Věra Radochová

Lerchův přínos k theorii funkcí eliptických

In: Otakar Borůvka (editor): Dílo Matyáše Lercha v oboru matematické analysy. (Czech). Praha: Nakladatelství československé akademie věd, 1957. pp. 502–515.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401320

VĚRA RADOCHOVÁ

LERCHŮV PŘÍNOS K THEORII FUNKCÍ ELIPTICKÝCH

I. *Seznam Lerchových prací, týkajících se funkcí eliptických.*

Tento seznam je vypsán z úplného Seznamu prací prof. Matyáše Lercha od JOS. ŠKRÁŠKA (*Čas. pro pěst. mat.*, 78 (1953), 139—148).

[8] Příspěvek k theorii transformace elliptických integrálů, *Čas.* 13 (1884), 140—142.

[20] Příspěvky k theorii funkcí elliptických, *Zpr. KČSN* 1886, 391—429.

[29] Počtářské odvození základního vzorce pro lineárnou transformaci elliptické transcendenty $\vartheta_1(u, \tau)$, *Věst. KČSN* 1887, 426—432.

[32] Sur un théorème relatif à la théorie des fonctions elliptiques, *Jorn. de Teix.* 8 (1887), 3—10.

[37] Příspěvky k elementárné theorii elliptických integrálů, *Čas.* 17 (1888), 49—55, 145—158.

[41] Sur une méthode pour obtenir le développement en série trigonométrique de quelques fonctions elliptiques, *Acta* 12 (1888), 51—55.

[46] Introduction à une théorie élémentaire des intégrales elliptiques, *Ann. Ec. norm.* (3), 6 (1889), 263—296.

[65] Příspěvky k theorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených, *Rozpr. ČA* 1 (1891), č. 8., 135—148.

[75] Poznámky k theorii funkcí elliptických. *Rozpr. ČA* 1 (1892), č. 24, 1—18.

[77] Příspěvky k theorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených, *Rozpr. ČA* 1 (1892), č. 25, 1—6.

[88] Poznámka o jistých determinantech sestrojených z funkcí elliptických, *Rozpr. ČA* 2 (1893), č. 5, 1—5.

[90] Příspěvky k theorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených, *Rozpr. ČA* 2 (1893), č. 23, 1—42.

[92] Sur deux transcendantes considerées par Legendre, *Věst. KČSN* 1893, č. 25, 1—5.

[97] Sur un théorème de Kronecker, *Věst. KČSN* 1893, č. 9, 1—17.

[115] Příspěvky k theorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených, *Rozpr. ČA* 4 (1895), č. 1, 1—55.

[119] Über ein bei Cauchyscher Transformation der elliptischen Elementarfunktion der dritten Art auftretendes Integral, *Jahresber.* 4 (1895), 96.

[130] Ze základů theorie funkcí elliptických, *Věst. ČA* 5 (1896), 397—413, 495—513, 561—568.

[134] Sur quelques formules concernant les fonctions elliptiques et les integrales Eulériennes, *Věst. KČSN* 1897, č. 28, 1—11.

[146] Zur Theorie der elliptischen Functionen, *Monatsh.* 9 (1898), 177—183.

[159] Sur quelques intégrales ayant rapports avec les fonctions elliptiques, *Acta* 22 (1899), 365—370.

[167] Příspěvek k určování existenčního oboru analytických úkonů, *Rozpr. ČA* 9 (1900), č. 9, 1—8.

[170] Zur Bestimmung des analytischen Existenzbereiches in der Theorie der elliptischen Funktionen, *Monatsh.* 11 (1900), 107—113.

[190] Über den Kroneckerschen Beweis der sogenannten Kroneckerschen Grenzformel, *Archiv* (3), 6 (1904), 85—94.

[207] Poznámky k theorii funkce $\Phi(a, b, v, x) = x^{-a}(1-x)^{-b}\int\limits_0 e^{vx}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$, *Rozpr. ČA* 17 (1908), č. 15, 1—26.

[237] Elliptické funkce, *Spisy PF Brno* 1926, 1—160.

II. *Obsah a metoda.*

LERCHOVY první práce o eliptických funkcích jsou z devadesátých let minulého století. V té době byl rozvoj klasické teorie eliptických funkcí téměř dokončen. Po studiu eliptických integrálů LEGENDREM a objevech ABELOVÝCH a JACOBIOVÝCH byla studována teorie eliptických funkcí na základě teorie funkcí analytických. Nemalým přínosem v tomto směru bylo zavedení dvojperiodických funkcí druhého a třetího druhu HERMITEM.[1]) Nové pojetí a značné zjednodušení zavedl do teorie eliptických funkcí RIEMANN v šedesátých letech minulého století. Potom byly studovány eliptické funkce v souvislosti s Riemannovou plochou, modulární funkce a aplikace eliptických funkcí (na př. v teorii čísel a pod.).[2])

LERCHOVY práce o eliptických funkcích nejsou zásadního významu. Většinou navazují na práce JACOBIOVY a HERMITEOVY a přinášejí rozmanité doplňky známých výsledků. Tento přínos je dvojího druhu: LERCH jednak používá podstatně teorie eliptických funkcí ke studiu otázek, jež byly dříve vyšetřovány jinak; jednak využívá svých znalostí důkazových metod a speciálními obraty dochází často velmi jednoduše k známým výsledkům. Kromě toho mnohé relace zobecňuje.

LERCHOVY práce z eliptických funkcí můžeme shrnout do dvou skupin:

První skupina obsahuje práce zabývající se hlavně základními eliptickými funkcemi, a to nejvíce funkcemi theta.

V pracích druhé skupiny jsou zkoumány různé transcendentní funkce v souvislosti s eliptickými funkcemi.

III. *Základní eliptické funkce.*

První skupina LERCHOVÝCH prací o eliptických funkcích se týká základních eliptických funkcí. Původních výsledků je v nich málo a mnohé z prací jsou pouze volným překladem nebo shrnutím výsledků HERMITEOVÝCH, WEIERSTRASSOVÝCH, JACOBIOVÝCH, CAUCHYOVÝCH, KLEINOVÝCH a jiných autorů. Účelem těchto prací je seznámit české čtenáře s teorií eliptických funkcí „vzhledem k důležitosti a pozornosti, jaké se těší funkce eliptické v nynější analysi“ ([37] str. 258). Nelze však tvrdit, že by všechny LERCHOVY práce, zabývající se základními eliptickými funkcemi, byly více či méně přesným překladem pojednání jiných autorů. I když jsou výsledky, které LERCH odvozuje, známé, metody jsou často originální a jednodušší než dřívější.

Největší pozornost v této skupině prací věnuje LERCH funkcím theta, a to způsobu jejich zavedení do teorie eliptických funkcí, i různým vztahům a vzorcům popisujícím jejich vlastnosti a jejich použití při studiu jiných transcendentních funkcí.

1. V práci [130] a [237] se setkáváme s transformačními vzorci, které vyjadřují vztahy mezi funkcemi $\vartheta_\alpha\,(u, \tau)$ a $\vartheta_{\alpha'}\left(\frac{u}{\tau}; -\frac{1}{\tau}\right)$; LERCH tyto vzorce nazývá CAUCHY-POISSONOVSKÉ transformační vzorce. CAUCHY a POISSON je odvodili pouze pro funkci $\vartheta_3\,(u, \tau)$. V GAUSSOVĚ pozůstalosti je několik důkazů těchto vzorců v obecném tvaru. GAUSS se zejména pokusil o důkaz založený na zkoumání dvojnásobného součinu, kterým lze vyjádřit funkci $\vartheta_3\,(u, \tau)$, ale nedospěl k cíli, takže důkaz není dokončen.[3])

LERCH v práci [29] ukazuje, že GAUSSOVY myšlenky lze použít k důkazu vzorce

$$\vartheta_1\,(v, \tau) = i\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right) e^{-\frac{v^2 \pi i}{\tau}}\, \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}\middle| -\frac{1}{\tau}\right)$$

a upozorňuje na nedostatky v důkazu GAUSSOVĚ. Vychází z WEIERSTRASSOVY funkce $\sigma\,(u, \omega, \omega')$ a z vyjádření funkce $\sigma\,(u)$ dvojnásobným součinem a po různých komplikovaných úpravách dostává vzorec

$$\vartheta_1(v,\tau) = \tau \frac{\vartheta_1'(0,\tau)}{\vartheta_1'\left(0, -\frac{1}{\tau}\right)} e^{-\frac{v^2\pi i}{\tau}} \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}\middle| -\frac{1}{\tau}\right). \tag{1}$$

Aby určil veličinu $\varphi(\tau) = \dfrac{\vartheta_1'(0,\tau)}{\vartheta_1'\left(0, -\frac{1}{\tau}\right)}$, vyjádří čitatele i jmenovatele nekonečným součinem, utvoří jejich logaritmické derivace a dochází k rovnici $\tau\varphi(\tau) = i\left(\sqrt{\dfrac{i}{\tau}}\right)$, která po dosazení do (1) vede k hledanému vzorci.

2. JACOBI ve svých pracích odvodil trigonometrický rozvoj eliptické funkce druhého druhu $\dfrac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_0(u)}$, který byl později znovu nalezen HERMITEM a KRONECKEREM.

LERCH se zabývá tímto problémem v práci [146] a podává velmi jednoduché odvození zmíněného trigonometrického rozvoje, které se vyznačuje tím, že vyplývá již ze základních vlastností funkcí ϑ_1 a ϑ_0.

LERCH vychází od rozvoje uvedené funkce v nekonečnou řadu tvaru

$$\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_0(u)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{2n+1} e^{(2n+1)u\pi i}, \text{ kde } A_\lambda = \int_0^1 \frac{\vartheta_1(x+v)}{\vartheta_0(x)} e^{-\lambda\pi i x} dx,$$

a určuje hodnoty integrálů A_λ vhodnou úpravou výrazů

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\vartheta_1\left(\frac{k}{m}+v\right)}{\vartheta_0\left(\frac{k}{m}\right)} e^{-\frac{\lambda\pi i k}{m}}$$

a přechodem k limitě pro $m \to \infty$. Tím obdrží vzorec

$$\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_0(v)} \int_0^1 \frac{\vartheta_1(x+v)}{\vartheta_0(x)} e^{-\lambda\pi i x} dx = \frac{\pi}{\sin\pi\left(v + \frac{\lambda\tau}{2}\right)},$$

z něhož pak vychází hledaný rozvoj

$$\frac{\vartheta_1(0)\,\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_0(u)\,\vartheta_0(v)} = \pi \sum_\lambda \frac{e^{\lambda u\pi i}}{\sin\pi\left(v+\frac{\lambda\tau}{2}\right)}.$$

$$(\lambda = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

Tato metoda odvození se nevyskytuje v pojednání [146] u LERCHA po prvé. Vyložit ji je předmětem práce [41], která vyšla mnohem dříve než pojednání [146]. V práci [41] je současně ukázáno použití uvedené metody při odvození trigonometrického rozvoje funkce $\dfrac{\vartheta_0(x+u)}{\vartheta_0(u)\,\vartheta_1(x)}$. Výsledkem je vzorec:

$$\vartheta_2\,\vartheta_3\,\vartheta_0 \frac{\vartheta_0(x+u)}{\vartheta_0(u)\,\vartheta_1(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nu\pi i}}{\sin\pi(x+n\tau)}.$$

Z něho lze jednoduchými úpravami odvodit některé vzorce HERMITEOVY.[4])

Trigonometrický rozvoj funkce $\frac{\vartheta_0(x+u)}{\vartheta_0(u)}$ získává LERCH též v práci [65] ako jeden z výsledků o funkci

$$f_a(u,s) = \frac{1}{(a-1)!} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1-s-nti, a-1)}{\sin \pi (s+nti)} e^{2nu\pi i}; (z,\nu) = z(z+1)\dots(z+\nu-1),$$

jejímž speciálním případem je funkce

$$f_1(u,s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nu\pi i}}{\sin \pi (s+nti)}.$$

Postup odvození se liší od metody prací [41] a [146]. Vychází ze skutečnosti, že výraz

$$f_a(u,s)\, \vartheta_0(u \mid ti)^a\, \vartheta_1(s \mid ti)$$

je celistvou transcendentní funkcí proměnných u, s a vůči a je funkcí theta stupně a; je možno ji proto vyjádřit pomocí základních eliptických transcendent. Toto vyjádření se provede velmi jednoduše pro funkci $f_1(u,s)$, pro níž se dostane vzorec

$$f_1(u,s) = \frac{\vartheta_1'}{\pi} \frac{\vartheta_0(u+s)}{\vartheta_0(u)\, \vartheta_1(s)}.$$

3. Zmíněné práce však nejsou jediná místa v LERCHOVÝCH spisech, v nichž jsou odvozovány vlastnosti funkcí theta. Na př. V. kapitola práce [90] je věnována studiu jistých integrálů funkcí theta.

Také Lerchova učebnice o eliptických funkcích [237] obsahuje množství vzorců pro funkce theta. Výsledky obsažené v této knize z největší části nejsou původní a také mnohé metody jsou převzaty z klasické teorie. Význam této učebnice spočívá hlavně v tom, že je to vedle knihy DUSLOVY jediná česká učebnice, která se zabývá teorií JACOBIOVÝCH eliptických funkcí *sn*, *cn*, *dn* a funkcí theta. V knize jsou soustavně studovány vlastnosti těchto funkcí. Jest ukázáno použití trigonometrických rozvojů funkcí *sn*, *cn*, *dn* v teorii čísel. Dále v ní najdeme metody výpočtu eliptických integrálů s praktickými ukázkami. Originální je LERCHOVA transformace sloužící k výpočtu eliptického integrálu

$$u = F(k, \Phi) = \int_0^{\Phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (\Phi = \arcsin \sqrt{x}).$$

Postup při výpočtu se dá popsat takto (str. 125 a další): Nechť $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{1+k'}$.

Zaveďme modul l a nový úhel ψ rovnicemi:

$$\sqrt{l} = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}, \quad \psi = \arcsin s,$$

při čemž

$$s = \frac{l - Q^2}{l(1-Q^2 l)}, \quad Q = \frac{\sqrt{1-k^2x^2} - \sqrt{k'}}{\sqrt{1-k^2x^2} + \sqrt{k'}}.$$

Potom platí transformační vzorec

$$F(k, \Phi) = \frac{(1+\sqrt{l})^2}{2} F(l, \psi).$$

Modul l je ve srovnání s modulem k_1, který se vyskytuje při LANDENOVĚ transformaci, vždy menší, takže pro numerický výpočet je tato LERCHOVA transformace velmi výhodná.

Druhá část knihy není tak rozsáhlá jako část první. Připomeňme, že LERCHOVA kniha je torsem dvousvazkové učebnice eliptických funkcí, kterou chtěl LERCH napsat, a z níž byl po jeho smrti nalezen pouze rukopis prvního dílu.

4. Pojednání [134], [159], [65] obsahují souvislosti funkcí theta s funkcemi, které LERCH vyšetřuje v pracích z integrálního počtu.

Pojednání [134] navazuje na práci [156][5]) týkající se nekonečných řad a zaměřenou na funkci gamma; jsou v něm odvozeny některé vztahy mezi funkcí gamma a funkcemi theta. Pro logaritmickou derivaci funkce gamma je odvozena relace

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} = \Gamma'(1) + \log\frac{a}{4\pi} - \int_0^a \frac{\vartheta_3(x\,|\,iz)}{z}\,dz - \int_a^\infty \frac{\vartheta_3(x\,|\,iz)-1}{z}\,dz.$$

Zobecnění známých eliptických rozvojů provádí LERCH v práci [65], v níž odvozuje vzorec

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(s+nti)\,\Gamma(a-s-nti)}{\Gamma(a)}\, e^{2nu\pi i} = \frac{2\pi}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}}{\left[1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right]^a};$$

nekonečná řada na levé straně konverguje absolutně i stejnoměrně vůči u pro všechna u, pro něž $-\frac{t}{2} < \operatorname{Im} u < \frac{t}{2}$.

Když a je celé číslo, je tento výraz jednoznačnou analytickou funkcí vzhledem k u v celé rovině, s výjimkou bodů $u = n + \left(\nu + \frac{1}{2}\right) ti$ $(n, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \pm 3, \ldots)$, v nichž má póly řádu a. V tomto případě lze levou stranu vyjádřit eliptickými funkcemi parametru ti a na základě tohoto výsledku odvodit pro LAMBERTOVU řadu toto vyjádření:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-e^{2nt\pi}} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\vartheta_0'(z)\,dz}{\vartheta_0(z)\,(e^{t\pi+2\pi zi}-1)}.$$

5. Ve IV. kapitole pojednání [90] se setkáváme s vyjádřením některých transcendentních funkcí pomocí funkcí eliptických, zejména funkcí theta.

Nejprve je studována funkce $X_0(w_1, w_2\,|\,\tau_1, \tau_2; \sigma)$ definovaná vzorcem

$$X_0(w_1, w_2\,|\,\tau_1, \tau_2; \sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2n\sigma\pi i}}{(e^{2\pi i(w_1+n\tau_1)}-1)\,(e^{2\pi i(w_2+n\tau_2)}-1)},$$

při čemž je $\operatorname{Im}\tau_1 > 0$, $\operatorname{Im}\tau_2 > 0$, $0 < \operatorname{Im}\sigma < \operatorname{Im}(\tau_1+\tau_2)$.

Použitím známého vzorce

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nu\pi i}}{e^{2\pi i(w+n\tau)}-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{\vartheta_1'(0\,|\,\tau)\,\vartheta_1(w+u\,|\,\tau)}{\vartheta_1(w\,|\,\tau)\,\vartheta_1(u\,|\,\tau)}$$

dostává LERCH pro funkci X_0 relaci

$$\vartheta_1 (w_1 \mid \tau_1)\, \vartheta_1 (w_2 \mid \tau_2)\, X_0 (w_1, w_2 \mid \tau_1, \tau_2; \sigma_1 + \sigma_2) =$$

$$= \frac{\vartheta_1' (0, \tau_1)\, \vartheta_1' (0, \tau_2)}{(2\pi i)^2} \int_0^1 \frac{\vartheta_1 (w_1 + \sigma_1 + x \mid \tau_1)\, \vartheta_1 (w_2 + \sigma_2 - x \mid \tau_2)}{\vartheta_1 (\sigma_1 + x \mid \tau_1)\, \vartheta_1 (\sigma_2 - x \mid \tau_2)}\, dx \tag{I}$$

kde $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ tak, aby $0 < \operatorname{Im} \sigma_1 < \operatorname{Im} \tau_1$, $0 < \operatorname{Im} \sigma_2 < \operatorname{Im} \tau_2$.

Relace (I) ukazuje souvislost funkce X_0 s eliptickými funkcemi.

Při studiu funkce $X_0 (w_1, w_2 \mid \tau_1, \tau_2; \sigma)$ jako funkce proměnné σ jsou odvozeny rovnice:

$$e^{2 w_1 \pi i}\, X_0 (w_1, w_2 \mid \tau_1, \tau_2; \sigma + \tau_1) = X_0 (w_1, w_2 \mid \tau_1, \tau_2; \sigma) + \\ + \frac{\vartheta_1' (0 \mid \tau_2)}{2\pi i} \frac{\vartheta_1 (w_2 + \sigma \tau_2)}{\vartheta_1 (w_2 \mid \tau_2)\, \vartheta_1 (\sigma \mid \tau_2)} \tag{II}$$

$$e^{2 w_2 \pi i}\, X_0 (w_1, w_2 \mid \tau_1, \tau_2; \sigma + \tau_2) = X_0 (w_1, w_2 \mid \tau_1, \tau_2; \sigma) + \\ + \frac{\vartheta_1' (0, \tau_1)}{2\pi i} \frac{\vartheta_1 (w_1 + \sigma \tau_1)}{\vartheta_1 (w_1 \mid \tau_1)\, \vartheta_1 (\sigma \mid \tau_1)} \tag{III}$$

Funkce X_0 je jako funkce proměnné σ periodická s periodou 1 a vzhledem k (II) je jednoznačnou funkcí proměnné σ. Tyto vlastnosti a relace (II) a (III) funkci X_0 proměnné σ úplně charakterisují. Každá jiná funkce těchže vlastností je s ní totožná.

S některými dalšími výsledky, které jsou v tomto pojednání získány pro funkci X_0 se setkáváme ještě v kap. X. práce [115]. Tyto výsledky však nenavazují na teorii eliptických funkcí.

Pro funkci $J (x, y, s \mid v_1, v_2)$ definovanou vzorcem

$$J (x, y, s \mid v_1, v_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x + n v_1} \frac{e^{\frac{2 n s \pi i}{v_2}}}{e^{\frac{2\pi i}{v_2}(y + n v_1)} - 1}$$

pak odvozuje LERCH ve IV. kap. pojednání [90] vyjádření pomocí eliptických transcendent ve tvaru

$$J (x, y, s \mid v_1, v_2) = \frac{\vartheta_1' \left(0 \,\middle|\, \frac{v_1}{v_2}\right)}{v_1 \left(e^{\frac{2 x \pi i}{v_1}} - 1\right)} \int_0^1 \frac{\vartheta_1 \left(\frac{y + s + v_2 z}{v_2} \,\middle|\, \frac{v_1}{v_2}\right) e^{\frac{2 x z \pi i}{v_1}}}{\vartheta_1 \left(\frac{y}{v_2} \,\middle|\, \frac{v_1}{v_2}\right) \vartheta_1 \left(\frac{s + v_2 z}{v_2} \,\middle|\, \frac{v_1}{v_2}\right)}\, dz$$

za předpokladu $\operatorname{Im} \frac{v_1}{v_2} > 0$. Při odvození je použito známých vlastností funkcí theta.

IV. *Další eliptické transcendenty.*

Práce druhé skupiny se zabývají studiem několika eliptických transcendent. Cena těchto prací je v tom, že LERCH používá nových metod a dále, že metodami známými dochází k výsledkům jednodušeji a nachází i výsledky nové. Problémy, které LERCH řeší, jsou hlavně ve spisech [65], [77], [90], [115] mnohem složitější, než v ostatních pojednáních o eliptických funkcích a tyto spisy předčí ostatní také množstvím původních myšlenek a pěkných obratů.

$$\text{Funkce } R\,(u, w\,|\,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2} e^{2nu\pi i}}{1 - q^{2n} e^{2w\pi i}}.$$

Jednou z transcendentních funkcí, které věnuje LERCH hodně pozornosti a s níž souvisejí mnohé nové výsledky, je funkce $R\,(u, w\,|\,\tau)$ definovaná vzorcem:

$$R\,(u, w\,|\,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2} e^{2nu\pi i}}{1 - q^{2n} e^{2w\pi i}},$$

v níž $q = e^{\tau\pi i}$ značí komplexní veličinu, jejíž absolutní hodnota je menší než 1, τ je proměnný parametr. Řada na pravé straně konverguje stejnoměrně pro všechna u a w, s výjimkou bodů $w = m + n\,\tau$ $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, v nichž funkce proměnné w, definovaná řadou, má póly prvního řádu.

Funkce $R\,(u, w\,|\,\tau)$ patří mezi výrazy, které do teorie eliptických funkcí zavedl P. APPELL při hledání trigonometrických rozvojů dvojperiodických funkcí třetího druhu.[6]) Tato funkce však byla známa již Ch. HERMITEOVI, jak P. APPEL sám uvádí. LERCH studuje její vlastnosti jednak v pojednání [75], které je výhradně věnováno této funkci, jednak v práci [90].

1. V pojednání [75] vychází LERCH ze součinu $\psi\,(u, w) = \vartheta_1\,(w)\,R\,(u, w)$, který je celistvou funkcí proměnné w, a z periodických vlastností funkce $R\,(u, w)$, které před tím odvodil, dochází k rovnici

$$R\,(u, w) = i\,\frac{\vartheta_3\,(u)}{\vartheta_3\,(w)}\,e^{\pi i \left(2u - w - \frac{3}{4}\tau\right)}\,R\left(w + \frac{1+\tau}{2},\ u - \frac{1+\tau}{2}\right),$$

která se v podstatě nalézá už u HERMITEA.[7]) Z ní pak plyne vzorec

$$R\,(u + \tau, w) = e^{-2w\pi i}\,R\,(u, w) - \vartheta_3\,(u)\,e^{-2\pi i w},$$

kterým je funkce $R\,(u, w)$, jako funkce proměnné u, úplně charakterisována t. zn. každá jiná funkce proměnné u vyhovující uvedené relaci je s ní totožná.

V téže práci zavádí LERCH obecnější funkci

$$A\,(u, v\,|\,\tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n\nu^2} e^{2\nu nu\pi i}}{1 - q^{2\nu} e^{2\pi i (u+v)}},$$

která se vyskytuje po prvé u P. APPELLA při zkoumání dvojperiodických funkcí třetího druhu.[8]) Z vlastností této funkce LERCH odvozuje zobecnění HERMITEOVA vztahu ve tvaru

$$R_n\,(u, w\,|\,\tau)\,\vartheta_1\,(nw\,|\,n\tau)\,q^{2n - \frac{1}{4}}\,e^{(nw - 2nu)\pi i} =$$

$$= i \sum_{s=0}^{n-1} q^{2s} e^{2sw\pi i}\,\vartheta_3(nu + s\tau\,|\,n\tau)\,R_1\left(nw + \frac{n + n\tau}{2},\ nu + s\tau - \frac{n + n\tau}{2}\,\middle|\,n\tau\right);$$

při tom značí

$$R_n\,(u, w) = A\,(u, w - u) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n\nu^2} e^{2\nu nu\pi i}}{1 - q^{2\nu} e^{2\pi i w}};\ \text{pro } n = 1 \text{ dostáváme } R_1\,(u, w);$$

τ značí proměnný parametr.

Dalším LERCHOVÝM výsledkem v práci [75] je vzorec

$$\Phi(v,\tau)\sqrt{\frac{\tau}{i}}+\tau e^{-\frac{v^2\pi i}{\tau}}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\pi i}{\tau}x^2}\,dx}{1-e^{\frac{2v\pi i}{\tau}+\frac{2\pi i}{\tau}x}},$$

v němž značí

$$\Phi(v,\tau)=F_3\left(\frac{u}{\tau},\frac{v}{\tau}\,\Big|\,-\frac{1}{\tau}\right)-i\sqrt{\frac{\tau}{i}}\,F_3(u,v\,|\,\tau)\,e^{-\frac{v^2\pi i}{\tau}},$$

$$F_3(u,v\,|\,\tau)=\frac{f(u,v)}{\vartheta_3(u,\tau)};\ f(u,v)=R(u,u+v\,|\,\tau).$$

Tento vzorec představuje zajímavou souvislost integrálu na pravé straně s HERMITEOVOU transcendentou $R(u,w)$.

Při jeho odvození postupuje LERCH tak, že používá vlastností funkcí theta a integruje relaci

$$\Phi(v,\tau)\,\vartheta_3(u)\sqrt{\frac{\tau}{i}}=f\left(\frac{u}{\tau},\frac{v}{\tau}\,\Big|\,-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{u^2\pi i}{\tau}}-\tau f(u,v\,|\,\tau)\,e^{-\frac{v^2\pi i}{\tau}}$$

podle u v mezích od 0 do 1, za předpokladu $0<\operatorname{Im} v<\operatorname{Im}\tau$. Po jednoduché úpravě dostává uvedený vzorec.

2. K souvislosti mezi funkcí $\Phi(v,\tau)$ a funkcí $R(u,w)$ se LERCH vrací ještě jednou v práci [90], v níž odvodí relaci

$$\sqrt{\frac{i}{\tau}}\,\vartheta_3(u,\tau)\,\Psi(v-u,\tau)=R(u,v\,|\,\tau)-\frac{1}{\tau}\,e^{\frac{\pi i}{\tau}(v^2-2uv)}\,R\left(\frac{u}{\tau},\frac{v}{\tau}\,\Big|\,-\frac{1}{\tau}\right),\tag{2}$$

kde

$$\Psi(w,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\pi i}{\tau}\left(x+\frac{i}{2}iw\right)^2}\frac{dx}{1+e^{2\pi x}}.$$

Tento výsledek se velmi málo liší od vzorce, který LERCH odvodil také v pojednání [75], avšak způsob odvození je značně rozdílný. Zatím co v pojednání [75] využívá při důkazu hlavně periodičnosti zkoumaných funkcí, možnosti jejich vyjádření pomocí funkcí theta a pod., spočívá důkaz v práci [90] na větě:

Je-li $f(x)$ funkce konečná a spojitá v celém intervalu $(-\infty,\infty)$ a taková, že konverguje integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx,$$

platí rovnice

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{2nx\pi i}\,dx,\tag{3}$$

jestliže obě strany existují.

Položí-li

$$f(x)=\frac{e^{(\tau x^2+2ux)\pi i}}{1-e^{2\pi i(v-\tau x)}}$$

dostane po dosti složitých úpravách levé i pravé strany rovnice (3) relaci (2).

3. Vlastnosti funkce $R(u, w)$ a relace (4) jsou LERCHOVI v práci [90] východiskem pro další úvahy, v nichž získává různé zajímavé výsledky pro funkci $\Psi(w, \tau)$. Na př. s použitím vzorce

$$R(u, w + \tau) = e^{\pi i(2w - 2u + \tau)} R(u, w) + \vartheta_3(u)$$

dostává rovnice

$$\Psi(v + 1, \tau) = \Psi(v, \tau) - i e^{\frac{v^2 \pi i}{\tau}}$$

$$\Psi(v + \tau, \tau) = e^{\pi i(2v + \tau)} \Psi(v, \tau) + \sqrt{\frac{\tau}{i}}, \tag{4}$$

které funkci $\Psi(v, \tau)$ jako funkci proměnné v úplně charakterisují, t. zn. každá jiná celistvá funkce $f(v)$ vyhovující rovnicím (4) je s funkcí $\Psi(v)$ totožná.

KRONECKEROVY VZORCE.

Podstatná část LERCHOVA přínosu k teorii funkcí eliptických je v souvislosti s KRONECKEROVÝMI výsledky uveřejněnými ve spise: Zur Theorie der ellipt. Functionen.[9]) LERCH jednak KRONECKEROVY výsledky odvozuje novými metodami, jednak je zobecňuje a odvozuje výsledky nové. Těmto úvahám jsou věnovány kapitoly VII—IX práce [115] a pojednání [97] a [190].

1. KRONECKER dospěl ve svém spise přímým výpočtem k těmto vzorcům:

$$e^{\tau^2(w_1 + w_2)\pi i} \vartheta_1(\sigma + \tau w_1 | w_1) \vartheta_1(\sigma - \tau w_2 | w_2) =$$

$$= \sqrt{c_0} \sum_{m, n} (-1)^{mn + m + n} e^{-\pi(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2) + 2\pi i(m\sigma + n\tau)} \tag{IV}$$

$$e^{\tau^2(w_1 + w_2)\pi i} \vartheta_1(\sigma + \tau w_1 | w_1) \vartheta_0(\sigma - \tau w_2 | w_2) =$$

$$= -\sqrt{c_0} \sum_{\lambda, n} i^{\lambda(n+1)} e^{-\pi\left(a_0 \frac{\lambda^2}{4} + b_0 \frac{\lambda n}{2} c_0 n^2\right) - 2\pi i\left(\frac{\lambda\sigma}{2} + n\tau\right)} \tag{V}$$

$$\lambda = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

LERCH odvozuje v kapitole VII. [115] výsledek obecnější, z něhož plynou vzorce (IV) a (V) jako speciální případy. Vychází z funkce

$$\Theta(\sigma, \tau) = e^{\tau^2(w_1 + w_2)\pi i} \vartheta_{gh}(\sigma + \tau w_1 | w_1) \vartheta_{g'h'}(\sigma - \tau w_2 | w_2),$$

kde σ a τ jsou neodvisle proměnné, Im $w_1 > 0$ a Im $w_2 > 0$.

O této funkci ukáže, že je ROSENHAINOVSKOU funkcí theta řádu prvního o charakteristice

$$\begin{pmatrix} g + g' & h + h' \\ h & g' \end{pmatrix} \quad \text{a periodách } (ai, bi, ci).$$

Podle obecné teorie těchto funkcí lze funkci $\Theta(\sigma, \tau)$ vyjádřit nekonečnou řadou

$$\Theta(\sigma, \tau) = A \sum_{m, n} e^{-\pi f\left(m + \frac{g''}{2}, n + \frac{h''}{2}\right) + 2\pi i\left(m + \frac{g''}{2}\right)\left(\sigma + \frac{h}{2}\right) + 2\pi i\left(n + \frac{h''}{2}\right)\left(\tau + \frac{g'}{2}\right)}$$

$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

při tom značí

$$f(\xi, \eta) = a\,\xi^2 + 2\,b\,\xi\,\eta + c\,\eta^2; \quad g'' = g' + g,\ h'' = h' - h; \quad A = \text{konst.},$$

pro a, b, c platí

$$a\,i = \frac{w_1\,w_2}{w_1 + w_2},\ b\,i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{w_1 - w_2}{w_1 + w_2},\ c\,i = \frac{-1}{w_1 + w_2}.$$

Porovnáním výsledků získaných různým způsobem výpočtu konstanty A vychází po jednoduché úpravě:

$$e^{\tau^2 (w_1 + w_2)\pi i}\,\vartheta_{gh}(\sigma + \tau\,w_1 \mid w_1)\,\vartheta_{g'h'}(\sigma - \tau\,w_2 \mid w_2) =$$

$$= \mathrm{i}^{g'(h+h') - 2gh}\, e^{(g+g')(h'-h)\frac{\pi i}{4}} \sqrt{c_0} \sum_{m,n} i^{2mn + g''n + h''m}\, e^{-\pi f_0\left(m + \frac{g''}{2},\, n + \frac{h''}{2}\right) +}$$

$$^{+ 2\pi i\left[\left(m + \frac{g''}{2}\right)\left(\sigma + \frac{h}{2}\right) + \left(n + \frac{h''}{2}\right)\left(\tau + \frac{g'}{2}\right)\right]}$$

v tomto vzorci značí:

$$f_0(\xi, \eta) = a_0\,\xi^2 + b_0\,\xi\,\eta + c_0\,\eta^2; \quad g'' = g' + g,\ h'' = h' - h;$$

a_0, b_0, c_0 jsou reálné veličiny vyhovující podmínce $4\,a_0\,c_0 - b_0^2 = 1$ a w_1, $-w_2$ jsou kořeny rovnice $a_0 + b_0\,w + c_0\,w^2 = 0$.

Pro $g = h = g' = h' = 1$ plyne odtud KRONECKERŮV vzorec (IV), pro $g = h = 1$, $g' = 0$, $h' = 1$ vzorec (V).

2. V osmé kapitole téže práce podává LERCH nový důkaz vyjádření KRONECKEROVA výrazu

$$S(u, \xi_1, \xi_2 \mid \omega_1, \omega_2) = \sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i(m\xi_1 + n\xi_2)}}{u + 2\,m\,\omega_1 + 2\,n\,\omega_2} \tag{5}$$

WEIERSTRASSOVOU funkcí σ:

$$S(u, \xi_1, \xi_2 \mid \omega_1, \omega_2) = e^{2u(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)}\,\frac{\sigma(u + 2\,\xi_2\,\omega_1 - 2\,\xi_1\,\omega_2 \mid \omega_1, \omega_2)}{\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2)\,\sigma(2\,\xi_2\,\omega_1 - 2\,\xi_1\,\omega_2 \mid \omega_1, \omega_2)}. \tag{6}$$

Důkaz je založen na vyšetřování funkce $\Theta(u)$ dané vzorcem:

$$\Theta(u) = S(u)\,\sigma(u),$$

kde $\sigma(u)$ je WEIERSTRASSOVA funkce $\sigma(u \mid \omega_1, \omega_2)$. O funkci $\Theta(u)$ LERCH ukáže, že se liší multiplikativní konstantou od funkce

$$\sigma(u + 2\,\xi_2\,\omega_1 - 2\,\xi_1\,\omega_2)\,e^{2(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)u};$$

při tom η_1, η_2 značí WEIERSTRASSOVY konstanty z teorie funkce sigma. Po určení konstanty dostane

$$\Theta(u) = e^{2u(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)}\,\frac{\sigma(u + 2\,\xi_2\,\omega_1 - 2\,\xi_1\,\omega_2)}{\sigma(2\,\xi_2\,\omega_1 - 2\,\omega_2\,\xi_1)},$$

z čehož plyne bezprostředně relace (6).

Z rovnice (6) LERCH odvozuje své původní důsledky vyjádřené rovnicemi:

$$\sum_{m,n}' \frac{e^{2\pi i(m\xi_1+n\xi_2)}}{2\,m\,\omega_1+2\,n\,\omega_2} = 2\,(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)+\frac{\sigma'\,(2\,\xi_2\,\omega_1-2\,\xi_1\,\omega_2)}{\sigma\,(2\,\xi_2\,\omega_1-2\,\xi_1\,\omega_2)} \qquad \text{(VI)}$$

$$-2\sum_{m,n}' \frac{e^{2\pi i(m\xi_1+n\xi_2)}}{(2\,m\,\omega_1+2\,n\,\omega_2)^2} = 4\,(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)^2+4\,(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)\frac{\sigma'\,(2\,\xi_2\omega_1-2\,\xi_1\omega_2)}{\sigma\,(2\,\xi_2\,\omega_1-2\,\xi_1\omega_2)}+$$

$$+\frac{\sigma''\,(2\,\xi_2\,\omega_1-2\,\xi_1\,\omega_2)}{\sigma\,(2\,\xi_2\,\omega_1-2\,\xi_1\,\omega_2)}\,. \qquad \text{(VII)}$$

3. V kap. IX. práce [115] se LERCH zabývá studiem funkce

$$\mathfrak{K}\,(w_1,w_2;v_1,v_2\,|\,a,b,c;s;u)=\sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i(mv_1+nv_2)}}{[a\,(w_1+m)^2+2\,b\,(w_1+m)\,(w_2+n)+c\,(w_2+n)^2+u]^s} \qquad (7)$$

Při zkoumání jejích vlastností zavádí funkci

$$\Phi\,(u,\,w,\,v\,|\,\omega)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{u+m}\,\frac{e^{2mv\pi i}}{1-e^{2\pi i(w+m\omega)}}\,.$$

S touto funkcí $\Phi\,(u,\,w,\,v\,|\,\omega)$ se setkal také KRONECKER v jedné ze svých posledních studií o teorii funkcí eliptických.[10]) Hlavním výsledkem o funkci $\mathfrak{K}\,(w,\,v,\,a,\,b,\,c,\,s,\,u)$ je vzorec:

$$\mathfrak{K}\,(w_1,\,w_2;\,v_1,\,v_2\,|\,a,\,b,\,c;\,1;\,0)=\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\Big\{e^{2v_2\pi i(-w_2+w_1\omega_1)}\,\Phi\,(w_1,-w_2+w_1\,\omega_1,\,v_1+$$

$$+\,v_2\,\omega_1\,|\,\omega_1)-e^{2v_2\pi i(w_2-w_1\omega_2)}\,\Phi\,(w_1,\,-\,w_2-w_1\,\omega_2,\,v_1-v_2\,\omega_2\,|\,\omega_2)\Big\}, \qquad (8)$$

v němž značí Δ záporně vzatý diskriminant kladné kvadratické formy $F\,(x,\,y) = ax^2+2\,bxy+cy^2$.

Pro funkci Φ odvozuje LERCH vztah

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau+n}\,\frac{e^{\frac{2\pi i}{v}(\sigma_0 v+\tau_0 w)(\tau+n)}}{e^{\frac{2w\pi i}{v}(\tau+n)+2\sigma\pi i}-1}+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma+m}\,\frac{e^{2\tau\pi i+\frac{2\pi i}{w}(v-\sigma_0 v-\tau_0 w)(\sigma+m)}}{e^{\frac{2\pi i v}{w}(\sigma+m)+2\tau\pi i}-1}=$$

$$=\frac{2\,\pi\,i\,e^{\tau\pi i}}{(e^{2\tau\pi i}-1)\,(e^{2\sigma\pi i}-1)}\;;\;(0<\sigma_0<1;\;0<\tau_0<1).$$

Myšlenkový postup důkazu je v kap. IX [115] stejný jako u KRONECKERA[10]). V dřívější práci [90] LERCH provedl důkaz tohoto vztahu svou vlastní metodou, založenou na použití CAUCHYOVY věty. V té době mu KRONECKEROVY práce známy nebyly.

V dalších odstavcích IX. kap. odvozuje LERCH vlastními metodami vlastnosti funkce $\Phi\,(u,\,w,\,v\,|\,\omega)$ a získává řadu výsledků. Některé z nich odvodil již před ním KRONECKER, některé jsou nové. Následující citát ([115] str. 39) ukazuje, že si LERCH těchto výsledků vysoce cenil.

„Buďte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ celistvá čísla, hovící podmínce $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ a přetvořme výraz (7) substitucí

$$m = \alpha m' + \beta n', \quad n = \gamma m' + \delta n';$$

píšeme-li zároveň

$$w_1 = \alpha w_1' + \beta w_2'; \quad w_2 = \gamma w_1' + \delta w_2',$$

přejde řada $\mathfrak{K}(w_1, w_2; v_1, v_2, a, b, c; s; u)$ v řadu $\mathfrak{K}(w_1', w_2'; v_1', v_2'/a', b', c'; s; u)$, kde položeno

$$a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2; b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \gamma\beta) + c\gamma\delta; c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2;$$

$$w_1 = \alpha w_1' + \beta w_2'; \quad w_2 = \gamma w_1' + \delta w_2'; \tag{9}$$

$$v_1' = \alpha v_1 + \gamma v_2; \quad v_2' = \beta v_1 + \delta v_2; \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1;$$

při tom zároveň platí

$$w_1 v_1 + w_2 v_2 = w_1' v_1' + w_2' v_2'.$$

Dvě soustavy $(a, b, c; w_1, w_2; v_1, v_2)$ a $(a', b', c'; w_1', w_2'; v_1', v_2')$, které vespolek souvisejí rovnicemi (9), nazýváme rovnomocnými, a pro ně platí vztah

$$\mathfrak{K}(w_1', w_2'; v_1', v_2' \,|\, a', b', c'; s; u) = \mathfrak{K}(w_1, w_2; v_1, v_2 \,|\, a, b, c; s; u),$$

takže funkce $\mathfrak{K}(w_1, w_2; v_1, v_2 \,|\, a, b, c; s; u)$ jest invariantem rovnomocných soustav

$$(a, b, c; w_1, w_2; v_1, v_2).$$

Totéž platí pro funkci $\mathfrak{K}(w_1, w_2; v_1, v_2 \,|\, a, b, c; 1; 0)$ a jiných útvarech, z funkce $\mathfrak{K}$ odvozených.

Můžeme považovati za nejznamenitější náš výsledek větu, že podle vzorce (8) *funkce*

$$e^{2 v_2 \pi i(-w_2 + w_1\omega_1)}\, \Phi(w_1, -w_2 + w_1\omega_1, v_1 + v_2\omega_1 \,|\, \omega_1) -$$

$$- e^{2 v_2 \pi i(-w_2 - w_1\omega_2)}\, \Phi(w_1, -w_2 - w_1\omega_2, v_1 - v_2\omega_2 \,|\, \omega_2)$$

jest invariantem rovnomocných soustav (9).“

4. Látkově i metodicky jsou zmíněným kapitolám práce [115] blízká pojednání [97] a [110], v nichž se LERCH zabývá důkazem t. zv. KRONECKEROVY limitní formule.

V pojednání [97] podává LERCH nový důkaz této věty:

Nechť a, b, c jsou reálné hodnoty, $a > 0$, $c > 0$, $ac > b^2 = \triangle > 0$, $s > 1$ reál.; pak platí

$$\lim_{s \to 1} \left\{ -\frac{1}{s-1} + \frac{(2\sqrt{\triangle})^s}{2\pi} \sum_{m,n}' \frac{1}{(am^2 + 2bmn + cn^2)^s} \right\} = -2\Gamma'(1) -$$

$$- \log 2\sqrt{\triangle} - 2\log\left[\frac{1}{\sqrt{c}}\,(H(w_1)\,H(w_2)\right]; \tag{a}$$

při tom značí:

$$w_1 = \frac{-b + i\sqrt{\triangle}}{c}; \quad w_2 = \frac{b + i\sqrt{\triangle}}{c}; \quad H(w) = e^{\frac{w\pi i}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2nw\pi i}).$$

LERCHŮV[11]) důkaz spočívá na vyšetřování výrazu

$$K'(a, b, c; s) = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(am^2 + 2\,bmn + cn^2)^s},$$

kde $a > 0$, $c > 0$, b je reálné; $\triangle = ac - b^2 > 0$, $\operatorname{Re} s > 1$. Na rozdíl od ostatních autorů LERCH jednak využívá vzorce

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w+n)^{s-1}\,e^{2u\pi i(w+n)}}{e^{2\omega\pi(w+n)-2v\pi i} - 1} = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(\mu v + \nu w)}}{(-ui + \mu\omega + \nu i)^s},$$

který odvodil v práci [82],[12]) jednak zkoumá výraz $K'(a, b, c; s)$ jakožto analytickou funkci proměnné s. Po úpravách dospěje ke vzorci

$$K'(a, b, c; s) = 2\,c^{-s}\,\xi(2s) + \frac{4\pi\Gamma(2s-1)}{[\Gamma(s)]^2}\,\frac{c^{s-1}}{(4\triangle)^{s-\frac{1}{2}}}\,\xi(2s-1) +$$

$$+ 2\,\frac{(2\pi)^{2s}}{c^s[\Gamma(s)]^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \eta^{s-1}(\eta + k)^{s-1} \left\{ \frac{1}{e^{\frac{4\pi\sqrt{\triangle}}{c}\eta - 2kw_1\pi i} - 1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{e^{\frac{4\pi\sqrt{\triangle}}{c}\eta - 2kw_2\pi i} - 1} \right\} d\eta,$$

z něhož pak snadno odvodí, že funkce

$$K'(a, b, c; s) - \frac{\pi}{\sqrt{\triangle}}\,\frac{1}{s-1} \tag{b}$$

je celistvou transcendentou proměnné s. Z jejího rozvoje podle mocnin $s - 1$ obdrží vzorec:

$$\frac{(2\sqrt{\triangle})^s}{2\pi} K'(a, b, c; s) = \frac{1}{s-1} - 2\Gamma'(1) - \log(2\sqrt{\triangle}) - 2\log\left[\frac{1}{\sqrt{c}} H(w_1) H(w_2)\right] +$$

$$+ (s-1)\,P(s-1) \tag{c}$$

a z něj plyne bezprostředně hledaný výsledek.

Téže metody používá LERCH v druhé části práce [97], v níž vyšetřuje limitu pro $s \to 1$ funkce

$$K(a, b, c; \sigma; \tau; s) = \sum_{m,n}{}' \frac{e^{\pi i(m\sigma + n\tau)}}{(am^2 + 2\,bmn + cn^2)^s};$$

při tom je $0 \leqq \sigma$; $\tau \leqq 1$, alespoň jedna z hodnot σ a τ je necelá. Předpoklady o ostatních veličinách jsou tytéž jako v důkazu limitní formule (a).

Se základní myšlenkou hořejšího důkazu, že $K'(a, b, c; s) - \dfrac{\pi}{\sqrt{\triangle}}\,\dfrac{1}{s-1}$ je celistvá transcendentní funkce proměnné s se u LERCHA setkáváme při důkazu limitní KRONECKEROVY formule již v dřívější práci [82][12]), v níž je tomuto důkazu věnován paragraf 11.

LERCH tam zkoumá funkci

$$K'(a, b, c; s) = \sum_{m, n}' \frac{1}{(am^2 + 2\,bmn + cn^2)^s}$$

jako dvojnásobnou řadu. Důkaz, že výraz (*b*) je celistvou transcendentou vzhledem k *s* je proti práci [97] formálně značně jednodušší a podstatně odlišný, neboť se opírá o výsledky získané v kapitolách předcházejících. Také při stanovení zmíněného rozvoje v mocninnou řadu vůči $s - 1$ používá LERCH v každém pojednání jiného způsobu. V pojednání [82] hledá rozvoj pro funkci

$$\frac{1}{2\pi} K'(a, b, c; s)\,(2\sqrt{\triangle})^s$$

a to jeho první dva členy. Využívaje vlastností funkce Γ dostává vzorec (*c*). Z tohoto vzorce bezprostředně plyne důkaz KRONECKEROVY limitní formule, ale tento závěr LERCH neuvádí.

K důkazu KRONECKEROVY limitní formule se LERCH vrací ještě pojednáním [190] v r. 1902. Zatím co ve svých starších pojednáních LERCH podává nové důkazy, je tato práce věnována pouze formálním zjednodušením známého KRONECKEROVA důkazu. Tyto úpravy LERCH provádí, aby tím více vynikla myšlenková elegance důkazu KRONECKEROVA.[13])

Poznámky.

[1]) Ch. HERMITE, Sur quelques applications des fonctions elliptiques, *Compte rendus de l'Academie des Sciences*, Paris 1877—1882.

[2]) Podrobněji o vývoji eliptických funkcí viz Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften sv. II, 2, Leipzig 1901—1921.

[3]) C. F. GAUSS, Zum Beweise der schönen Lehrsätze der Reciprocität, Werke sv. III, str. 442.

Podrobně se chybou v GAUSSOVĚ úvaze zabýval LERCH již dříve ve své poznámce M. LERCH, Drobné zprávy, *Čas. 16* (1887), 238—241. [26].

[4]) M. LIPSCHITZ, Bemerkungen über eine Gattung vielfacher Integrale, *Journal für die reine und angew. Math.*, 101, str. 222; druhá část tohoto spisu je věnována výsledkům HERMITEOVÝM.

[5]) M. LERCH, Sur certains développements en séries trigonométriques, *Ann. de Toulouse* 3 (1889), C, 1—11.

[6]) *Annales de l'Ecole Normale Super.*, III. řada, sv. 1, 2, 3.

[7]) Ch. HERMITE, In Memoriam Dominici Chelini, *Collectanea Mathematica*, Milán 1881.

[8]) *Annales de l'Ecole Normale Super.* III. řada, sv. 1, 2, 3.

[9]) *Sitzungsberichte der kön. preuss. Akad. der Wissensch.*, 1883—1890.

[10]) L. KRONECKER, Zur Theorie der elliptischen Functionen, *Sitzungsber. der kön. preuss. Akad. der Wissensch.*, 1890.

[11]) V Encyklopädie d. m., Wissensch. II., 2. str. 333, je uvedený důkaz citován jako nový důkaz KRONECKEROVY limitní formule.

[12]) M. LERCH, Základové teorie Malmsténovských řad, *Rozpr. ČA* 1 (1892), č. 27, 1—70.

[13]) M. LERCH, [190], 85: „. . . Jedoch sind die Betrachtungen, welche dieser große Mathematiker zur Begründung seines Satzes ausgeführt hat (Sitzungsberichte der kgl. preuß. Akad. d. Wiss., 1889, p. 123 u. ff.), der Form nach so kompliziert, daß sich das Bedürfniß eines einfacheren Beweises wirklich fühlbar macht. . . . wenn man sich aber lediglich mit der Begründung der KRONECKERschen Grenzformel begnügen will, so läßt sich, wie ich vor längerer Zeit erkannt habe, der KRONECKERsche Beweis so darstellen, daß er den anderen der Klarheit und Einfachheit nach in keiner Weise nachsteht. Eine Veröffentlichung dieser meist bloß formalen Vereinfachung scheint mir schon aus dem Grunde geboten zu sein, weil dadurch die der KRONECKERschen Beweisführung anhaftende gedankliche Eleganz erst recht zu Tage tritt . . .“