od r. 1837 na filozofickém učilišti v Tarnově, od r. 1849 na pražské technice a od r. 1850 na pražské univerzitě.

Nepodařilo se nám zjistit ani jednu publikaci prof. Matzky z oblasti teorie pravděpodobnosti; dvě jeho publikace (napsané ovšem před jeho příchodem do Prahy) by snad bylo možné zahrnout do tzv. vyrovnávacího počtu. Zdá se tedy, že prof. Matzka byl v oblasti teorie pravděpodobnosti činný pouze učitelsky, nikoli badatelsky.

Domníváme se proto, že prvním českým matematikem, který teorii pravděpodobnosti nejen vyučoval, ale ve větší míře rovněž publikoval články z této oblasti, byl Augustin Pánek, kterému bude věnován paragraf 4.3. Považujeme však za nutné předeslat, že u Pánka nelze ještě mluvit o systematické vědecké činnosti v této oblasti; v tomto směru náleží prvenství Emanuelu Czuberovi (viz kap. 5), který působil zhruba ve stejné době na německé technice v Praze.

V souvislosti se začínající výukou teorie pravděpodobnosti u nás vzniká otázka, zda ve druhé polovině 19. století došlo k nějakému ovlivnění vývoje teorie pravděpodobnosti u nás v souvislosti s rozvojem pojišťovnictví. Nahlédneme-li do monografie [Dep] o historii pojišťovnictví u nás, pak zjistíme, že žádné takové ovlivnění nebylo zaznamenáno. Kurz pojistné techniky na vídeňské technice byla zahájen ve šk. r. 1894/95, na české pražské technice až ve šk. r. 1904/05, na brněnské německé technice [142] dokonce až v r. 1908. Z matematiků, kteří se v tomto směru uplatnili, je v [Dep] uveden pouze Emanuel Czuber[143].

V knize [Dep] na str. 193 je sice zmínka o tom, že počátkem 20. století byly u nás do výuky na měšťankách zařazovány nejzákladnější otázky pojišťovnictví, není zde však žádná zmínka o tom, že už ve druhé polovině 19. století se jednoduché úlohy z oblasti životního pojištění objevují v učebnicích středoškolských (viz následující paragraf 4.4). Z tohoto hlediska je rovněž zajímavé, že v paragrafu 4.4 uvedený F. J. Studnička není v knize [Dep] uveden v seznamu významných osobností z historie pojišťovnictví[144]; jeho jméno se zde objevuje pouze dvakrát (str. 106, 108) v seznamu funkcionářů pojišťovny „Praha“. Zdá se tedy, že F. J. Studnička, jehož jméno je nepřehlédnutelné v historii české matematiky, nehrál v historii českého pojišťovnictví nijak významnou roli a působení v této oblasti pro něj asi představovalo pouze okrajovou záležitost[145].

[142] Podrobný rozbor situace na brněnské německé technice lze nalézt v knize [Šiš], str. 198 a násl.; je zde připojen také celkový přehled výuky pojišťovnictví na vysokých školách v českých zemích v uvedeném období.
[143] Czuberovi je věnována 5. kapitola této knihy. Spolu s Czuberem je v [Dep] jako další z čelných představitelů rakouské pojistné teorie na počátku 20. století uveden Ernst Blaschke (1856–1926), který však má s Čechami společné pouze to, že se narodil v Místku na Moravě; prakticky celý život působil ve Vídni. Další jména, uvedená v souvislosti s pěstováním pojistné matematiky na české pražské technice, jsou Josef Beneš (1859–1927) a Karel Svoboda (1880–1934), ti se však nezabývali teorií pravděpodobnosti; totéž lze říci o Gabrielu Blažkovi (1842–1910), jehož zásluhy o pojistnou matematiku ([Bč1], [ML]) jsou asi spíš ve sféře administrativně-organizační než ve sféře odborné. J. Beneš sice napsal jednu práci týkající se teorie pravděpodobnosti, ta však vyšla až v r. 1920 a bude o ní řeč v paragrafu 6.2.
[144] Seznam osobností je v [Dep] uveden na str. 274 – 282 a obsahuje 56 jmen z celé Evropy od 17. století do r. 1918.
[145] Považujeme za nutné upozornit na to, že v článku [ML] je vysloven odlišný názor. Uvážíme-li však, že Studnička publikoval články takřka o všem, čím se jen trochu zabýval (viz

4.2 Pravděpodobnost v Dopplerově učebnici aritmetiky a algebry

4.2.1 Úvod

Christian Doppler se narodil v Salcburku 29. listopadu 1803. Studoval ve Vídni na polytechnice i na filozofické fakultě a v letech 1829–1833 působil jako asistent na vídeňské polytechnice. V r. 1835 se stal profesorem pražské stavovské reálky a snažil se získat možnost přednášet i na pražské polytechnice; od prosince 1837 tam suploval přednášky a v r. 1841 byl jmenován řádným profesorem na této polytechnice. V r. 1840 se stal mimořádným a v r. 1843 řádným členem Královské české společnosti nauk. V r. 1847 odešel do Banské Štiavnice, kde se stal profesorem na báňské a lesnické akademii, a odtud odešel v r. 1849 do Vídně, kde byl jmenován nejdříve profesorem vídeňské techniky[146], a potom v r. 1850 profesorem vídeňské univerzity a ředitelem fyzikálního ústavu. Zemřel 17. března 1853 v Benátkách[147].

Co se Dopplerova učitelského působení na pražské polytechnice týče, v [JL], str. 304 se píše, že pro své přednášky si Doppler vypracoval vlastní texty, které se však nedochovaly. Jeho výklad teorie pravděpodobnosti proto můžeme posuzovat jenom podle jeho tiskem vydané učebnice, jejíž první vydání vyšlo v Praze roku 1844 pod názvem:

„Arithmetik und Algebra. Mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse des practischen Lebens und der technischen Wissenschaften. Nebst einem Anhang von 450 Aufgaben. ... Der Elementar-Mathematik erster Band.“

Poslední část titulu ukazuje, že učebnice byla (spíš asi: měla být) částí rozsáhlejšího díla, jehož titul je v knize umístěn na levé (tj. sudé) stránce před nahoře uvedeným názvem; titul na levé stránce zní: *„Lehr- und Handbuch der Elementar-Mathematik mit vorzüglicher Berücksichtigung der Bedürfnisse des practischen Lebens und der verschiedenen technischen Wissenschaften.“*

Je zajímavé, že v knize není uveden nakladatel; na obou titulních stránkách (levé i pravé) je pod čarou uvedeno místo a rok vydání (*Prag, 1844*) a ná-

---

kompletní Studničkovu bibliografii v [Ně]), pak velice malý počet článků s pojišťovací tématikou svědčí spíše pro náš názor.

[146] Přesně vzato, profesorem vídeňské techniky byl Doppler jmenován už v říjnu 1848, ale kvůli neklidné politické situaci odešel do Vídně až v lednu 1849. Viz Pöss, O.: *Christian Doppler in Banská Štiavnica* ([Št], str. 58 a násl.).

[147] Podrobné informace o Dopplerovi lze najít např. ve sborníku [Št].

sleduje informace: *„Zu haben beim Verfasser, Altstadt, Nro. 799.* [148] *– Für das Ausland in Commision bei Borrosch & Andrée."* Zdá se tedy, že knihu vydal Doppler vlastním nákladem.

Druhé vydání této učebnice vyšlo v r. 1851 ve Vídni. Titul knihy je stejný jako u vydání prvního, ale chybí poslední věta *„Der Elementar-Mathematik erster Band"* a jako nakladatel je uveden Wilhelm Braumüller. Na titulní stránce je sice uvedeno *„Zweite verbesserte Auflage"* , ale v části věnované teorii pravděpodobnosti jsme nenašli žádné odchylky proti prvnímu vydání (kromě odlišného stránkování, které zřejmě souvisí s odlišným formátem obou vydání).

V prvním vydání, ze kterého zde vycházíme, je teorie pravděpodobnosti zařazena do třetí kapitoly s názvem *„Die Lehre von den Permutationen, Combinationen und Variationen nebst den ersten Elementen der Wahrscheinlichkeitsrechnung"*. Celá tato kapitola se nalézá na stránkách 88–103 a v souladu s uspořádáním celé knihy je dále členěna na čtyři části označené A, B, C, D a na paragrafy, které jsou v knize číslovány průběžně; v této kapitole to jsou §§ 98–112. Na tuto kapitolu pak navazují v dodatku úlohy č. 157–167, nacházející se na str. 251–253.

Teorii pravděpodobnosti je věnována část D *„Von der Anwendung der Combinationslehre auf die ersten Elemente der Wahrscheinlichkeits-Rechnung"*. Tato část se nalézá na str. 95–103 a obsahuje paragrafy 107–112; v dodatku na tuto část navazují úlohy č. 162–166 na str. 252.

Stejně jako v dnešních středoškolských učebnicích je zde teorie pravděpodobnosti vykládána v návaznosti na kombinatoriku. Výklad vychází z tzv. klasické definice pravděpodobnosti[149] a je elementární, což je vidět na řešených úlohách zařazených do textu, protože se však jedná o první vysokoškolskou učebnici v českých zemích, která obsahovala nějaký výklad teorie pravděpodobnosti, podáme zde přehled těchto úloh[150].

[148] Je zřejmě míněn dům č. 799 v ulici U obecního dvora, ve kterém Doppler nějakou dobu bydlel.

[149] V § 112 však Doppler mluví o experimentálním stanovení pravděpodobnosti na základě dlouhé série pokusů.

[150] K hlubšímu seznámení s teorií pravděpodobnosti doporučuje Doppler studentům na str. 103 své učebnice Laplaceovy knihy *„Théorie analytique des probabilités"* a *„Essai philosophique sur les probabilités"*; druhá uvedená práce je sice obsažena jako úvodní část ve druhém vydání (a pak ve všech dalších vydáních) první uvedené práce, byla však často vydávána i samostatně

4.2.2 Pravděpodobnostní úlohy z Dopplerovy učebnice

§109/ úloha 1: Jaká je pravděpodobnost, že při jednom hodu dvěma hracími kostkami padne jistý součet ?

Doppler úlohu obecně rozebírá, stanoví pravděpodobnost, že součet bude roven devíti, a připojuje poznámku, že analogická úloha pro tři kostky by se řešila podobně.

§109/ úloha 2: V urně je 37 stejných kuliček a předpokládá se, že jistá osoba z nich může jednou rukou vytáhnout najednou nejvýše sedm. Jaká je pravděpodobnost, že tato osoba vytáhne lichý počet kuliček ?

Doppler řeší úlohu takto:

Všech možných případů je $$\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\cdots+\binom{7}{7}=127,$$

všech příznivých případů je $$\binom{7}{1}+\binom{7}{3}+\binom{7}{5}+\binom{7}{7}=64,$$

a z toho plyne hledaná pravděpodobnost 64/127; nakonec Doppler výslovně říká, že na celkovém počtu kuliček v urně nezáleží[151].

Přiznáváme se, že nám Dopplerovo řešení není jasné; podle tohoto řešení by např. pravděpodobnost, že ona osoba vytáhne jednu kuličku, byla sedmkrát větší než pravděpodobnost, že vytáhne sedm kuliček, a to bez ohledu na to, kolik je v urně kuliček[152]. Podle našeho názoru je úloha míněna tak, že každá kulička má stejnou pravděpodobnost vytažení jako každá dvojice kuliček, každá dvojice kuliček má stejnou pravděpodobnost vytažení jako každá trojice kuliček, ... , každá šestice kuliček má stejnou pravděpodobnost vytažení jako každá sedmice kuliček. Podle tohoto našeho názoru je proto v daném příkladu počet všech možných případů roven

[151] *„Man ersieht, daß hierbei auf die Anzahl der Kugeln, d. i. auf 37 gar keine Rücksicht genommen wurde, und in der That muß das Resultat für jede Zahl, die größer als 7 ist, ganz dasselbe sein.“*

[152] Autor knížky referoval (kromě jiného) o této Dopplerově úloze na 26. mezinárodní konferenci „Historie matematiky“ v Jevíčku v srpnu 2005 a dostal potom od posluchačů celou řadu připomínek a poznámek k této úloze. Základní problém spočívá asi v tom, že Dopplerova formulace úlohy je poněkud mlhavá a různí lidé ji mohou chápat různě; řešení podané Dopplerem by odpovídalo např. situaci, kdy osoba tahající kuličky vždy nejdříve vezme sedm kuliček a pak některé z nich může pustit, nikdy však nepustí všechny.

$$\binom{37}{1}+\binom{37}{2}+\cdots+\binom{37}{7}=13130671$$

a počet všech příznivých případů je roven

$$\binom{37}{1}+\binom{37}{3}+\binom{37}{5}+\binom{37}{7}=10739176,$$

takže hledaná pravděpodobnost je rovna $\dfrac{10739176}{13130671} \doteq 0{,}818.$

§ 109/ úloha 3: Úloha se týká tehdejší rakouské číselné loterie; protože se jednalo o velice častou úlohu v tehdejších učebnicích, budeme se jí věnovat podrobněji v paragrafu 4.4.2.1.

§ 110/ úloha 1: Jaká je pravděpodobnost, že při házení jednou nebo dvěma hracími kostkami padne vícekrát za sebou jisté číslo (jistý počet ok) ?

Číselně jsou řešeny dva případy[153]:
a) pravděpodobnost, že při házení jednou kostkou třikrát za sebou padne pětka, je rovna $1/6^3 = 1/216$;
b) pravděpodobnost, že při házení dvěma kostkami jednou padne součet rovný třem, jednou součet rovný šesti a jednou součet rovný dvanácti, je rovna $(1/18).(5/36).(1/36) = 5/23328$.[154]

§ 110/ úloha 2: Z úplné karetní hry je utvořen balíček obsahující všech třináct karet stejné barvy. Jaká je pravděpodobnost, že vrchní karta je král a následující karta je eso?[155]

Výsledek je roven $1/(12.13) = 1/156$.

§ 110/ úloha 3: Dvaatřicet karet tzv. malé hry je rozděleno do čtyř balíčků podle barev. Jaká je pravděpodobnost, že na první pokus bude vytažena zadaná karta, např. pikový král ?

[153] Třetí případ se objevuje jako úloha č. 164 v dodatku; má se stanovit pravděpodobnost, že při hodu jednou hrací kostkou padne šestka *m*-krát za sebou.
[154] U Dopplera je chyba tisku; ve výsledku je ve jmenovateli uvedeno 22328.
[155] Tato úloha se znovu objevuje v dodatku jako úloha č. 162.

Výsledek je roven (1/4).(1/8) = 1/36.

§ 111/ úloha 1: Jaká je pravděpodobnost, že při jednom hodu dvěma kostkami padne spíš součet 7 než součet 5 ?

Formulace této úlohy (i většiny dalších úloh z § 111 a některých úloh z dodatku) je z dnešního hlediska trochu neobvyklá. Z dnešního hlediska se v podstatě jedná o stanovení poměru pravděpodobností uvedených dvou jevů a ten je v daném příkladu roven 3 : 2, na základě čehož Doppler formuluje odpověď, že s pravděpodobností 3/5 padne součet 7 spíš než součet 5, a s pravděpodobností 2/5 padne spíš součet 5 než 7.

§ 111/ úloha 2: V urně je šest bílých, osm červených, čtrnáct modrých a dvanáct černých koulí. Jaká je pravděpodobnost, že v prvním tahu bude vytažena spíš modrá než černá koule ?[156]

Poměr pravděpodobností uvedených jevů je 7 : 6; podle Dopplera tedy s pravděpodobností 7/13 bude vytažena spíš modrá než černá koule a s pravděpodobností 6/13 bude naopak vytažena spíš koule černá než modrá.

§ 111/ úloha 3: V jedné urně jsou tři bílé a jedna černá koule, ve druhé urně jsou čtyři bílé a dvě černé koule. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném vytažení koule bude vytažena bílá koule ?[157]

Z dnešního hlediska se jedná o typickou úlohu vedoucí k použití věty o úplné pravděpodobnosti [158]; výsledek je (1/2).(3/4) + (1/2).(4/6) = 17/24.

§ 111/ úloha 4: Z úplné karetní hry obsahující 52 karet jsou náhodně vytaženy čtyři karty. Jaká je pravděpodobnost, že tyto karty budou spíš čtyři králové než čtyři libovolné karty stejné barvy ?

Základní myšlenka Dopplerova řešení zapsaná v dnešní symbolice spočívá v tom, že hledaný poměr pravděpodobností je roven

$$1 : \left[4.\binom{13}{4}\right],$$

což je 1 : 2860. Tato myšlenka je správná, v průběhu řešení se však u Dopplera objevily dvě numerické chyby[159], takže konečný výsledek by podle Dopplera byl 1 : 5720, což není správné.

---

156 Varianta této úlohy (spíše bílá než černá) se znovu objevuje v dodatku jako úloha č. 163.
157 Tato úloha se znovu objevuje v dodatku jako úloha č. 165.
158 Tato věta se ovšem v Dopplerově textu vůbec nevyskytuje.

Dodatek/ úloha č. 166: Jaká je pravděpodobnost, že bude uhodnuto slovo tvořené čtyřmi písmeny ?

Předpokládá se, že abeceda obsahuje 25 písmen a slova představují čtyřprvkové variace bez opakování; výsledek je 1/303600.

Dodatek/ úloha č. 167: Tato úloha sice není pravděpodobnostní, ale Doppler touto úlohou končí kombinatoricko-pravděpodobnostní část dodatku a její zařazení se nám jeví jako zajímavé, proto se o ní zmíníme.

Doppler zde klade otázku, čemu se rovná počet permutací 1000 prvků, tj. (v dnešní terminologii) čemu se rovná 1000!, a odpovídá: *„Die Zahl, die diese ausdrückt, ist mit nicht weniger als 2568 Ziffern geschrieben, von denen die ersten sieben 4023872 sind*[160]*. Der geübteste Rechner vermag nicht sich von der ungeheuren Menge der durch diese Zahl repräsentirten Einheiten eine auch nur einigermaßen richtige Vorstellung zu machen.“*[161]

Tato úloha se objevuje už ve výkladové části učebnice jako poznámka na konci § 101. Povšimněme si první, tj. numerické části odpovědi. Doppler bohužel neříká nic o tom, jak k tomuto výsledku dospěl; výpočet hodnoty 1000! daleko přesahuje výklad provedený v učebnici a z tohoto hlediska není jasné, proč vlastně byla tato úloha do učebnice zařazena. Pro výpočet faktoriálů lze použít vzorce, který je dnes obvykle nazýván Stirlingův[162] ; Doppler ho sice ve své učebnici neuvádí, lze se však domnívat, že ho znal, a proto jsme s tímto vzorcem provedli několik výpočtů (samozřejmě na kalkulačce, nikoli ručně, jak musel počítat Doppler). Nejjednodušší podoba Stirlingova vzorce se dnes většinou píše ve tvaru

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\ ,$$

---

[159] Doppler nejprve uvádí, že $\binom{52}{4} = 812175$ (správně 270275), a pak uvádí, že $\binom{13}{4} = 1430$ (správně 715).

[160] Výpočtem v programovém produktu MAPLE jsme ověřili, že Dopplerův výsledek je správný.

[161] *„Číslo, které toto vyjadřuje, není zapsáno méně než 2568 ciframi, z nichž prvních sedm je 4023872. Ani ten nejzkušenější počtář si nemůže udělat nějakou aspoň trochu správnou představu o ohromném množství jednotek, reprezentovaných tímto číslem.“*

[162] Vzorec nazývaný dnes Stirlingovým jménem publikovali prakticky současně v r. 1730 James Stirling (1692–1770) a Abraham de Moivre (1667–1754); podrobnosti viz např. [Ha1], str. 469 a násl. Jejich výsledky měly poněkud rozdílnou formu a podle Halda ([Ha1], str. 483) je dnes jako Stirlingův vzorec označován výsledek, kterého fakticky dosáhl Moivre.

tento tvar (po zlogaritmování) však podle našich průzkumů nestačí k dosažení požadované přesnosti (tj. přesnosti, které dosáhl Doppler). Teprve přesnější tvar

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}\right)$$

dal (po zlogaritmování) výsledek, kterého dosáhl Doppler.

Doppler neuvádí, že by uvedený výsledek odněkud přebral, je tedy nutné předpokládat, že ho vypočítal sám, a je škoda, že neuvedl aspoň základní postup, kterého použil.

4.3 Augustin Pánek a jeho práce z teorie pravděpodobnosti

4.3.1 Úvod

Augustin Pánek[163] se narodil 3. XII. 1843 v Praze a tam také zemřel 10. XII. 1908. Studoval na pražské technice a pak většinu života působil jako středoškolský profesor na různých pražských školách; v r. 1872 se sice stal soukromým docentem [164] na české technice v Praze, ale až v r. 1896 byl na této technice jmenován mimořádným profesorem a dokonce až v r. 1904 profesorem řádným.

Co se výuky teorie pravděpodobnosti týče, sehrál Pánek na pražské české technice podobnou zakládající roli, jakou asi měl na pražské univerzitě W. Matzka. Na rozdíl od Matzky však Pánek teorii pravděpodobnosti nejen vyučoval[165], ale také publikoval řadu prací z této oblasti. Většinou vyšly v „Časopisu pro pěstování mathematiky a fyziky“ a podle našeho názoru je lze charakterizovat jako práce pedagogického charakteru, nikoli jako původní práce vědecké (což nevylučuje, že by nemohly obsahovat dílčí nové poznatky). Jedná se o následující články[166]:

[163] Za základní článek o Pánkovi lze považovat článek [Pe], ze kterého zde vycházíme; neprováděli jsme žádný průzkum archivních materiálů. Nejnovější prací o Pánkovi je článek [Bč3], který obsahuje podrobné informace o Pánkově životě.
[164] Habilitoval se pro obor určitých integrálů ([Pe], str. 1).
[165] Podrobný přehled Pánkovy učitelské činnosti včetně údajů o jeho pravděpodobnostních přednáškách je podán v [Bč3].
[166] Vycházíme zde ze seznamu Pánkových prací uveřejněného v [Pe]; z tohoto seznamu jsme vybrali práce, které se podle názvu týkají teorie pravděpodobnosti. Je tedy možné, že existují i jiné Pánkovy práce (nebo části prací) věnované teorii pravděpodobnosti, u kterých se podle názvu nepozná jejich pravděpodobnostní obsah, domníváme se však, že to podstatné z Pánkových pravděpodobnostních článků je v předloženém seznamu zahrnuto.

1) Poučka binomiální v počtu pravděpodobnosti
[Čas. pěst. 5 (1876), 178–182]
2) Příspěvek k počtu pravděpodobnosti[167]
[Čas. pěst. 5 (1876), 221–226]
3) O mathematické a morální naději[168]
[Čas. pěst. 6 (1877), 69–76, 122–130, 218–224; 7 (1878) 78–91]
4) Některé úlohy zakládající se na počtu pravděpodobnosti
[13. výroční zpráva o obecném gymnasiu realním ... v Praze, 1880, str. 13–17]
5) Experimentální určení Ludolfského čísla π
[Čas. pěst.10 (1881), 272–275]
6) Počet pravděpodobnosti v geometrii
[Čas. pěst.11 (1882), 121–122]
7) Pravděpodobnost a posteriori
[Čas. pěst.12 (1883) 227–232, 281–294]
8) Příspěvek k počtu pravděpodobnosti
[Čas. pěst.13 (1884), 268–271]
9) Úloha z počtu pravděpodobnosti
[Čas. pěst.15 (1886), 271–273]
10) Řešení Laurentovy úlohy z počtu pravděpodobnosti
[Čas. pěst. 20 (1891), 94–97]
11) O jistém problému z počtu pravděpodobnosti
[Čas. pěst. 20 (1891), 105–107]
12) Problém z geometrické pravděpodobnosti
[Čas. pěst. 20 (1891), 148–150]

Tématicky lze tyto práce rozdělit do čtyř oblastí:

1) Nejrozsáhlejší Pánkova práce č. 3 má celkový rozsah cca 38 stránek[169]. Většina tohoto článku je věnována (v dnešní terminologii) střední hodnotě diskrétní náhodné veličiny s konečnou množinou možných hodnot, menší část je věnována tzv. morální naději[170] včetně formulace tzv. petrohradského problému[171].

[167] V tomtéž roce vyšlo také jako samostatná publikace v Praze „tiskem dra. Ed. Grégra. – Nákladem vlastním."
[168] V roce 1877 vyšlo také jako samostatná publikace v Praze „tiskem dra. Ed. Grégra. – Nákladem vlastním."
[169] Rozsah práce počítáme včetně první a poslední stránky, i když je možné, že část první a poslední stránky je věnována jinému článku.
[170] Pánek poznamenává (roč. 7, str.78), že místo termínu „morální naděje" lze mluvit o subjektivní naději. Pojem tzv. morální střední hodnoty pochází od Daniela Bernoulliho (1700–

Pokud jde o tzv. morální naději a petrohradský problém, těmito otázkami se zabýval i Emanuel Czuber a v paragrafu 5.4 ukážeme, jak tyto otázky vykládal. Přitom na některých místech ocitujeme i Pánka, nepovažujeme však za nutné porovnávat podrobně Pánkovy a Czuberovy práce na uvedené téma[172].

2) Druhá nejrozsáhlejší Pánkova práce č. 7 má celkový rozsah 20 stránek a je věnována Bayesově větě. Jedná se asi o jedinou Pánkovu pravděpodobnostní práci, ve které převažují obecné úvahy nad řešením úloh.

3) Třetí téma, kterému věnoval Pánek pozornost, byly úlohy týkající se tzv. geometrické pravděpodobnosti. Do této skupiny patří část článku č. 4 a články 5, 6, 9, 10 a 12 o celkovém rozsahu 18 stránek.

4) Zbývající články č. 1, 2, 8, 11 a část článku 4, to vše o celkovém rozsahu 25 stránek, jsou věnovány řešení různých pravděpodobnostních úloh.

Z obsahového hlediska lze říci, že články jsou většinou věnovány řešení různých úloh; obecných úvah je v nich málo. Vzhledem k tomu, že se Pánek habilitoval pro obor určitých integrálů, je na jeho pravděpodobnostních článcích překvapivé poměrně malé použití integrálního počtu.

4.3.2 Pánkovy geometricko-pravděpodobnostní úlohy

Z hlediska vývoje teorie pravděpodobnosti v českých zemích považujeme za vhodné věnovat Pánkovým úlohám na toto téma jistou pozornost, protože Pánkův současník E. Czuber na toto téma vydal v r. 1884 knihu a později (v r. 1926) B. Hostinský rovněž věnoval tomuto tématu celou knihu. Pánkovy práce zde budeme citovat podle seznamu v paragrafu 4.3.

Dnes je výklad o geometrických pravděpodobnostech součástí takřka každé učebnice teorie pravděpodobnosti; zde použijeme pro odkazy učebnici [ZŠ]. Základní informaci o moderní teorie geometrických pravděpodobností lze najít v práci [Sa2], z hlediska historického vývoje problematiky ve druhé polovině XIX. století (tj. v Pánkově době) je zajímavý článek [SPJ].

1782) a dnes představuje záležitost čistě historickou; podrobnější výklad o něm lze nalézt např. v [Tod], str. 213 a násl.

171 Tzv. petrohradský problém formuluje Pánek v roč. 6, str. 74 a násl.; základní informaci o něm lze najít např. v práci [Ma4].

172 Czuberovu výkladu jsme dali přednost proto, že se nám jeví jako přehlednější a navíc je skoro o půl století novější, takže Czuber při jeho přípravě mohl použít i prací, které v Pánkově době ještě neexistovaly (nebo existovaly, ale Pánek je neznal).

Část práce č. 4

Práce č. 4 obsahuje v podstatě dvě úlohy, z nichž první je věnována geometrickým pravděpodobnostem. Je elementární (ponecháme-li stranou odvození, které je podle našeho názoru zbytečně složité) a jádro problému lze zformulovat takto:

Na eliptické desce s poloosami A, B je narýsována elipsa s poloosami x, y.
a) Jaká je pravděpodobnost, že koule náhodně vržená na desku se zastaví uvnitř narýsované elipsy ?
b) Jaká je pravděpodobnost, že při n hodech se koule náhodně vržená na desku zastaví aspoň jednou vně narýsované elipsy ?

Předpokládáme-li (a Pánek to předpokládá, i když tyto předpoklady nikde výslovně neformuluje), že pravděpodobnost zastavení koule má rovnoměrné rozdělení na dané eliptické desce, a považujeme-li vzorec pro obsah elipsy za známý (což Pánek považuje), pak takřka není nad čím bádat; v případu a) je hledaná pravděpodobnost rovna $\frac{xy}{AB}$, v případu b) je hledaná pravděpodobnost rovna $1-\left(\frac{xy}{AB}\right)^n$.

Druhá Pánkova úloha v jeho práci č. 4 je daleko zajímavější a ještě se k ní vrátíme v paragrafu 4.3.3.

Práce č. 5

Práce je věnována klasické Buffonově úloze o házení jehlou a výpočtu čísla π; matematické řešení Pánek doplňuje údaji o některých experimentálních stanoveních čísla π pomocí Buffonovy úlohy[173].

Práce č. 6

Práce je věnována řešení následující původní Pánkovy úlohy:

V daném trojúhelníku o jednotkovém obsahu zvolíme náhodně dva body S, T. Jaká je pravděpodobnost, že jiné dva náhodně zvolené body v daném trojúhelníku leží na téže straně přímky ST ?

Pánek podává řešení této úlohy; podle něj je hledaná pravděpodobnost rovna 11/18. Autor této knížky se přiznává, že mu Pánkovo řešení není jasné a

[173] Dnešní výklad a další zobecnění viz [ZŠ], str. 57 a násl.

vlastní řešení neumí najít, doufá však, že některý z čtenářů této knížky bude v tomto směru úspěšnější.

<u>Práce č. 9</u>
Pánek zde formuluje a řeší následující původní úlohu (zde citujeme původní Pánkovu formulaci):

„Dva vlaky U a V, jichž délky jsou u *a* v *, pohybují se směrem ke společné křižovatce libovolnou rychlostí; je-li první vlak od ní vzdálen o* a *, druhý o* b, *při čemž* a > b, *a supponujeme-li, že konec vlaku V jest buď bližší buď vzdálenější křižovatky než počátek vlaku U, jaká jest pravděpodobnosť, že nastane u křižovatky srážka obou vlakův ?“*

Toto zadání je na začátku řešení ještě doplněno podmínkou: *„Nazvěmež rychlosti vlaků* x, y *i předpokládejme, že žádná není větší* c*.“*

Domníváme se, že úlohu lze považovat za jisté zobecnění známé úlohy a setkání dvou lidí (viz následující Pánkova práce č. 10). Při řešení úlohy je třeba rozlišit dva případy:

a) pokud $\dfrac{b+v}{a} \leq 1$, je hledaná pravděpodobnost rovna

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b+v}{a}-\frac{b}{a+u}\right);$$

b) pokud $\dfrac{b+v}{a} > 1$, je hledaná pravděpodobnost rovna

$$1-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+u}+\frac{a}{b+v}\right).$$

<u>Práce č. 10</u>
V práci je řešena následující úloha:

Dva lidé se domluvili, že se sejdou mezi pátou a šestou hodinou odpolední, přičemž první příchozí čeká deset minut a pak odchází. Jaká je pravděpodobnost, že se tito dva lidé setkají, jsou-li okamžiky jejich příchodů náhodné a v daném intervalu rovnoměrně rozložené.

Podle Pánkovy citace publikoval úlohu H. Laurent v r. 1873 a její řešení podal jistý Angličan Miller v r. 1880. Je zajímavé, že řešení této úlohy podává i Czuber v knize *„Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte“,* Teubner, Leipzig 1884, („Problem XXII“ na str, 45–47), ale Pánek se o Czuberovu řešení nezmiňuje; přitom se zdá prakticky nemožné, že by Pánek

Czuberovu knihu neznal[174]. Úloha se stala klasickou a v různých variantách se dnes objevuje v mnoha učebnicích[175] a sbírkách úloh; hledaná pravděpodobnost v Pánkově variantě úlohy je rovna 11/36.

<u>Práce č. 12</u>
Pánek zde formuluje a řeší následující původní úlohu (zde citujeme původní Pánkovu formulaci):

„K danému kruhu veďme tři libovolné tečny; jak veliká jest pravděpodobnosť, že bude onen kruh vepsán v trojúhelník, těmi tečnami způsobený."

Pánkovo řešení vychází z následující geometrické úvahy:
„Dejme tomu, že na daném kruhu středu O jsou dotyčné body A, B, C. Veďme z bodů těch průměry AA', BB' ... Má-li kruh býti vepsán v trojúhelník, tečnami způsobený, musí bod C ležeti na oblouku A'B' ..."

Hledaná pravděpodobnost je rovna 1/4.

Pánek ještě upozorňuje na to, že úloha je ekvivalentní úloze: *„Zvolíme-li na obvodě daného kruhu tři libovolné body, jak veliká jest pravděpodobnosť, že trojúhelník, těmi body stanovený, jest ostroúhlý".*[176]

4.3.3 Pánkova pravděpodobnostní úloha z teorie čísel

Jak už bylo řečeno, v práci č. 4 řeší Pánek dvě pravděpodobnostní úlohy. O první z nich už byla řeč v předešlém paragrafu, na druhou z nich se podíváme nyní, protože se nám jeví jako zajímavá a dodnes se objevuje v učebnicích[177].

Pánek tuto druhou úlohu formuluje následovně: *„V osudí nalézají se čísla od* 1 *do* n; *vytáhneme-li jedno z nich, jaká je pravděpodobnosť, že vytažené číslo jest s* n *nesoudělné ?"*

Hledaná pravděpodobnost je zřejmě rovna

---

[174] Uveďme pro zajímavost, že Hostinský v knize *„Geometrické pravděpodobnosti",* JČMF, Praha 1926, str. 33, cituje v této souvislosti pouze Pánkův článek, i když v jiných souvislostech zmíněnou Czuberovu knihu poměrně často cituje.
[175] Viz např. [ZŠ], str. 56.
[176] V této podobě cituje tuto Pánkovu úlohu Hostinský (*„Geometrické pravděpodobnosti",* JČMF Praha 1926, str. 33).
[177] Viz např. [Re], cvičení 47 na str. 77.

$$P = \frac{\varphi(n)}{n} \ ,$$

kde φ(n) je hodnota Eulerovy funkce[178] pro argument n; úlohy se používá k odvození vzorce pro výpočet hodnot Eulerovy funkce ze známého kanonického rozkladu čísla n .

Je-li kanonický rozklad čísla $n = p_1^{\alpha(1)} \,.\, p_2^{\alpha(2)} \,.\, \ldots\, p_k^{\alpha(k)}$, pak pravděpodobnost, že číslo n je dělitelné číslem p_i , je rovna

$$\frac{\dfrac{n}{p_i}}{n} = \frac{1}{p_i} \ ,$$

a pravděpodobnost, že číslo n není dělitelné číslem p_i , je tedy rovna

$$1 - \frac{1}{p_i} .$$

Pravděpodobnost, že číslo n není dělitelné žádným z čísel p_i , tj. hledaná pravděpodobnost P je rovna

$$P = \frac{\varphi(n)}{n} = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) ;$$

z toho plyne vzorec pro Eulerovu funkci

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) =$$

$$= \left(p_1^{\alpha(1)} - p_1^{\alpha(1)-1}\right)\left(p_2^{\alpha(2)} - p_2^{\alpha(2)-1}\right) \ldots \left(p_k^{\alpha(k)} - p_k^{\alpha(k)-1}\right) .$$

Tímto vzorcem (s odlišným značením) Pánkův článek končí. Bylo by zajímavé vědět, zda Pánkovo odvození je původní nebo zda ho Pánek odněkud převzal (a odkud). Na konci článku má sice Pánek poznámku pod čarou, ve které cituje několik prací[179], není však jasná souvislost mezi citovanými pracemi a odvozením podaným v článku.

---

[178] Eulerova funkce $\varphi(n)$ je definována pro všechna $n \in \mathbf{N}^+$ vztahem φ(1) = 1, pro $n \geq 2$ $\varphi(n)$= počet čísel v posloupnosti 1, 2, ... , n nesoudělných s n.

[179] *„Tuto větu uveřejnil nejprve Fermat r. 1679 bez důkazu. První důkaz podal Euler 1763 Nov. comm. Petrop. 8, str. 74, Acta Petrop. 8, str. 17. – Jiný důkaz podal Gauss, Disq. arithm. 38, Dirichlet, Zahlentheorie deutsch von Dedekind § 11. Serret, Höhere Algebra, deutsch von Wertheim, pag. 11. Nejjednodušší důkaz jest od Dirichleta. Viz: Studnička, Základové nauky o číslech, pag. 79.“*

4.3.4 Augustin Pánek a středoškolská výuka teorie pravděpodobnosti

V předešlém paragrafu jsme se zabývali jednou pravděpodobnostní úlohou, kterou Pánek uveřejnil v gymnaziální výroční zprávě. Tato zpráva obsahuje i základní informace o výuce prováděné na gymnáziu a můžeme si tedy učinit aspoň základní představu o tom, co z teorie pravděpodobnosti Pánek středoškolským studentům vykládal[180].

Ve zprávě (viz Pánkova práce č. 4) na str. 27 se uvádí, že A. Pánek vyučoval matematice v VII. třídě realní a náplň předmětu, který měl rozsah 5 hodin, byla následující:

„Arithmetika: Řetězce[181]. Variace, permutace, kombinace. Poučka binomická. Počet pravděpodobnosti: objektivní naděje. Důkaz vět algebraických a odůvodnění některých úloh geometrických počtem pravděpodobnosti.
Geometrie: Upotřebení algebry v geometrii. Analytická geometrie v rovině.“

Co se termínu „objektivní naděje“ týče, jedná se zřejmě o dnešní termín „střední hodnota“[182]; kromě této „objektivní (někdy také: matematické) naděje“ byla (občas) studována i tzv. „morální naděje“ (viz Pánkova práce č. 3 nebo Czuberova práce č. 1 (viz paragraf 5.3.1)). Pokud jde o „důkaz vět algebraických ... počtem pravděpodobnosti“, snad by do této skupiny mohl patřit důkaz vzorce pro výpočet hodnot Eulerovy funkce, o kterém byla řeč v předešlém paragrafu, o jiném příkladu však nevíme. Pod termínem „odůvodnění některých úloh geometrických počtem pravděpodobnosti“ je asi míněno studium geometrických pravděpodobností.

Protože citovaná výroční zpráva uvádí i používané učebnice, jeví se nám jako zajímavé porovnat tématiku vyučovanou Pánkem s náplní úředně uváděných učebnic. Ponecháme-li stranou geometrii, pak pro výuku aritmetiky měl Pánek používat 2. vydání Studničkovy *„Algebry“* a 2. vydání sbírky úloh od F. Hromádky a A. Strnada. O těchto učebnicích bude ještě řeč v dalším paragrafu, na první pohled je však zřejmé, že Pánek se jich příliš nedržel. Ani v jedné z těchto učebnic se neobjevují geometrické pravděpodobnosti nebo dokazování vět užitím počtu pravděpodobnosti[183]; naopak Pánek zřejmě nevykládal základy pojistné matematiky, které jsou zařazeny ve

[180] Co se Pánkovy výuky teorie pravděpodobnosti na české pražské technice týče, základní údaje lze najít v práci [Bč3], poznámka č. 28 na str. 210.
[181] V dnešní terminologii: řetězové zlomky.
[182] Přesněji řečeno, v tehdejších středoškolských učebnicích se objevuje (v dnešní terminologii) výpočet střední hodnoty diskrétní náhodné veličiny nabývající konečně mnoha hodnot.
[183] Tato problematika se neobjevuje ani ve sbírce maturitních úloh [Wal].

Studničkově učebnici, ve 2. vydání[184] sbírky Hromádko – Strnad i ve sbírce maturitních úloh [Wal].

4.4 Teorie pravděpodobnosti v českých středoškolských učebnicích

4.4.1 Úvod

První českou středoškolskou učebnicí algebry byla pravděpodobně učebnice Václava Šimerky (1819–1887) *„Algebra čili počtářství obecné"* z r. 1863; tato učebnice sice obsahuje základy kombinatoriky, nikoli však počtu pravděpodobnosti. Ten se objevuje až v učebnici Josefa Smolíka (1832–1915)[185] *„Algebra pro střední školy"*, která vyšla v Praze v r. 1870. Počtu pravděpodobnosti je zde věnováno závěrečných deset stránek učebnice (str. 278 – 287), přičemž (stejně jako v současných středoškolských učebnicích) je zde počet pravděpodobnosti vykládán v návaznosti na kombinatoriku. Četba Smolíkova textu není jednoduchá, neboť jeho pravděpodobnostní terminologie nemá s terminologií dnešní takřka nic společného; výklad nepřekračuje úroveň potřebnou k řešení jednoduchých pravděpodobnostních úloh kombinatorického charakteru, obsahuje však pojem *„mathematická naděje"* (str. 285), tedy v dnešní terminologii pojem střední hodnoty, který se dnes objevuje až v učebnicích vysokoškolských[186].

Poněkud odlišný charakter má výklad počtu pravděpodobnosti v učebnici Františka Josefa Studničky (1836–1903)[187] *„Algebra pro vyšší třídy škol středních"* (1. vyd. Praha 1877; zde vycházíme z vydání druhého (Praha 1879)). Stejně jako u Smolíka je výklad o počtu pravděpodobnosti zařazen až na závěr učebnice (str. 162–172), navazuje na kombinatoriku a má prakticky stejný rozsah jako u Smolíka. Studnička však zřejmě přikládá počtu pravděpodobnosti větší váhu než Smolík, protože mu věnuje samostatnou kapitolu (u Studničky *„Oddělení"*) členěnou dále do čtyř paragrafů, z nichž první tři sice představují pouze standardní úvod do elementárního počtu

[184] V 1. vydání sbírky Hromádko – Strnad nejsou základy pojistné matematiky zařazeny.
[185] Podrobnosti o Josefu Smolíkovi lze nalézt jednak v Ottově slovníku naučném, sv. XXIII (1905), jednak v pracích [Bč2, Ma5]. Působil jednak jako středoškolský profesor (hlavně na Československé obchodní akademii v Praze (1872–1893)), jednak jako pracovník Národního muzea v Praze (od r. 1883 byl kustodem numismatické sbírky, od r. 1909 ředitelem této sbírky); dodnes jsou ceněny jeho práce z oblasti dějin matematiky a jeho práce numismatické.
[186] Připomeňme v této souvislosti, že v Huygensově spisu *„De ratiociniis in ludo aleae"* se tento pojem (Huygens užívá termínu *„expectatio"*, tj. „očekávání") objevuje hned na začátku a představuje základní pojem, na kterém je vlastně celý Huygensův spis postaven.
[187] František Josef Studnička působil hlavně jako profesor na českých pražských vysokých školách ; podrobnosti o něm lze nalézt v monografii [Ně].

pravděpodobnosti[188], ale čtvrtý z nich nadepsaný *„§ 44. O upotřebení pravděpodobnosti při řešení úloh z počtářství národohospodářského“* (str. 168–172) už obsahuje jednoduché úlohy týkající se životního pojištění[189]. Tato problematika se dnes ve středoškolských učebnicích matematiky neobjevuje, v tehdejší době však zřejmě byla považována za součást všeobecného středoškolského vzdělání, protože úlohy tohoto typu se objevují i v tehdejších sbírkách maturitních úloh v kapitolách věnovaných kombinatorice v sousedství úloh pravděpodobnostních (viz např. [Wal])[190].

Na tyto učebnice navazovala *„Sbírka úloh z algebry pro vyšší třídy středních škol“*, kterou napsali František Hromádko a Alois Strnad; první vydání vyšlo v r. 1876 a v průběhu následujících třiceti let vyšla sbírka celkem sedmkrát[191]. Pokud jde o teorii pravděpodobnosti, 2. vydání sbírky (kterého používal ve výuce A. Pánek) obsahuje 35 úloh z počtu pravděpodobnosti[192]; uvážíme-li, že sbírka jako celek obsahuje více než 3000 úloh, není to nijak zvlášť mnoho[193].

I když je tento paragraf věnován českým středoškolským učebnicím, považujeme za vhodné doplnit ho malou zmínkou o německy psané sbírce maturitních úloh [Wal]. Její autor Dr. Franz Wallentin v předmluvě k prvnímu vydání (1879) uvádí, že sbírka obsahuje úlohy zadávané na rakouských gymnáziích a reálkách při písemných maturitních zkouškách v letech 1872–1878[194], přičemž v první řadě bylo přihlíženo k úlohám zadávaným na německých ústavech, v druhé řadě k úlohám zadávaným na ústavech českých a italských. Sbírka tedy asi nezachycuje přesně stav na českých středních školách, ale českou sbírku maturitních úloh z uvedeného časového období nemáme. Uveďme proto pro zajímavost, že Wallentinova sbírka obsahuje v § 13 *„Combinationslehre und binomischer Lehrsatz“* celkem 23 úloh, z nichž

[188] Na rozdíl od Smolíka nezavádí Studnička pojem střední hodnoty.

[189] Pro řešení takových úloh jsou nezbytné úmrtnostní tabulky; Studnička zde odkazuje na své *„Kapesní tabulky logarithmické“*, které vyšly v několika vydáních a obsahují na dvou stránkách i úmrtnostní tabulky.

[190] O pojišťovacích úlohách ze sbírky [Wal] je pojednáno v [Ma6].

[191] Katalog Národní knihovny ČR v Praze uvádí (kromě již zmíněného prvního vydání) ještě další vydání v letech 1879, 1885, 1890, (páté vydání v katalogu není uvedeno), 1902 a 1906.

[192] Úlohy jsou zařazeny do § 53 *„Počet pravděpodobnosti“* na str. 182–184. První vydání sbírky obsahovalo jen 25 úloh z počtu pravděpodobnosti; všechny tyto úlohy přešly do druhého vydání a byly doplněny dalšími úlohami.

[193] V 1. vydání sbírky jsou úlohy číslovány průběžně a pravděpodobnostní úlohy mají čísla 3202–3226.

[194] Sbírka vyšla vícekrát a úlohy v ní byly doplňovány a obměňovány.

dvě jsou pravděpodobnostní[195], a předchozí § 12 *„Zinseszinsen- und Rentenrechnung“* obsahuje celkem 100 úloh, z nichž posledních šest je věnováno úlohám na výpočet životního pojištění; pro jejich řešení jsou ke sbírce připojeny úmrtnostní tabulky podle Süßmilcha – Baumanna.

Celkově se tedy zdá, že v tehdejší středoškolské výuce se vykládaly základy teorie pravděpodobnosti stejně jako dnes v návaznosti na kombinatoriku; z teorie pravděpodobnosti bylo vyloženo nesrovnatelně méně než je vykládáno dnes, ale přesto byla okamžitě ukázána (alespoň jednoduchá) aplikace v životním pojištění.

4.4.2 Některé učebnicové úlohy

4.4.2.1 Úlohy motivované tehdejšími loteriemi

Loterijní problematika představovala častou motivaci pro pravděpodobnostní úlohy v tehdejších učebnicích. Kromě Dopplera, o kterém už byla řeč, věnuje Pánek ve své práci č. 3, část 2 více než čtyři stránky pravděpodobnostnímu rozboru některých tehdejších loterií; loterijní problematikou končí i výklad ve Smolíkově učebnici[196]. Pravděpodobnostním aspektům tehdejších loterií věnovali pozornost ve svých spisech i špičkoví matematici 19. století jako Laplace (*Théorie analytique des probabilités.* Paris, 1847, str. 208 a násl.)[197] nebo Poisson (*Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile.* Paris 1837, str. 68 a násl.)[198], pro dnešního zájemce jsou však tyto úlohy málo srozumitelné, protože tehdy obvyklá loterijní terminologie již upadla zcela v zapomnění. Protože různé „loterie“ (i když pod zcela odlišnými názvy) jsou populární i dnes, považujeme za vhodné věnovat zde historickým loterijním úlohám jistou pozornost; vyjdeme přitom ze Smolíkovy učebnice, který končí svůj výklad o pravděpodobnosti následující částí nadepsanou *„Dodatek“:*

„Má-li tedy býti sázka při lotteriích, sázkách a p. ve shodě s možnou výhrou, má se dle předešlého mathematická naděje hráče rovnati sázce. Nazveme-li sázku s, *podobnost*[199] p, *výhru* a *a mathematickou naději* e, *musí se*

[195] První z nich se týká tehdejší loterie (o ní bude řeč v paragrafu 4.4.2.1), druhá je následující: Jaká je pravděpodobnost, že na dvou kostkách padne v prvním hodu součet rovný devíti a pokud se to nestane, při druhém hodu padne součet rovný osmi ?

[196] Z autorů učebnic, o kterých jsme zde mluvili, pohrdl loterijní problematikou pouze Studnička.

[197] Kniha vyšla poprvé v r. 1812, další vydání byla v letech 1814 a 1820. Zde uvedené vydání z r. 1847 vyšlo jako sedmý svazek souborného vydání Laplaceových spisů.

[198] Pánek oba tyto autory cituje.

[199] Smolíkův termín p*odobnosť* = dnešní termín „pravděpodobnost“.

s = e = ap, *nebo* a = s/p. *Tohoto pravidla se však nešetří, poněvadž se nepochybně počítá na chuť hráčů, kteří bez práce a namáhání chtějí sbohatnouti. Tak např. v malé lotterii jest podobnosť, že vyjde extrato 1/18, nominato 1/90, ambo 1/400,5, terno 1/11748. Sadí-li se na některé z těchto na př. 1 zl., mělo by se vyhráti dle a = s/p na extrato 18 zl., na nominato 90 zl., na ambo 400,5 zl., na terno 11748 zl.* [200] *Avšak vyplácí se sázka při extratě 14 zl., při nominatě 67 zl., při ambu 240 zl., při ternu 4800 zl.*"

Ve Smolíkově době byly zřejmě termíny jako *extrato, nominato* atd. zcela běžné a Smolík (ale ani Doppler nebo Pánek) nepovažoval vůbec za nutné je nějak vysvětlovat. Domníváme se však, že většině dnešních čtenářů tyto termíny nic neříkají a proto je vysvětlíme, k čemuž použijeme výkladu, který k uvedené problematice podal zhruba o půl století později ve své učebnici[201] Emanuel Czuber.

Czuber nepředpokládá znalost loterijní terminologie a úlohu formuluje čistě matematicky: loterie je tvořena n čísly, z nichž je vylosováno r čísel. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vylosovanými čísly bude s vsazených čísel (předpokládá se $s \leq r$) bez ohledu na pořadí?

Hledaná pravděpodobnost je

$$p = \frac{\binom{n-s}{r-s}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n-s)!\,r!}{n!\,(r-s)!} = \frac{r(r-1)\ldots(r-s+1)}{n(n-1)\ldots(n-s+1)} = \frac{\binom{r}{s}}{\binom{n}{s}} \;;$$

poslední zlomek se objevuje také u Dopplera i u Smolíka. Czuber dále vysvětluje, že v loterii zvané „janovská“ [202] je n = 90, r = 5 a pak dostáváme:

pro s = 1	(extratto)	je p = 1/18 ;
pro s = 2	(ambo)	je p = 1/400,5 ;
pro s = 3	(terno)	je p = 1/11748 ;
pro s = 4	(quaterno)	je p = 1/511038 ;

[200] O quaternu a quinternu (viz dále) Smolík nemluví, protože rakouská loterie tyto sázky neumožňovala.
[201] Czuberovi bude věnována následující 5. kapitola. Zde máme na mysli Czuberovu učebnici „*Wahrscheinlichkeitsrechnng und ihre Anwendung* ...“, 1. Band, str. 41 a násl. (1. vydání vyšlo v r. 1903, zde citujeme podle dotisku 4. vydání, Teubner, Leipzig, 1932).
[202] Hodnoty n = 90, r = 5 platily nejen v loterii rakouské, ale i v loteriích v řadě dalších evropských zemí.

pro $s = 5$ (quinterno) je $p = 1/43949268$.

Zde tedy vidíme význam použitých termínů. Czuber dále obecně (tj. bez konkrétních číselných hodnot pro *n, r, s*) hledá pravděpodobnosti, že s vsazených čísel bude vylosováno v daném pořadí, že s vsazených čísel bude vylosováno na prvních s místech, a končí výpočtem pravděpodobnosti, že s vsazených čísel bude vylosováno na prvních s místech v daném pořadí. Protože zde záleží na pořadí, musíme počítat s variacemi, takže poslední úloha má obecný výsledek

$$p = \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-s+1)}$$

a Czuber opět počítá hodnoty této pravděpodobnosti pro případ „janovské“ loterie, přičemž případ $s = 1$ se v tomto případě nazývá „nominato“; pravděpodobnost výhry při sázce na *nominato* je 1/90.

Ponecháme-li stranou skutečnost, že v organizaci loterií docházelo v průběhu let k různým změnám a lišila se i organizace loterií v různých zemích, základní princip zůstával stále stejný a Czuberův výklad je tedy obecně použitelný.

Na závěr této části ocitujme Augustina Pánka (práce č. 3, část 2, str. 129–130): *„Že se takové hry nemohou schvalovati, netřeba ani podotýkati, neboť dostatečně známo, k jakým žalostným koncům vášnivé sázení do loterie mnohé přivedlo. ... Když stát pokládá loterii za zřídlo příjmů, činí to vždy na újmu národního hospodářství. Jednotlivci prospívá zisk jen z poctivé práce a majetek jsouc výsledkem práce jest základem všeobecného blaha.“*

4.4.2.2 Úlohy z pojistné matematiky

Jak už bylo řečeno v paragrafu 4.4.1, ve Studničkově učebnici končí kapitola o počtu pravděpodobnosti krátkým výkladem o základech životního pojištění. Domníváme se, že dostatečnou představu o tomto výkladu nám poskytne citace úloh, které zde na str. 170 – 172 Studnička řeší[203] :

Příklad 1. *„40tiletý muž chce své rodině v čas panující cholery pojistiti 4000 zl. pro ten případ, že by během roku zemřel; kolik zl. musí složiti do pojišťovny ?“*

[203] Při všech výpočtech užívá již zmíněných úmrtnostních tabulek ze svých *„Kapesních tabulek logarithmických“* .

Cholera, o které je řeč v zadání, nehraje při řešení úlohy žádnou roli a je v příkladu uvedena zřejmě jen pro zpestření textu. Při výpočtu s použitím úrokové míry 5 % Studničkovi vychází 40 zl. 87 kr., k čemuž připojuje realistickou poznámku: *„Poněvadž pojišťovny mají veliké útraty s vedením obchodu pojišťovacího, přiráží ke vkladům takto vypočítaným nebo* ryzým *jistá procenta na uhražení těchto výloh, čímž povstávají vklady* hrubé. *V případě tuto uvedeném žádala by vzájemná pojišťovna „Praha“ 53 zl. 20 kr.“*

Příklad 2. *„Kolik zl. musí 30letý muž nyní složiti, aby po 20 letech dostal 1000 zl., bude-li živ ?“*

Při výpočtu s použitím úrokové míry 5 % Studničkovi vychází 298 zl. 33 kr.; žádnou poznámku o skutečné výši vkladu tentokrát nepřipojuje.

Příklad 3. *„Kolik zlatých musí* a-*letý člověk nyní složiti, aby po* n *let dostával na konci každého roku* v *zl., nezemře-li dříve ?“*

Řešení této obecně formulované úlohy věnuje Studnička celou stránku a vzorce, které v průběhu řešení odvozuje, ilustruje nakonec na dvou příkladech:

„Kolik zl. musí otec do pojišťovny vložiti, aby syn jeho 14tiletý bral po 10 let každoročně 1000 zl. ?“

„Vychovatel 50tiletý obdrží odbytného 10000 zl.; jaký doživotní důchod může si za tyto peníze koupiti ?“

Jak už bylo řečeno, Studnička při řešení úloh používá svých úmrtnostních tabulek a v nich jsou tzv. komutační čísla počítána pro úrokovou míru 5 %. První z uvedených úloh mu přitom vychází 7403 zl. 37 kr., druhá 1012,07 zl., ke druhému výsledku však připojuje poznámku: *„V pojišťovně by arci obdržel jen 777 zl., jelikož se tu počítají 4 ze sta a přiráží nejméně 10 % na zevní vydání.“*