Jiří Čermák

Lerchův přínos k obecné theorii funkcí

In: Otakar Borůvka (editor): Dílo Matyáše Lercha v oboru matematické analysy. (Czech). Praha: Nakladatelství československé akademie věd, 1957. pp. 419–433.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401317

Terms of use:

© Akademie věd ČR

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Stieltjes, II. (1905), 326). Lerchovy práce se vyznačují pečlivostí a svědomitostí v obsahovém a stylistickém zpracování. Jeho výsledky nejsou náhodné, nýbrž zpravidla vyjadřují hledané vztahy mezi studovanými funkcemi nebo popisují povahu vyšetřovaných funkcí nebo dávají prostředky k numerickým výpočtům nebo k jiným aplikacím, na př. číselně theoretickým. LERCH se vždycky přidržuje jádra věci, pracuje s pojmy a nikoli se vzorci, jimiž své úvahy vyjadřuje, v jeho díle nenalézáme formalismy a neúčelné spekulace. LERCHOVY obecné věty nejsou myšlenkové konstrukce bez známých realisací, nýbrž jsou abstraktními popisy početních zkušeností. A právě touto svou reálností a snahou po použitelnosti svých výsledků, ať k účelům vnitřní výstavby jednotlivých theorií nebo k praktickým účelům vnějším, je LERCH moderní a jeho dílo živé.

Jiří ČERMÁK

LERCHŮV PŘÍNOS K OBECNÉ THEORII FUNKCÍ

I. *Seznam Lerchových prací týkajících se obecné theorie funkcí*

Tento seznam je vypsán z úplného Seznamu prací prof. Matyáše Lercha od Josefa Škrášk a (Čas. pro pěst. mat., 78 [1953], 139—148).

[12] Jedna věta z nauky o funkcích, *Zpr. KČSN* 1885, 351—352.
[14] Remarques sur quelques points de la théorie élémentaire des fonctions, *Zpr. KČSN* 1885, 400—414.
[15] Contributions à la théorie des fonctions, *Zpr. KČSN* 1886, 571—583.
[17] Note sur les expressions qui, dans diverses parties du plan, représentent des fonctions distinctes, *Bull. Darboux* (2), 10 (1886), 45—49.
[23] Addition au mémoire présenté dans la séance du 15. Octobre 1886 (viz č. 15), *Zpr. KČSN* 1887, 423—426.
[30] Sur une démonstration du théorème de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires, *Věst. KČSN* 1887, 673—682.
[33] Un théorème de la théorie des séries, *Acta* 10 (1887), 87—88.
[38] Sur une fonction discontinue, *Giorn.* 26 (1888), 375—376.
[43] Über die Nichtdifferentierbarkeit gewisser Funktionen, *Crelles Journ.* 103 (1888), 126—138.
[44] Über Funktionen mit beschränktem Existenzbereiche, *Abh. KČSN* (7), 2 (1888), 1—20.
[54] Sur une fonction continue dont la dérivée est partout discontinue, *Jorn. de Teix.* 9 (1889), 97—102.
[66] Sur une classe de fonctions à espace lacunaire, *Jorn. de Teix.* 10 (1891), 27—28.
[73] O hlavní větě theorie funkcí vytvořujících, *Rozpr. ČA* 1 (1892), č. 33, 1—7.
[136] Über die analytische Natur einer von P. Du Bois-Reymond betrachteten Funktion, *Monatsh.* 8 (1897), 377—382.
[157] Sur la nature analytique d'une fonction considerée par P. Du Bois-Reymond, *Acta* 22 (1899), 371—378.
[166] Poznámka z teorie funkcí, *Rozpr. ČA* 9 (1900), č. 8, 1—5.
[180] Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel, *Acta* 27 (1903), 339—351.
[206] O jedné ze stěžejních otázek nauky o funkcích, *Čas.* 37 (1908), 1—8.
[214] O povaze funkce $\sum_{m=0}^{\infty} u^m e^{-2\sqrt{a\,m}}$ v okolí bodu $u = 1$, *Čas.* 39 (1910), 121—133.
[215] Srovnávací poznámky o řadě Fredholmově a Du Bois-Reymondově, *Čas.* 39 (1910), 225—236.

II. *Úvod*

Většina LERCHOVÝCH prací z obecné theorie funkcí pochází z let 1886 až 1896, tedy z prvního tvůrčího období LERCHOVA, kdy byl soukromým docentem na pražské technice a začínal svoji vědeckou dráhu. Snad se v tom jeví vliv velkého budovatele obecné analysy K. WEIERSTRASSE, jehož přednášky LERCH v letech 1884—1885 za svého pobytu v Berlíně poslouchal. Konečně je zcela přirozené, že LERCH v začátcích své vědecké činnosti doplňuje, případně navazuje na výsledky, které zde již byly, a jako WEIERSTRASSŮV žák pracuje na thematech, která patří do okruhu idejí a činnosti velkého učitele. Na druhé straně však je pro ocenění LERCHA příznačné, že LERCH již v těchto pracích dospívá k některým výsledkům, které jsou fundamentálního významu a důležitosti, což v oboru, který byl v té době již podrobně rozpracován, je zajisté mnohem těžší než v odvětví, které se začíná teprve rozvíjet. V pozdějších letech LERCH přechází od obecné analysy ke konkretním problémům, zvláště ke studiu speciálních funkcí, kterýžto směr mu zejména hověl a v němž se stal mistrem[1]).

Vskutku také LERCHOVY práce z obecné theorie funkcí, které vznikly později, jsou buď speciálnějšího rázu, nebo navazují na práce dřívější a nepřinášejí nic podstatně nového.

LERCHŮV příspěvek k obecné theorii funkcí se týká zejména těchto otázek:

1. konstrukce funkcí, jež jsou spojité a nemají derivaci,
2. rozvinutelnosti funkcí v Taylorovu řadu,
3. funkcí s omezeným existenčním oborem[2]),
4. konečně věty o jednoznačnosti jisté třídy funkcí, které LERCH nazývá vytvořujícími[3]).

Vedle toho má LERCH několik prací z obecné theorie funkcí, které jsou různé hodnoty a jež nespojuje žádná výrazná jednotící myšlenka. O každé z nich se stručně zmíním odděleně.

III. Funkce spojité bez derivace

V klasické analyse se obvykle předpokládá, že uvažované funkce mají derivace, ba dokonce spojité derivace až do jistého řádu s event. výjimkou některých zvláštních bodů. Ale až do počátku tohoto století se pouze zřídka kladla otázka, zda funkce náležející k jisté kategorii, na př. funkce spojité nebo monotonní, nutně mají derivaci. Počátek těchto otázek se obvykle datuje od roku 1806, kdy AMPÈRE uveřejnil pojednání, v němž se pokusil, ovšem bez úspěchu, dokázati derivovatelnost „jakékoliv" funkce s výjimkou jistých „zvláštních a osamocených" hodnot neodvisle proměnné[4]).

Během celého XIX. století, jakkoliv plodné toto století pro rozvoj analysy bylo, řešení problému nepokročilo; dokonce se zdá, že se zprvu oddálilo. Tak první podstatný výsledek, po více než půlstoletí, byl získán kritickou prací WEIERSTRASSOVOU[5]), jenž učinil konec opakovaným pokusům dokázati derivovatelnost spojitých funkcí nejobecnějšího typu tím, že sestrojil příklad spojité funkce bez derivace. Mluvíme-li o zásluhách WEIERSTRASSOVÝCH, musíme připomenouti, že již před WEIERSTRASSEM sestrojil příklad spojité funkce, jež v žádném bodě nemá derivaci, B. BOLZANO. Tento výsledek však nebyl v té době uveřejněn; byl objeven v BOLZANOVĚ pozůstalosti až v r. 1922[6]) a uveřejněn později.

Potom se tyto příklady hromadily, nacházely se stále jednodušší a ozřejmovala se jejich souvislost vzájemná i s jinými problémy. Na tomto díle se podíleli téměř

všichni velcí mistři analysy druhé poloviny minulého století a pokračuje se v něm dodnes[7]).

LERCH se tímto thematem zabýval v pracích [15], [23] a [43]. V práci [15], která je chronologicky první tohoto druhu a obsahuje mimochodem též jiné výsledky týkající se zejména funkcí s omezeným existenčním oborem, LERCH předně uvádí dva příklady funkcí, daných řadami

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos 2^{\nu} \pi x}{2^{\nu}}, \tag{1}$$

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos \nu! \pi x}{\nu!}, \quad x \in (-\infty, \infty), \tag{2}$$

které jsou stejnoměrně konvergentní a tedy představují spojité funkce pro všechna x, a ukazuje, že v číslech

$$x_0 = \frac{a}{2^q}$$

$$x_0 = \frac{a}{q!} \quad (a, q \text{ jsou celá čísla}),$$

nemají derivaci. V práci [23], což je dodatek k práci [15], LERCH poznamenává, že BOUQUET ve svých přednáškách na Sorbonně odvodil, že funkce (2) nemá derivaci pro žádné x. Tento výsledek mu byl sdělen dodatečně.

Čísla, ve kterých funkce (1) a (2) nemají derivaci, tvoří v každém intervalu reálné osy hustou množinu. V tomto směru funkce (1) a (2) vykazují stejné vlastnosti jako funkce konstruované HANKELEM[8]).

V závěru práce [15] se LERCH zmiňuje, že řady (1) a (2) jsou zvláštním případem obecnější trigonometrické řady, která má, pokud jde o derivaci, podobné vlastnosti jako řady (1) a (2) a že navíc se její specialisací obdrží nekonečně mnoho trigonometrických řad, které představují spojité funkce, jež nemají derivaci v žádném čísle. Mezi těmito funkcemi se také nachází WEIERSTRASSŮV slavný příklad spojité funkce bez derivace[9]).

Rozpracování této poznámky se nachází v [43]. Tato práce vyšla r. 1888, ale chronologicky patří o dva roky napřed, neboť je datována z r. 1886. Zmíněná trigonometrická řada je tvaru

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} \cos a_{\nu} \pi x, \tag{3}$$

kde $a_0, a_1, \ldots$ jsou celá kladná čísla, o nichž se předpokládá, že existuje nekonečná posloupnost čísel $b_1, b_2, b_3, \ldots$, vyznačující se tím, že podíly

$$\frac{a_{\nu+\varkappa}}{b_{\nu}}, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots,$$

jsou celá čísla, při čemž $\frac{a_{\nu}}{b_{\nu}}$ může být číslo racionální, a dále $\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_{\nu}|$ konverguje.

Práce[7] [43] je rozdělena na tři části. V první části vyšetřuje LERCH, zda a v kterých číslech má funkce (3) derivaci.

V druhé části řadu (3) poněkud zjednodušuje a ukazuje, že mezi funkcemi tvaru (3) je nekonečně mnoho takových, které nemají derivaci v žádném reálném čísle. Tak na př. uvádí tuto větu:

Jsou-li $p_0, p_1, p_2, \ldots$ *lichá celá čísla, která nejsou shora omezena a* $r > 1$, *potom řada*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r_\nu}{a_\nu} \cos a_\nu \pi x, \quad a_\nu = p_0 p_1 \ldots p_\nu,$$

je-li absolutně konvergentní, dává funkci, která nemá v žádném reálném čísle derivaci.

Mezi funkcemi (3) se také nachází, jak již bylo zmíněno, WEIERSTRASSŮV příklad spojité funkce bez derivace, totiž funkce

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b^\nu \cos a^\nu \pi x, \quad b < 1, \quad a \text{ liché celé.}$$

Tato funkce podle WEIERSTRASSE nemá v žádném čísle derivaci, pokud je splněna podmínka $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. LERCH dochází v jistém směru k poněkud obecnější podmínce $ab \geq 1$, $a^2 b > 1 + \pi^2$.

IV. *O rozvinutelnosti funkcí v Taylorovu řadu*

V třetí části práce [43] najdeme výsledek, který se podstatně liší od výsledků obsažených v části prvé a druhé, o nichž jsme mluvili v předešlém odstavci. Lerch zde dokazuje, že funkce

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos a^\nu x}{\nu!}, \quad a \text{ liché celé,} \tag{4}$$

která má všude derivaci všech řádů, se nedá v žádném čísle rozvinouti v Taylorovu řadu.

K posouzení významu a ceny tohoto výsledku uvedu nejdříve poznámku redakce *Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky* uveřejněnou jako dodatek k LERCHOVĚ článku [206], který není nic jiného než překlad do češtiny 3. části práce [43] a další práce LERCHOVY [136] pojednávající o téže otázce:

„Dlouho vládlo mínění, že lze každou funkci *reálné* proměnné, jejíž veškery derivace existují, rozvinouti v řadu Taylorovu

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

a že při tom nanejvýš třeba vyjmouti určité zvláštní body x_0. Mínění to nacházelo zdánlivé podpory ve faktu (Cauchy), že při *komplexní* proměnné existence první derivace a její spojitost zajišťují existenci všech dalších derivací a platnost Taylorova theorému uvnitř jistého oboru.

První, kdo tušil, že mínění zprvu naznačené není správné, byl P. DU BOIS-REYMOND. On tvrdil, že existence všech derivací u funkce reálné proměnné nezaručuje ještě konvergenci řady Taylorovy, t. j. analytickou povahu funkce, a podal také jisté kategorie řad, jež za jistých okolností mohou poskytovati

takovéto *neanalytické* funkce. Avšak důkaz, který pro svoje tvrzení podal DU BOIS-REYMOND ve spisech král. *Bavorské Akademie věd* (a který opomenul převzíti do svého sdělení v *Math. Annalen* sv. XXII.), nevylučoval veškeru pochybnost. To postavil M. Lerch na jistý základ, ukázav ve svém článku Über die analytische Natur einer von P. DU BOIS-REYMOND betrachteten Funktion (*Monatshefte f. Math. u. Phys.*, sv. VIII., 1897), že mezi funkcemi DU BOIS-REYMONDOVÝMI vyskytují se též funkce v řadu Taylorovu rozvinutelné, tak že DU BOIS-REYMONDŮV důkaz musí býti nesprávný.

Otázka takto znovu se namanuvší stran existence funkcí v řadu Taylorovu nerozvinutelných byla však již od r. 1886 rozřešena nade vší pochybnost, a to přesvědčivě M. LERCHOVOU řadou (*Journal f. die reine und angew. Math.*, sv. 103, str. 136)

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{\cos a^n x}{n!},$$

která má derivace všech stupňů, ale rozvoje v řadu Taylorovu nepřipouští.

Tímto poznatkem dán základ k rozdělení „matematických" funkcí ve dvě velké kategorie: ve funkce analytické, připouštějící rozvoj Taylorův (kategorie Lagrangeova), a ve funkce neanalytické, s konečným nebo nekonečným počtem derivací, které Taylorova rozvoje nepřipouštějí.

Vzhledem k důležitosti předmětu pokládá redakce za účelné uveřejniti český překlad o této otázce jednajících statí M. LERCHOVÝCH, který na její přání obstaral p. K. ČUPR."

Z této poznámky lze si učiniti představu o důležitosti LERCHOVA výsledku, na druhé straně některá tvrzení o ní vyslovená potřebují opravy a doplnění[10]).

I když na příklad LAGRANGE vyslovil názor[11]), že z ohraničenosti $f^{(\nu)}(x_0)$ pro každé konečné ν plyne platnost Taylorova rozvoje

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^{\nu}$$

(a tím také konvergence příslušné řady), poznamenal CAUCHY výslovně již ve svých prvních Lecons sur le Calcul infinitesimal z r. 1823[12]), že ani konvergence Taylorovy řady nestačí, aby byla zaručena platnost hořejšího vztahu. Tato CAUCHYHO poznámka byla také uvedena v mnoha lepších tehdejších učebnicích diferenciálního počtu[13]) a i když snad jednotlivým matematickým autorům snad úplně unikla, proti její věcné správnosti nebyly nikdy uvedeny vážné námitky. CAUCHY na doklad svého tvrzení uvádí pouze jediný příklad. Proti tomuto příkladu lze však uvésti mnoho námitek, které se nedají bezprostředně vyvrátit, takže je nutno přiklonit se k názoru, že tento CAUCHYŮV příklad nestačí, aby hořejší tvrzení bylo naprosto zřejmé[14]). Toho bylo dosaženo až v r. 1876 DU BOIS-REYMONDEM[15]), jak o tom mluví uvedená poznámka redakce Časopisu, a v tom spočívá také význam a cena LERCHOVA příkladu (4), který LERCH publikoval v r. 1888. Význam tohoto výsledku je zvýšen tím, že v DU BOIS-REYMONDOVĚ práci pojednávající o tomto předmětu je jistá chyba. Domnívám se však, že tato věc je v citované poznámce *Časopisu* poněkud skreslena a přeceněna. Na příslušném místě je uvedeno, že důkaz, který podal DU BOIS-REYMOND pro své tvrzení, že existence všech derivací funkce reálné proměnné ještě nezaručuje její rozvinutelnost v Taylorovu řadu, nevylučoval veškeru pochybnost. Ve skutečnosti důkaz DU BOIS-REYMONDŮV

spočíval v konstrukci jistých příkladů funkcí, které by doložily jeho tvrzení, a jeden z těchto příkladů je chybný.

LERCH uveřejnil ještě později v r. 1900 další příklady funkcí, které nelze rozvinouti v Taylorovu řadu. V [166] udává třídu funkcí, jež jsou dány trigonometrickou řadou, která konverguje pouze pro reálná x a nikde není analytická. Jako speciální funkci tohoto druhu uvádí

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 2 a^{\nu} \pi x}{\nu!} \qquad a > 1, \text{ celé.}$$

Tato funkce má spojité derivace všech řádů, ale není nikde analytická a nedá se tedy v žádném čísle rozvinouti v Taylorovu řadu.

Vraťme se však ještě k citované DU BOIS-REYMONDOVĚ práci z r. 1876. Jak sám DU BOIS-REYMOND říká, předmětem jeho práce jsou některé poznámky o platnosti Taylorova rozvoje funkcí reálné proměnné. V úvodu práce však stanoví problém mnohem obecnější a těžší, než který je řešen jeho a LERCHOVÝMI příklady funkcí, které mají derivace všech řádů a nepřipouštějí Taylorův rozvoj. Cituji:

„Bedingungen, welche für die Taylor'sche Entwickelbarkeit einer Function genügen, ergeben sich, wenn es sich um Functionen reeller Veränderlichen handelt, aus den bekannten Restausdrücken, während Cauchy's berühmte Regeln Ähnliches leisten für Functionen, welche man von complexen Argumenten abhängen lässt. Von den nothwendigen Bedingungen für die Taylor'sche Entwickelung, falls dergleichen vorhanden sind, haben wir aber nicht die geringste Vorstellung; ja ich glaube sogar, daß über den Spielraum, welchen sie gewähren könnten, irrige Ansichten allgemein verbreitet sind."

Uspokojivé řešení této otázky podal až v r. 1894 A. PRINGSHEIM[16]), který se v několika pracích Taylorovým rozvojem a s tím souvisícími otázkami podrobně zabýval[17]). Poznamenejme, že PRINGSHEIM vedle otázek Taylorova rozvoje se v těchto svých pracích zabývá ještě funkcemi s omezeným existenčním oborem. To není náhodné, neboť jak uvidíme, teorie rozvinutelnosti funkce v Taylorovu řadu a teorie funkcí s omezeným existenčním oborem spolu úzce souvisí. Tato temata, jak jsem již uvedl, byla ovšem také předmětem LERCHOVA zájmu a vskutku také jejich práce (týkající se těchto otázek) mají mnoho styčných bodů, jak o tom bude řeč v příštím odstavci.

V. *Funkce s omezeným existenčním oborem*

V r. 1891 uveřejnil MITTAG-LEFFLER řadu sestrojenou FREDHOLMEM[18]), o níž tvrdí, že je to první příklad funkce, která nepřipouští analytické pokračování z jistého oboru, t. j. není v žádném bodě hranice tohoto oboru rozvinutelná v Taylorovu řadu, ačkoliv je zde se všemi svými derivacemi spojitá.

K tomuto sdělení uvádí PRINGSHEIM v úvodu k první své práci[19]) týkající se otázek funkcí s omezeným existenčním oborem a Taylorova rozvoje toto[20]):

„Die Reihe ist in der That wegen ihrer außerordentlichen Einfachheit bemerkenswerth: dagegen scheint mir dieselbe keineswegs etwas principiell neues darzubieten und in dieser Hinsicht von Herrn Mittag-Leffler einigermaßen überschätzt zu werden. Denn abgesehen davon, daß wohl Niemand, der sich mit der Theorie der Taylor'schen Reihe etwas näher beschäftigt hat, an der Existenz derartiger Functionen den geringsten Zweifel haben konnte, so möchte ich Herrn Mittag-Leffler nicht einmal darin beistimmen, daß solche Functionen bisher überhaupt noch nicht studiert worden seien. (Es heißt a. a. O.: Autant que je sache, toutes les fonctions qui n'existent que dans un certain domaine du plan et qui ont été étudiées jusqu'ici, cessent d'exister, parce que les fonctions elles mêmes ou leurs dérivées deviennent discontinues sur la frontière.)

Die principielle Frage, um die es sich hierbei einzig und allein handelt, ist doch lediglich die: Giebt es Functionen, die auch nur an irgend einer einzigen Stelle endliche Differentialquotienten (Selbstverständlich handelt es sich hierbei im Falle einer complexen Variabeln nicht um Differentialquotienten nach allen möglichen Richtungen, sondern nur nach einem Theil dieser Richtungen) jeder endlichen Ordnung besitzen und dennoch nicht nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar sind? Denn aus einer Function, die eine derartige Singularität an einer Stelle besitzt, lassen sich ja dann nach bekannten Methoden — etwa mit Hülfe des von Herrn CANTOR angegebenen Condensations-Principes (*Math. Ann.* Bd. XIX, p. 588) — leicht solche bilden, bei denen die nämliche Singularität in allen Punkten einer beliebigen abzählbaren unendlichen Menge auftritt."

Jak víme z předešlého odstavce, v tehdejší době již existovaly příklady funkcí majících derivace všech řádů, nepřipouštějících však rozvoj v Taylorovu řadu. PRINGSHEIM cituje DU BOIS-REYMONDOVU práci z r. 1876[21]) a říká dále:

„Und da DU BOIS REYMOND es auch unternommen hat, aus dieser Function durch „Condensation" eine andere abzuleiten, welche die fragliche Eigenschaft in unendlich vielen, überall dicht liegenden Punkten einer Linie hat, so scheint mir eben die oben citirte Bemerkung des Herrn MITTAG-LEFFLER nicht recht zutreffend.

Je zajímavé, že PRINGSHEIM se v tomto svém úvodu, který má ráz jakéhosi kritického přehledu, vůbec o LERCHOVI nezmiňuje, ačkoliv zásluhy LERCHOVY v otázkách, o nichž PRINGSHEIM mluví, byly již v tehdejší době naprosto zřejmé[22]). Domnívám se, že tato skutečnost souvisí do jisté míry se známým sporem LERCHA s PRINGSHEIMEM, ale protože tomuto sporu je věnován referát p. L. FRANKA[23]), nebudu se o tom dále šířit.

LERCH reagoval také na shora uvedené MITTAG-LEFFLEROVO tvrzení a použil zároveň této příležitosti k tomu, aby si vyřídil účty s PRINGSHEIMEM. PRINGSHEIM totiž uveřejnil ve svých pracích některé výsledky, které již předtím objevil LERCH. Následující citace je převzata z LERCHOVA pojednání [136], které bylo o dva roky později také uveřejněno ve francouzském překladu [157] v časopise *Acta Matematica*, který tehdy vydával MITTAG-LEFFLER:[24])

„Konstrukce příkladů funkcí s čarami singulárními může — po pracích WEIERSTRASSOVÝCH — sledovati jen pedagogické účely. S tohoto hlediska pojednával jsem před desíti roky o některých výrazích; následkem skrovného rozšíření spisů král. čes. spol. nauk v Praze staly se tyto práce velmi málo známými, ba samotné pojednání o jistých funkcích nepřipouštějících derivace v 103. svazku CRELLOVA Journalu (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*), ušlo pozornosti p. MITTAG-LEFFLERA (Sur une transcendante remarquable trouvée par M. Fredholm (*Acta Math.* sv. 15.). Moje na konci pojednání uvažovaná řada poskytuje bezprostředně funkci téže vlastnosti jako řada p. FREDHOLMA).

Zejména ve svém pojednání „Über Functionen mit beschränktem Existenzbereiche" (*Abhandlungen der kön. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften*, VII. F. 2. Bd. 1888) odvodil jsem několik přehledných výrazů tohoto druhu, jakož i nové metody důkazů a zevšeobecnění. Tak na př. jest tam dokázáno, že dvojitá řada

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}{}' \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \binom{m}{\mu} \binom{u}{\nu} a^{\mu\nu} u^{\mu} x^{\nu}$$

nepřipouští ze svého konvergenčního oboru $|u| < 1$, $|x| < 1$ pokračování, když konstanty m, μ nejsou celá positivní čísla a konstanta a má absolutní hodnotu 1, není však kořenem z 1.

Z jmenovaného pojednání mnoho p. A. PRINGSHEIM v *Mathem. Annalen* sv. 42. a 44. znovu publikoval, tak na př. zevšeobecnění, o němž on ve sv. 42. na str. 166 pod čarou

se zmiňuje, dále způsob důkazu, jehož na str. 50 a 51 použil. Ode mne pochází též poznámka, že lze utvořiti výrazy tvaru

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \frac{c_\nu}{x - a_\nu},$$

jež svojí absolutní hodnotou zůstávají pod určitou konstantou, je-li x omezeno na obor, uvnitř něhož neleží žádný bod a_ν ani na jeho okraji, když též všechny body tohoto okraje jsou hromadnými body (Häufungsstellen) množiny (a_ν). Ukázal jsem to na str. 7 onoho pojednání příkladem

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \frac{c_\nu \left(e^{\frac{1}{\nu}} - 1\right)}{x - e^{\frac{1}{\nu} + 2\nu\alpha\pi i}}, \quad (|x| \leqq 1),$$

při čemž α značí irrationálnou reálnou konstantu. O výrazech toho druhu jedná p. PRINGSHEIM obšírněji ve 42. sv. *Mathem. Annalen*. P. PRINGSHEIM chtěl však v této otázce jíti dále a tvrdí, že výraz

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \frac{c_\nu}{x - a_\nu}, \quad \left(\sum |c_\nu| \text{ konverguje}\right)$$

nepřipouští propagace z oboru c, když všechny body a_ν leží sice vně c avšak tak, že jejich hromadné body tvoří okraj oboru c předpokládaje, že a_ν nevyplňují žádnou část plošnou pantachicky.

Nechtěl jsem v r. 1887 jíti tak daleko jako p. PRINGSHEIM, a nechal jsem otázku nerozhodnutu, poněvadž se mi důkaz zdál těžký, a ještě dnes (rozuměj roku 1897) se mi zdá těžkým, tak že odpověď na tuto otázku nyní dáti nemohu. Myslí-li p. PRINGSHEIM, že tato otázka jest rozluštěna jeho theorémem (na str. 168, 42. sv. *Math. Annalen*), jest na omylu, neboť jeho důkaz je klamný, a správnost jeho theorému nejista."

Přistoupím nyní k systematickému výkladu LERCHOVÝCH výsledků z teorie funkcí s omezeným existenčním oborem, případně výsledků s tímto tematem souvisejících. LERCH sám uvádí, že první jeho práce o těchto otázkách je z r. 1886 [15]. Dále jsou to práce [136], [157], [206], [214], [44], [66], [33].

Jak již víme, v [1] LERCH udává dva příklady funkcí (1), (2), které nemají derivaci v číslech, jež tvoří hustou množinu na reálné ose. Z těchto vlastností funkcí (1) a (2) LERCH vyvozuje, což plyne bezprostředně, že funkce

$$\Phi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' z^{2^\nu} \quad \text{a} \quad \Psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' z^{\nu!},$$

kde z je komplexní proměnná, existují pouze pro $|z| < 1$ a nedají se analytickým pokračováním rozšířiti za jednotkovou kružnici. Omezenost existenčního oboru funkcí $\Phi(z)$ a $\Psi(z)$ je způsobena tím, že tyto funkce nabývají nekonečných hodnot na množině bodů, která je hustá na hranici oblasti, v níž existují. V případě funkcí $\Phi(z)$ a $\Psi(z)$ je tato hranice jednotková kružnice. V [1] však LERCH dále vyšetřuje také funkce, u nichž nemožnost analytického pokračování je způsobena singularitami jiného druhu. Co se toho týká, považuji za vhodné citovat, co LERCH sám napsal[25]):

„Roku 1886, kdy jsem začal uveřejňovat různé články o theorii funkcí, byly pokud mi známo, veškery příklady funkcí s omezenou oblastí toho druhu, že se funkce stane nekonečnou na určitých místech okraje. V první své stati o těchto otázkách jednající (Contributions à la théorie des fonctions. *Zprávy o zasedání Král. české spol. nauk* z r. 1886) jsem uvažoval funkce, jichž nullová místa se hromadí podél celého okraje existenční oblasti. Neboť hromadné místo bodů nullových u funkce analytické je nutně místo zvláštní,

a takových bude tedy v případech naznačených každý bod okraje. Zejména jsem na u. m. tímto způsobem ukázal, že elliptická transcendenta

$$\vartheta_3(u \mid \omega) = 1 + 2 \sum_1^\infty q^{n^2} \cos 2nu\pi, \quad q = e^{\omega\pi i},$$

existuje toliko v oboru $|q| < 1$, t. j. pro $\omega = x + iy$, $y > 0$, pokud u je veličina skutečně komplexní; to platí následkem toho též pro funkci

$$\vartheta_0(u \mid w) = \vartheta_3\left(u + \frac{1}{2} \,\middle|\, \omega\right),$$

a lze to stejným způsobem ukázati pro funkci

$$\vartheta_1(u \mid \omega) = 2 \sum_{\nu=1}^\infty (-1)^{\nu-1} q^{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2\nu - 1)u\pi$$

a tím též pro

$$\vartheta_2(u \mid \omega) = \vartheta_1\left(u + \frac{1}{2} \,\middle|\, \omega\right).$$

... Funkce $\vartheta_\nu(u \mid \omega)$ jsou zajisté první příklad s omezenou oblastí, které se v analysi vyskytly. Je dost divno, že se veškery učebnice o theorii funkcí elliptických dosud dané této otázce o existenční oblasti vůči proměnné ω důsledně vyhnuly (pokud nejednají o funkcích modulových), ač příslušný důkaz je velmi jednoduchý ..."

Poznamenejme ještě, že vyšetřování existenčního oboru eliptických funkcí je zcela věnována práce [170][26]).

Nejrozsáhlejší a také nejcennější LERCHOVA práce o funkcích s omezeným existenčním oborem je [44]. LERCH v ní dokazuje tři věty, na jejichž základě konstruuje funkce s omezeným existenčním oborem. První věta je zobecněním jisté věty GOURSAT-POINCARÉOVY, druhá zobecněním jedné jeho vlastní věty[27]), třetí se týká funkcí hovících jistému transformačnímu zákonu.

V r. 1882 dokázal POINCARÉ a skoro současně GOURSAT větu[28]), na jejímž základě lze snadno zkonstruovat funkce, jež jsou regulární ve všech bodech ležících uvnitř dané křivky H a které se nedají analyticky prodloužit přes tuto křivku. Při tom H je jednoduchá, uzavřená křivka skládající se z konečného počtu oblouků, z nichž každý je Jordanovou křivkou a má všude tečnu. Věta zní takto:

Nechť $\{a_\nu\}$ je posloupnost komplexních čísel, z nichž jedno (jež označíme a_0) leží na kružnici K o poloměru R a středu z_0 a všechny ostatní vně. Nechť

$$\sum_{\nu=0}^\infty c_\nu, \quad c_\nu \neq 0,$$

je libovolná absolutně konvergentní řada. Pak funkce

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{c_\nu}{a_\nu - z}$$

je regulární uvnitř kružnice K a má na obvodu této kružnice aspoň jednu singularitu, takže poloměr konvergence potenčního rozvoje funkce $F(z)$ v bodě z_0 je roven R.

Zvolíme-li posloupnost $\{a_\nu\}$ tak, aby ležela hustě na křivce H, pak se na základě této věty snadno dokáže, že funkce $F(z)$, která je uvnitř H regulární, se nedá přes H analyticky prodloužit.

LERCH GOURSAT-POINCARÉHO větu zobecňuje, při čemž k důkazu používá jiné a jednodušší metody. Vyslovuje tuto větu:

Nechť $\{a_\nu\}$ *je ohraničená posloupnost komplexních čísel, z nichž jedno* (a_0) *leží na kružnici* K *o poloměru* R *a středu* z_0 *a všechny ostatní vně. Nechť*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu, \quad c_\nu \neq 0,$$

je libovolná absolutně konvergentní řada a m *libovolné komplexní číslo nerovnající se celému nezápornému číslu. Pak funkce*

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \, (x - a_\nu)^m,$$

při čemž $(x - a_\nu)^m$ *značí hlavní větev, je uvnitř* K *regulární a na obvodu kružnice* K *má singularitu v* a_0*, takže poloměr konvergence potenčního rozvoje funkce* $F(z)$ *je roven* R.

Důsledek této věty je pak tento: Zvolíme-li posloupnost $\{a_\nu\}$ tak, aby ležela hustě na křivce H, bude

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \, (z - a_\nu)^m$$

regulární uvnitř H a bude mít H za přirozenou hranici (t. j. $F(z)$ se nedá přes H analyticky prodloužit).

Další věta, která umožňuje konstrukci funkcí s omezeným existenčním oborem, zní takto:

Nechť $\{m_\nu\}$ *je posloupnost přirozených čísel taková, že každé z nich je obsaženo ve všech následujících; nechť* $\{P_\nu(z)\}$ *je posloupnost analytických funkcí, jež jsou regulární pro* $|z| < 1$ *a jež pro* $|z| = 1$ *nejvýše v bodě* $z = 1$ *mají* $\lim_{x \to 1} P_\nu(z) = \infty$; *nechť se funkce* $P_\nu(z)$ *dále vyznačují tím, že řada*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu (z^{m_\nu})$$

pro všechna $|z| < 1$ *konverguje a dá se rozvinout v potenční řadu; nechť pro nekonečně mnoho* n *pro* $0 < x < 1$

$$\lim_{x \to 1-} \sum_{\nu=n}^{\infty} P_\nu (x^{m_\nu}) = \infty .$$

Potom funkce $f(z)$ *existuje pouze uvnitř jednotkové kružnice.*

Na základě této věty LERCH stejně jako na základě věty předešlé konstruuje speciální příklady[29]). Zejména odtud vychází, že jisté mocninné řady, o nichž psal MITTAG-LEFFLEROVI[30]), se nedají analyticky prodloužit přes jednotkovou kružnici. Tyto řady jsou speciálním případem uvedené věty, položíme-li $P_\nu(z) = c_\nu z$ a o číslech c_ν předpokládáme, že jejich reálné části γ_ν splňují vztah

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu = \infty .$$

Poznamenejme ještě, že na př. z tohoto výsledku znovu vychází, že funkce

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{2^\nu} \quad \text{a} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu!},$$

o nichž jsme se již zmínili, mají jednotkovou kružnici za přirozenou hranici.

Funkce

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{2^\nu},$$

jež se nedá, jak jsme viděli, analytickým pokračováním rozšířiti za jednotkovou kružnici, hoví funkční rovnici

$$f(z) = z + f(z^2).$$

Tento poznatek LERCH zobecnil a odvodil tuto zajímavou větu:

Je-li $f(z)$ funkce, která se dá vyjádřit mocninnou řadou konvergující pro $|z| < 1$ a divergující pro $|z| > 1$ a vyhovuje funkční rovnici

$$f(z^a) = G[z, f(z)],$$

kde a je pevné přirozené číslo a $G(z, u)$ celá funkce proměnných z, u, pak funkce $f(z)$ existuje pouze pro $|z| < 1$.

V [66] uvažuje LERCH o nekonečné řadě tvaru

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi([\nu])\, z^\nu, \qquad (*)$$

konvergentní uvnitř jednotkové kružnice. $[\nu]$ značí počet cifer čísla ν (na př. $[1234] = 4$). Dokazuje, že tato funkce se nedá analytickým pokračováním rozšířit vně jednotkového kruhu, jestliže reálná nebo imaginární část funkce $\varphi(\nu)$ roste neomezeně s ν, zachovávajíc si své znamení. Zajímavá je tato práce touto poznámkou: „A cette classe de séries (*) appartient l'exemple que j'ai consideré, sous un autre point de vue, dans le t. VII de ce journal [Remarque sur la théorie des séries, *Jorn. de Teix.* 7 (1886), 79—80] et auquel M. Alfred PRINGSHEIM de Munich a consacré recemment une remarque critique (*Math. Annalen*, t. XXXV, p. 308) dans laquelle il l'appelle *geradezu monströs!* De gustibus non est disputandum.“[31])

Zmínil jsem se již, že mezi příklady, které uvedl DU BOIS-REYMOND na důkaz svého tvrzení, že existence všech derivací u funkce reálné proměnné nezaručuje ještě rozvinutelnost funkce v Taylorovu řadu, se vyskytla chyba. Na to upozornil PRINGSHEIM v jednom ze svých článků o Taylorově rozvoji[32]), spokojil se však jen některými poznámkami. Důsledkem zmíněné chyby DU BOIS-REYMONDOVY je to, že funkce komplexní proměnné u definovaná nekonečnou řadou

$$\Phi(u) = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\sqrt{\nu}}\, u^\nu$$

má omezený existenční obor, jehož hranici tvoří jednotková kružnice.

LERCH v [136] ukazuje metodou analytického pokračování, že $\Phi(u)$ je analytická jedině s výjimkou bodu $u = 1$, čímž dokazuje, že uvedené tvrzení

DU BOIS-REYMONDOVO je nesprávné. Při podrobnějším vyšetřování vlastností funkce $\Phi(u)$ v okolí bodu $u = 1$ se LERCH dopustil chyby, k jejíž opravě se později vrátil v [214].

Uveďme ještě pro úplnost, že konkretnímu a hodně již speciálnímu tematu (totéž lze říci konečně i o pracích [136] a [214]) je věnována také práce [215], kde LERCH uvažuje o existenčním oboru řady FREDHOLMOVY a DU BOIS-REYMONDOVY.

VI. *Lerchova věta*

Obrátíme se nyní k dalšímu znamenitému výsledku LERCHOVU, který je obsažen v pracích [73] a [180]. Obsahem těchto prací je důkaz jedné základní věty z teorie funkcí vytvořujících (génératrice), které jsou definovány integrály tvaru

$$J(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \varphi(x)\, dx, \qquad a \text{ komplexní číslo.} \tag{5}$$

$\varphi(x)$ se nazývá funkcí *určující* (*déterminante*)[33]).

Pojem funkce vytvořující a určující lze sledovat až k LAPLACEOVI a jak známo, funkce tvaru (5) jsou fundamentálního významu v teorii LAPLACEOVY transformace a souvisí také úzce s problémem t. zv. momentů.[34]) Funkcemi (5) se zabýval podrobně také ABEL; proto LERCH nazývá v [180] funkce tvaru (5) *vytvořujícími funkcemi Abelovými*. Podotýkám, že práce [180] vyšla v *Acta Mathematica* v čísle věnovaném památce HENRIKA ABELA (u příležitosti stého výročí jeho narození).

Abychom uvážili dosah LERCHOVY věty, uveďme, že užití funkcí vytvořujících vyžaduje důkaz věty, že za jistých okolností k vytvořující funkci J přísluší jediná funkce určující φ. Přesněji řečeno, je zřejmé, že při dané funkci vyhovuje vztahu (5) nekonečně mnoho funkcí φ (pokud ovšem vůbec nějaká taková funkce existuje); jedná se o to vyšetřit, jaké povahy je tato mnohoznačnost.

LERCH byl první, který přesně vyšetřil tuto otázku, a jeho odpověď zní, že *funkce φ při dané funkci J se mohou navzájem lišit nejvýše o funkci $N(x)$ takovou, že integrál s proměnnou horní mezí*

$$\int_0^x N(t)\, dt \equiv 0.$$

Toto tvrzení je ve světové literatuře všeobecně známo pod názvem *Lerchova věta.*

Uvažujeme-li pouze o spojitých určujících funkcích, potom veškerá mnohoznačnost vymizí a řešení rovnice (5) při dané funkci J je pouze jediné. Tímto případem se LERCH zabývá v pojednání [73], při čemž na φ klade ještě další omezení (předpokládá, že φ je exponenciálního typu).

V pojednání [180] od těchto omezujících předpokladů upouští a vyslovuje větu již v takové formě, jak jest udáno shora a jak je na př. uvedena v DOETSCHOVĚ knize[35]).

Poznamenávám, že podobná věta o otázce jednoznačnosti řešení rovnice (5) se nachází v jedné další práci LERCHOVĚ[36]) v souvislosti s řešením jednoho konkretního problému z integrálního počtu.

LERCH při důkazu svého tvrzení v obou pracích [73] i [180] podstatně používá WEIERSTRASSOVY věty o aproximaci spojité funkce posloupností polynomů, pro kterou dává jak v [73] tak v [180] pokaždé jiný originální důkaz. Důkaz v [180] je pozoruhodný tím, že je proveden velmi elementárními prostředky.

Uveďme nakonec, že LERCHOVO tvrzení bylo později vícekrát jiným způsobem dokázáno. Na př. DOETSCH v citované knize uvádí několik důkazů, na prvém místě však důkaz LERCHŮV. Jednoduchý důkaz LERCHOVY věty dal A. OSTROWSKI[37]).

VII. *Ostatní práce z obecné theorie funkcí*

V tomto odstavci podám stručný přehled zbývajících Lerchových prací z obecné theorie funkcí. Jak jsem již v úvodu poznamenal, jsou to práce různé hodnoty, které nespojuje žádná výrazná jednotící myšlenka.

Pojednání [12] je drobná práce, jedna z prvních, které LERCH publikoval. Obsahuje speciální větu o funkci, která je regulární uvnitř a na okraji jisté oblasti a jednu aplikaci této věty. Je zbytečné uváděti na tomto místo větu v plném znění a odkazuji proto na STUDNIČKOVU recensi ve *Fortschritte der Mathematik*[38]).

V práci [16], která pochází stejně jako práce předešlá z r. 1885, se LERCH zabývá tímto tematem: Je-li $z = x$ regulární bod analytické funkce $f(z)$, nastává často případ, že podíl

$$V_\nu = [(z - x)\, f^{(\nu+1)}(x)] : \cdot(\nu + 1)\, f^{(\nu)}(x)]$$

má limitu $\lim_{\nu \to \infty} V_\nu(x) = V(x)$; tato limita dává potom konvergenční poloměr pro rozvoj funkce $f(z)$ podle mocnin $z - x$. Je-li $V(x)$ analytická funkce proměnné x, pak je ukázáno, že $V(x) = \varepsilon(x - a)$, $|\varepsilon| = 1$, kde a je nejbližší singulární bod vzhledem k bodu x. LERCH udává jednoduché příklady, na př.

$$f(z) = \frac{1}{a + bz + cz^2}, \qquad f(z) = \sum_1^\infty \frac{m_\nu}{z - a_\nu},$$

kdy tato okolnost nastává, a pomocí těchto výsledků pak studuje vlastnosti některých řetězových zlomků. Zejména tak dostává některé výsledky, které odvodil jiným způsobem v pojednání [17]. Závěrem se zabývá možností vyjádření kořene algebraické rovnice racionálními funkcemi jejích koeficientů. (O této práci se LERCH zmiňuje také v práci [15], str. 13.)

Obsah práce [17] jest dán výstižně jejím názvem. LERCH uvádí nejdříve nový velmi jednoduchý důkaz věty o konvergenci jistého periodického řetězového zlomku a používá této věty ke konstrukci výrazů, které v různých částech komplexní roviny představují různé funkce. Tak na př., je-li a konstanta, udává výraz, který uvnitř kruhu o středu $z = 0$ a poloměru a má stále hodnotu a, vně kruhu pak hodnotu z.

V práci [38] LERCH uvádí příklady řady

$$f(x) = \sum_0^\infty \varphi_n(x),$$

jejíž členy jsou spojité funkce reálné proměnné x. Touto řadou je definována funkce reálné proměnné x, která je všude nespojitá.

V práci [54] je uveden příklad spojité funkce, jejíž derivace je všude nespojitá a konečná. Tato funkce je dána řadou

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - a_\nu)^2 \sin \frac{\pi}{x - a_\nu},$$

při čemž $c_0, c_1, c_2, \ldots$ jsou členy absolutně konvergentní řady a $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tvoří množinu, která je hustá v každé části daného intervalu (na př. $< 0,1 >$). Dále se předpokládá, že definitoricky

$$\lim_{x \to a_\nu} (x - a_\nu) \sin \frac{\pi}{x - a_\nu} = 0.$$

Pro derivaci je udán explicitní vzorec.

Pojednání [38] a [54] mají spíše charakter metodický. Stejně tomu tak je u pojednání [30], které obsahuje větu o integraci jisté třídy funkcí komplexní proměnné, která podle LERCHA vystačí k odvození všech základních vlastností funkcí komplexní proměnné a ušetří zavedení integrálu komplexní proměnné přes křivkové integrály.

Poznámky

[1]) Srovnej s pojednáním L. FRANKA, O životě profesora Matyáše LERCHA, *Čas. pro pěst. matematiky* 78 (1953), 129, a pojednáním K. ČUPRA, Prof. Matyáš Lerch, *Čas. pro pěst. matem. a fys.* 52 (1923), 303.

[2]) O funkcích s omezeným existenčním oborem viz na př. E. T. WHITTAKER-G. N. WATSON, Modern Analysis, Cambridge 1920, 98.

[3]) Tato věta, nesoucí ve světové literatuře LERCHOVO jméno, je fundamentálního významu v theorii LAPLACEOVY transformace.

[4]) A. M. AMPÉRE, Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées . . . , *Ecole Polytechnique*, 6 (1806), fasc. 13.

[5]) Uveřejněno DU BOIS-REYMONDEM, Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente, *Journal für Math.*, 79 (1875), 21—37.

[6]) M. JAŠEK, Funkce Bolzanova, *Čas. pro pěst. matem. a fysiky*, 51 (1922), 69—76.

[7]) Srovnej F. RIESZ-B. SZ. NAGY, Leçons d'analyse fonctionelle, Budapest 1952, 3—4.

[8]) H. HANKEL, Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen, *Mathematische Annalen* 20 (1882), 63—112.

[9]) L. c. sub 5.

[10]) Viz zejména A. PRINGSHEIM, Zur Theorie der Taylorschen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich, *Math. Annalen* 42 (1893), 153—184.

[11]) [12]) [13]) A. PRINGSHEIM l. c. sub 10, 154.

[14]) A. PRINGSHEIM l. c. sub 10, 154—155, 160—161.

[15]) P. DU BOIS-REYMOND, Über den Gültigkeitsbereich der Taylorschen Reihenentwickelung, *Math. Annalen* 21 (1883), 109—117. Převzato z *Berichte der Kgl. Bayer. Akad. d. Wiss.* vom 6. Nov. 1876.

[16]) A. PRINGSHEIM, Über die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylorschen Lehrsatzes für Functionen einer reellen Variablen, *Math. Annalen* 44 (1894), 57—82.

[17]) A. PRINGSHEIM, l. c. sub 10 a 16, dále Über Functionen, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylorsche Reihenentwicklung besitzen, *Math. Annalen* 44 (1894), 41—56.

[18]) G. MITTAG-LEFFLER, Sur une transcendante remarquable, *Acta Mathematica* 15 (1891), 279—280.

[19]) A. PRINGSHEIM l. c. sub 10.

[20]) Tuto citaci uvádím také proto, že ozřejmuje souvislost mezi problémy rozvinutelnosti funkce v Taylorovu řadu a funkcemi s omezeným existenčním oborem.

[21]) P. DU BOIS-REYMOND, l. c. sub 15.

[22]) Na př. CH. HERMITE-T. J. STIELTJES, Correspondence, II. díl, 25 a 41.

[23]) L. FRANK, tato práce str. 532.

[24]) Tento český překlad je převzat z [206], kde pojednání [136] vyšlo po třetí v českém překladu K. ČUPRA. PRINGSHEIM odpověděl na LERCHOVO obvinění zvláštním prohlášením, viz L. FRANK l. c. sub 23.

[25]) M. LERCH [215], Dodatek.

[26]) M. LERCH, Zur Bestimmung des analytischen Existenzbereiches in der Theorie der elliptischen Funktionen, *Monatshefte* 11 (1900), 107—113. Tato práce není uvedena v seznamu prací v I. odstavci tohoto referátu.

[27]) M. LERCH [33].

[28]) É. GOURSAT, Fonctions à espaces lacunaires, *Bull. Darboux* 11 (1887); H. POINCARÉ, Fonctions à espaces lacunaires, *Soc. sc. Acta Helsingfors* 12 (1883).

[29]) Viz na př. citovaný výňatek ze [136].

[30]) M. LERCH, [33].

[31]) Viz FRANKŮV referát o sporu LERCHA s PRINGSHEIMEM, L. FRANK, l. c. sub 23.

[32]) A. PRINGSHEIM, Über Functionen, welche in gewissen Punkten . . ., l. c. sub 17.

[33]) Názvy *určující* a *vytvořující* jsou převzaty z LERCHOVÝCH prací.

[34]) Tyto věci jsou velmi podrobně vylíčeny ve známé DOETSCHOVĚ knize Theorie u. Anwendung der Laplacetransformation, Grundlehren der math. Wissenschaften, Berlin, 1932, 8, na niž v tomto směru odkazuji.

[35]) DOETSCH, l. c. sub 34, 33—38.

[36]) M. LERCH, Z počtu integrálního, *Rozpr. ČA* 2 (1893), č. 9, 1—40. Č. 99 Seznamu prací prof. Matyáše Lercha sestaveného J. ŠKRÁŠKEM. Tato práce není uvedena v seznamu prací v I. odstavci tohoto referátu.

[37]) A. OSTROWSKI, Über den Lerchschen Satz, *Jahresber. d. deutschen Math.-Vereinigung*, 37 (1928), 69. V OSTROWSKÉHO pojednání je uvedena rozsáhlá bibliografie důkazů této věty.

S ohledem na fundamentální důležitost LERCHOVY věty zřejmě nedocenil tento LERCHŮV výsledek prof. K. PETR v nekrologu, který o LERCHOVI napsal do *Almanachu České akademie věd a umění*. Cituji doslova: „Konečně uvádím, že v práci ‚O hlavní větě theorie funkcí vytvořujících' (*Rozpravy Č. Akad.*, sv. I., č. 33, r. 1892) podal nový důkaz věty WEIERSTRASSOVY o vyjádřitelnosti funkcí spojitých řadami polynomů."

[38]) *Fortschritte d. Math.*, XVIII (1886), 347.

JIŘÍ ČERMÁK

LERCHŮV PŘÍNOS K THEORII NEKONEČNÝCH ŘAD

I. *Seznam Lerchových prací týkajících se theorie nekonečných řad*

Tento seznam je vypsán z úplného Seznamu prací prof. Matyáše LERCHA od JOSEFA ŠKRÁŠKA (*Čas. pro pěst. mat.*, 78 (1953), 139—148).

[13] Příspěvky k teorii řad nekonečných, *Zpr. KČSN*, 1885, 174—179.
[19] O soustavách bodů a jejich významu v analysi, *Čas.* 15 (1886), 211—218.
[21] Remarque sur la théorie des séries, *Jorn. de Teix.* 7 (1886), 79—80.
[28] Note sur la fonction $\Re(w, x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{2kx\pi i}}{(w+k)^s}$, *Acta* 11 (1887), 19—24.