Michal Křížek; Martin Markl
Abelovu cenu za rok 2011 získal John Milnor

In: Michal Křížek (author); Lawrence Somer (author); Martin Markl (author); Oldřich Kowalski (author); Pavel Pudlák (author); Ivo Vrkoč (author); Hana Bílková (other): Prvních deset Abelových cen za matematiku. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2013. pp. 67–76.

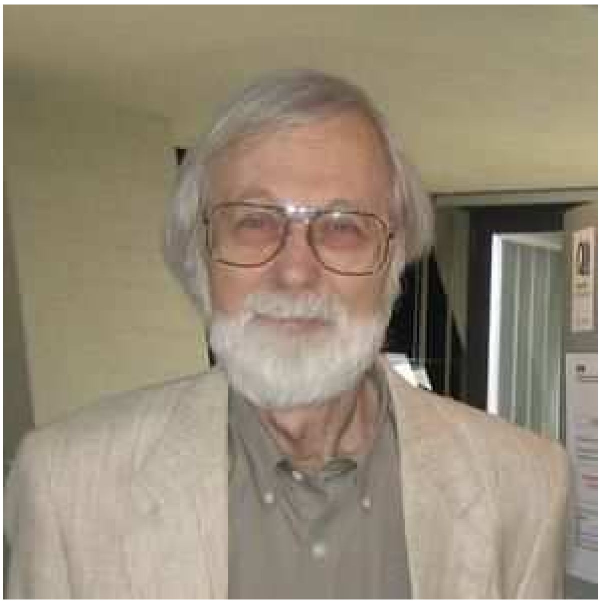
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402232

9. Abelovu cenu za rok 2011 získal John Milnor

Michal Křížek, Martin Markl

9.1. Úvod

Dne 23. března 2011 ve 12 hodin středoevropského času předseda Norské akademie věd, Øyvind Østerud, ohlásil, že Abelovu cenu za rok 2011 získává John Willard Milnor z University of Stony Brook v USA. Vzápětí laureátovi telefonovali tuto radostnou zprávu. J. Milnor byl velice potěšen, přestože jej vzbudili v 6 hodin ráno místního času. Abelova cena je totiž všeobecně považována za nejprestižnější cenu za matematiku. Navíc je spojena s částkou 6 000 000 norských korun.



John Willard Milnor

John Milnor převzal Abelovu cenu z rukou norského krále Haralda V. na slavnostním shromáždění v Oslo dne 24. května 2011. Další den na Univerzitě v Oslo pronesl prof. Milnor laureátskou přednášku[1] s názvem:

Sféry,

kterou uvedl rektor Ole Petter Ottersen. Po ní následovaly další tři zvané popularizační přednášky:

C. McMullen: *Variety, topologie a dynamika*
M. Hopkins: *Bernoulliho čísla, homotopické grupy a Milnor*
E. Ghys: *Výlet s průvodcem do sedmi rozměrů*

Po slavnostní ceremonii se Johna Milnora ptali, zda se cítí být spíše řešitelem problémů nebo budovatelem velkých teorií. Milnor odvětil: *Řešitelem problémů. Nikdy jsem se nepokoušel vytvořit nějakou velkou teorii, ale snažil jsem se řešit různé drobné problémy a klást si záludné otázky. Nikdy však nevíte, co z toho může vzejít.*

Abelova cena se uděluje za výjimečně hluboké výsledky, které významně ovlivnily matematické vědy. Podle vyjádření výběrové komise (Abel Committee) John Milnor získal cenu za objevné práce v oblasti topologie, geometrie a algebry. Významný je i jeho přínos k teorii čísel. Milnorovy myšlenky a objevy podstatně formovaly architekturu matematiky ve druhé polovině 20. století. Výběrová komise se skládala z pěti mezinárodně uznávaných matematiků. Ze závěrů jejího jednání citujeme:

Milnor is a wonderfully gifted expositor of sophisticated mathematics. He has often trackled difficult, cutting-edge subjects, where no account in book form existed. Adding novel insights, he produced a stream of timely yet lasting works of masterly lucidity. Like an inspired musical composer who is also a charismatic performer, John Milnor is both a discoverer and an expositor.

9.2. Vědecký životopis Johna Milnora

John Willard Milnor se narodil 20. února 1931 ve městě Orange (asi 15 km od Manhattanu) ve státě New Jersey. Studoval na univerzitě v nedalekém Princetonu, kde jako osmnáctiletý dokázal následující větu z teorie uzlů, kterou publikoval v renomovaném časopise Annals of Mathematics v roce 1950, viz [8].

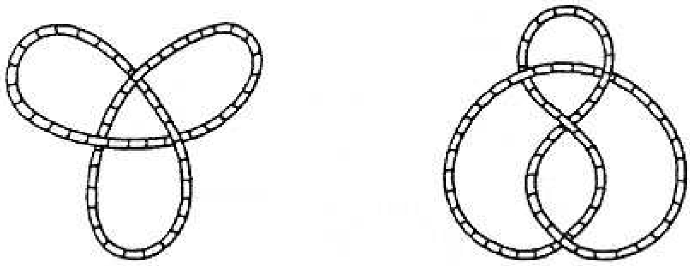
Fáryho-Milnorova věta. *Nechť K je uzavřená křivka v trojrozměrném eukleidovském prostoru dostatečně hladká tak, aby v každém jejím bodě existovala křivost κ. Splňuje-li celková křivost nerovnost*

$$\oint_K \kappa(s)\, ds \le 4\pi, \tag{9.1}$$

pak K není zauzlená.[2]

[1] Přednáška je k dispozici na webové stránce Johna Milnora, stejně jako děkovací řeč a řada fotografií.

[2] Symbol s označuje délku oblouku měřenou od nějakého daného bodu křivky.



Obr. 9.1. Schematické znázornění dvou zauzlených křivek.

Větu ve stejné době nezávisle vyslovil i Istvan Fáry, jenž její důkaz publikoval v Bulletin de la Societé Mathématique de France v roce 1949. Jestliže je tedy hladká uzavřená křivka zauzlená (srov. obr. 9.1), je její celková křivost větší než 4π. Výše uvedený odhad (9.1) je optimální v tom smyslu, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje hladká uzavřená zauzlená křivka, jejíž celková křivost je $4\pi+\varepsilon$. Poznamenejme, že pro kružnici je křivkový integrál v (9.1) roven 2π.

Již v roce 1951 přešel Milnor na doktorské studium, kde byl jeho školitelem Ralph Fox. O tři roky později obhájil dizertační práci *Isotopy of Links*, v níž se zabýval klasickými uzlovými grupami[3] a jejich zobecněními. Po absolvování doktorského studia pokračoval na univerzitě v Princetonu a později na Institute for Advanced Study, též v Princetonu, N. J. V roce 1989 přestoupil na univerzitu v Stony Brook v severní části Long Islandu, kde se spolupodílel na řízení Institute for Mathematical Sciences.

Milnorův nejznámější výsledek pochází z roku 1956, kdy objevil zvláštní sedmirozměrnou varietu – tzv. exotickou topologickou sféru, která má nestandardní diferenciální strukturu a není tedy difeomorfní se standardní sférou $\mathbb{S}^7$. Podrobněji o ní pojednáme v následující kapitole. Objev Milnorovy exotické sféry byl velkým překvapením. Do roku 1956 se totiž soudilo, že všechny topologicky ekvivalentní (homeomorfní) hladké sféry jsou také hladce ekvivalentní (difeomorfní). Milnorův výsledek tak odporuje naší intuici. Od té doby vzrostl zájem topologů o vícerozměrné sféry a zejména o samotný pojem hladkosti. Citovaný výsledek se proto často pokládá za zrod nové disciplíny – diferenciální topologie.

Databáze matematických časopisů Zentralblatt a Mathematical Reviews evidují více než 150 Milnorových vědeckých prací, z toho 13 článků v časopise Annals of Mathematics. PMFA uveřejnily překlad jeho článku [13]. Od roku 1963 John Milnor napsal přes 10 monografií. Ty podstatně ovlivnily řadu jeho následovníků. Mezi Milnorovy studenty, kteří se později proslavili, patří např. Tadatoshi Akiba, Jon Folkman, John Mather, Laurent C. Siebenmann, Jonathan Sondow a Michael Spivak.

John Milnor se zabývá především diferenciální a geometrickou topologií, K-teorií, dynamickými systémy, teorií komplexní proměnné, vlastnostmi Mandelbrotovy množiny a také lokální souvislostí Juliových množin. Některé matematické termíny nesou jeho jméno: kromě Milnorovy exotické sféry se můžeme setkat s pojmy Milnorova fibrace, Milnorovo číslo, Milnorovo zobrazení a též „Milnor-Thurston kneading theory“.

[3]Uzlová grupa je fundamentální grupa doplňku uzlu v $\mathbb{R}^3$.

Profesor Milnor získal během svého života celou řadu ocenění za vynikající vědecké výsledky. Připomeňme ty nejdůležitější. Před více než padesáti lety Milnor dostal Fieldsovu medaili (1962) a vzápětí se stal editorem Annals of Mathematics, kde působil několik let. V roce 1967 obdržel U.S. National Medal of Science a v roce 1989 Wolfovu cenu. Je jediným matematikem, který vyhrál tři Steelovy ceny Americké matematické společnosti za Seminal Contribution to Research (1982), Mathematical Exposition (2004) a Lifetime Achievement (2011). V roce 1994 byl zvolen zahraničním členem Ruské akademie věd a v roce 2004 se stal řádným členem The European Academy of Sciences, Arts and Letters. Poznamenejme ještě, že Milnorova manželka je také profesorkou matematiky. V dalších kapitolách pojednáme o některých Milnorových výsledcích podrobněji.

9.3. Exotické sféry

John Milnor na sebe upozornil v roce 1956 překvapivou konstrukcí nestandardní hladké struktury na sedmirozměrné sféře, viz [9]. Tento výsledek má navíc výhodu určité názornosti, proto mu v následujícím přehledu věnujeme nejvíce prostoru.

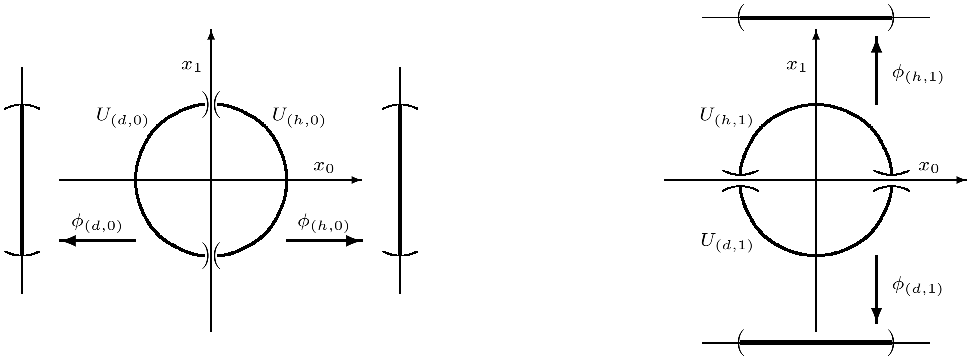
Ve zbytku kapitoly bude n označovat přirozené číslo. Standardní *jednotková n-rozměrná sféra* $\mathbb{S}^n$ je podmnožina bodů $(x_0, \ldots, x_n)$ z $(n+1)$-rozměrného Eukleidova prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ vyhovujících rovnici $x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Jednorozměrná sféra je tedy jednotková kružnice a dvourozměrná sféra je povrch třírozměrné jednotkové koule. Přestože jsou sféry zdánlivě jednoduché prostory, je s nimi svázáno mnoho hlubokých vět a hypotéz. Nejslavnější je jistě Poincarého domněnka[4] z roku 1904, dokázaná až G. Perelmanem v letech 2002–2003.

Topologická n-rozměrná sféra je topologický prostor X *homeomorfní* se standardní sférou $\mathbb{S}^n$. Připomeňme, že homeomorfismus je spojité vzájemně jednoznačné zobrazení se spojitou inverzí. Jeho spojitost znamená, že body blízké zobrazuje na body blízké. Zdá se zřejmé, že každá hladká topologická n-rozměrná sféra X je také *difeomorfní* se standardní sférou $\mathbb{S}^n$, tedy že existuje vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru X na prostor $\mathbb{S}^n$, které je nejen spojité, ale má ve všech bodech derivace všech řádů. O to více překvapil Milnorův příklad sedmirozměrné hladké topologické sféry, jež *není* difeomorfní se standardní sférou $\mathbb{S}^7$. Takové sféry Milnor nazval *exotické*. Dnes se tento pojem běžně používá.

Abychom mohli formulovat Milnorův výsledek přesněji, zopakujme si nejprve základní pojmy diferenciální topologie. Připomeňme, že *atlas* $\mathscr{A}$ na topologickém prostoru X je tvořen otevřeným pokrytím $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ prostoru X indexovaným nějakou množinou A, spolu se systémem homeomorfismů $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ otevřených podmnožin $U_\alpha \subset X$ na otevřené podmnožiny eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$. Prostor X si můžeme představit jako krajinu pokrytou souborem map $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sestavených do zeměpisného atlasu. Indexující množina A čísluje stránky tohoto atlasu a mapující zobrazení $\phi_\alpha : U_\alpha \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ popisují, jak jsou příslušné části zemského povrchu zakresleny na mapy atlasu $\mathscr{A}$. Povšimněme si, že topologický prostor X s atlasem $\mathscr{A}$ je podle definice lokálně homeomorfní prostoru $\mathbb{R}^n$. Tvoří tedy *n-rozměrnou topologickou varietu*.[5]

[4]Poincarého domněnce jsou v PMFA věnovány články [2] a [15].

[5]Obvykle se v definici topologické variety navíc předpokládá, že X je Hausdorffův prostor se spočetnou bází. Tento předpoklad je v našich příkladech splněn automaticky.



Obr. 9.2. Atlas $\mathscr{A}_0$ pokrývá kružici $\mathbb{S}^1$ čtyřmi otevřenými polokružnicemi. Mapující zobrazení jsou homeomorfizmy na otevřené podintervaly $\mathbb{R}^1$.

Příkladem je standardní atlas $\mathscr{A}_0$ sféry $\mathbb{S}^n$. Jeho indexující množina má $2(n+1)$-prvků,

$$A := \{(h,0),\ldots,(h,n),(d,0),\ldots,(d,n)\},$$

kde pro $0 \leq i \leq n$ je

$$U_{(h,i)} := \big\{(x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{S}^n;\ x_i > 0\big\} \ \text{ a } \ U_{(d,i)} := \big\{(x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{S}^n;\ x_i < 0\big\}.$$

Označme π_i ortogonální projekci prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ do nadroviny $\big\{(x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x_i = 0\big\}$, tedy zobrazení vynechávájící $i$tou souřadnici:

$$\pi_i(x_0,\ldots,x_n) := (x_0,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ pro } (x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Mapující zobrazení $\phi_{(h,i)}$, resp. $\phi_{(d,i)}$ atlasu $\mathscr{A}_0$ jsou restrikce projekcí π_i na $U_{(h,i)}$, resp. $U_{(d,i)}$. Vše ozřejmí obrázek 9.2 ilustrující případ kružnice $\mathbb{S}^1$. Čtenář snadno nahlédne, že standardní atlas pro dvojrozměrnou sféru $\mathbb{S}^2$ má šest map: pro horní a dolní otevřenou polosféru, pro přední a zadní otevřenou polosféru a pro levou a pravou otevřenou polosféru. Všechny tyto oblasti jsou prostřednictvím mapujících zobrazení homeomorfní s otevřeným jednotkovým kruhem v rovině $\mathbb{R}^2$.

Vraťme se k atlasu $\mathscr{A}$ na topologické varietě X. Pro každou dvojici indexů $\alpha,\beta \in A$ s neprázdným průnikem $U_\alpha \cap U_\beta$ definujme *přechodové zobrazení* $\phi_{\alpha\beta} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ předpisem $\phi_{\alpha\beta}(x) := \phi_\beta\big(\phi_\alpha^{-1}(x)\big)$ pro $x \in \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, viz diagram:

$$\begin{tikzcd} & U_\alpha \cap U_\beta \arrow[dl, "\phi_\alpha"'] \arrow[dr, "\phi_\beta"] & \\ \mathbb{R}^n \supset \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[rr, "\phi_{\alpha\beta}"] & & \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n. \end{tikzcd}$$

Přechodová zobrazení jsou zobrazeními mezi otevřenými podmnožinami $\mathbb{R}^n$. Atlas $\mathscr{A}$ je *hladký*, jestliže všechny jeho přechodové funkce jsou hladké v obvyklém smyslu, tedy mají parciální derivace všech řádů. Každý hladký atlas lze jediným způsobem doplnit do maximálního hladkého atlasu. Říkáme, že tento maximální hladký atlas definuje na X strukturu *hladké variety*.

Hladké atlasy tedy hrají v teorii hladkých variet úlohu báze otevřených množin v teorii topologických prostorů. Podobně jako jedna množina může nést mnoho bází definujících různé topologie, tak stejnou topologickou varietu může pokrývat mnoho různých, navzájem neslučitelných, hladkých atlasů určujících různé hladké struktury.

V analogii se zeměpisným atlasem popisují přechodová zobrazení překrytí jednotlivých map. Zatímco u obecného atlasu se překrývají spojitě, tedy bez „roztržení", u hladkého atlasu navíc požadujeme překrytí bez vzniku hrotů, hran a nadhran. Není těžké ověřit, že standardní altlas $\mathscr{A}_0$ sféry $\mathbb{S}^n$ je hladký. Příslušnou hladkou strukturu nazýváme *standardní hladkou strukturou* sféry $\mathbb{S}^n$.

Uvažujme homeomorfizmus $f : X \to Y$ hladkých variet X a Y s hladkými atlasy $\mathscr{A} = \{\phi_\alpha, U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, resp. $\mathscr{B} = \{\psi_\beta, V_\beta\}_{\beta \in B}$. Říkáme, že f je *hladký*, jestliže je kompozice

$$\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha\big(f^{-1}(V_\beta) \cap U_\alpha\big) \to \psi_\beta(V_\beta)$$

hladké zobrazení otevřených podmnožin $\mathbb{R}^n$ pro každou dvojici $\alpha \in A$, $\beta \in B$, pro kterou je průnik $f(U_\alpha) \cap V_\beta$ neprázdný. Hladký homeomorfizmus s hladkou inverzí se nazývá *difeomorfizmus*. O varietách X a Y pak říkáme, že jsou *difeomorfní*.

Vraťme se nyní k exotické sedmirozměrné sféře. Vyjděme z kartézského součinu $\mathbb{B}^4 \times \mathbb{S}^3$ jednotkové čtyřrozměrné koule se standardní trojrozměrnou sférou a definujme prostor M_3^7 jako kvocient[6]

$$M_3^7 := (\mathbb{B}^4 \times \mathbb{S}^3 \sqcup \mathbb{B}^4 \times \mathbb{S}^3)/\sim$$

disjunktního sjednocení dvou stejných kopií $\mathbb{B}^4 \times \mathbb{S}^3$ podle relace

$$\mathbb{B}^4 \times \mathbb{S}^3 \supset \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \ni (a, b) \sim (a, a^2ba^{-1}) \in \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{B}^4 \times \mathbb{S}^3,$$

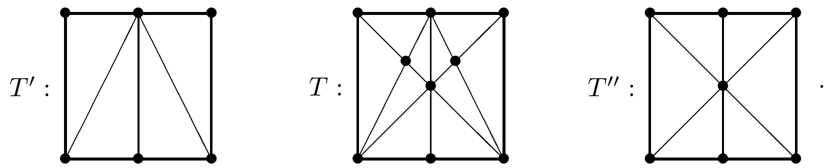
která identifikuje bod (a, b) hranice $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ první kopie $\mathbb{B}^4 \times \mathbb{S}^3$ s bodem (a, a^2ba^{-1}) hranice $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ druhé kopie. Přitom sféru $\mathbb{S}^3$ ztotožňujeme s jednotkovými kvaterniony a výraz a^2ba^{-1} interpretujeme v algebře kvaternionů[7]. Milnor v [9] dokázal následující větu:

Věta. *Prostor M_3^7 je homeomorfní, ne však difeomorfní sedmirozměrné sféře $\mathbb{S}^7$ se standardní hladkou strukturou.*

Volně řečeno, Milnorovu sféru M_3^7 sice můžeme homeomorfně zobrazit na standardní sféru $\mathbb{S}^7$, musíme ji však přitom „pomačkat". Proto překvapí, že existuje homeomorfizmus prostoru M_3^7 na $\mathbb{S}^7$, který je difeomorfizmem všude kromě jediného bodu. Z tohoto důvodu se Milnorovým sférám někdy říká „rohaté sféry". V roce 1963 J. Milnor společně M. A. Kervairem v [5] dokázal, že existuje 28 různých[8] hladkých struktur na $\mathbb{S}^7$. Jinými slovy, na sedmirozměrné sféře existuje 28 hladkých atlasů určujících 28 různých hladkých struktur.

Než uvedeme další výsledek zmíněného článku, připomeňme, že *souvislé sjednocení $X'\#X''$* dvou hladkých n-rozměrných variet je varieta vzniklá vyříznutím malých

[6] V české literatuře se používá nepěkný a nesprávný termín „faktorprostor."
[7] Kvaterniony se v PMFA zabývá např. článek [1]. Podotkněme, že Milnorův původní popis prostoru M_3^7 se formálně liší od našeho. Výsledek je však stejný.
[8] Dvě hladké struktury považujeme za různé, jestliže se na sebe nedají převést homeomorfizmem.



Obr. 9.3. Tři triangulace čtverce.

n-rozměrných koulí z variet X' a X'' a ztotožněním takto vzniklých hraničních sfér. Definujme *monoid hladkých struktur* na n-rozměrné sféře jako soubor tříd difeomorfních orientovaných hladkých variet homeomorfních se sférou $\mathbb{S}^n$. Struktura monoidu je dána operací souvislého sjednocení, přitom standardní n-rozměrná sféra $\mathbb{S}^n$ tvoří jednotku. V práci [5] je dokázáno, že pro $n \neq 3, 4$ je zmíněný monoid konečná abelovská grupa. Její řád je pro $n \leq 18$ uveden v následující tabulce z velké části také převzaté z [5]:

dimenze n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
řád grupy	1	1	1	**?**	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16 256	2	16	16

Dodnes se neví, zdali existují čtyřrozměrné exotické sféry. Proto jsme na odpovídajícím místě ponechali otazník. Tvrzení, že $\mathbb{S}^4$ nese jedinou hladkou strukturu, je známo jako *hladká Poincarého doměnka*, viz [3]. Z mnoha hledisek jsou dimenze 3 a 4 nejobtížnější. Z jiného pohledu o tom v PMFA pojednávají články [2, s. 268] a [6, s. 52].

Poznamenejme, že existují topologické variety nemající *žádnou* hladkou strukturu. První příklad sestrojil v roce 1960 M. A. Kervaire v práci [4] za použití konstrukce, kterou Milnor publikoval o rok dříve v [10].

9.4. Ostatní výsledky

V této kapitole krátce uvedeme některé další Milnorovy výsledky, z prostorových důvodů již bez nároků na vysokou přesnost výkladu.

1) *Hauptvermutung*

Připomeňme, že n-rozměrný *standardní simplex* Δ^n je konvexní obal souřadnicových vektorů $\{e_0, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Můžeme jej také definovat jako množinu

$$\Delta^n := \big\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x_i \geq 0 \text{ pro } 0 \leq i \leq n \text{ a } x_0 + \cdots + x_n = 1\big\}.$$

Tedy Δ^0 je bod, Δ^1 uzavřený interval, Δ^2 trojúhelník a Δ^3 je čtyřstěn. Topologický prostor X je *triangulovatelný*, jestliže je možné jej pokrýt standardními simplexy tak, aby jejich průniky byly buď prázdné, nebo byly opět simplexem. Takové pokrytí se nazývá *triangulací* prostoru X. Daný topologický prostor může mít několik triangulací, jak vidíme na obrázku 3 ukazujícím tři různé triangulace čtverce.

Triangulace T' sestává ze čtyř 2-simplexů, devíti 1-simplexů a šesti 0-simplexů. Triangulace T má deset 2-simplexů, osmnáct 1-simplexů a devět 0-simplexů. Konečně triangulace T'' je tvořena šesti 2-simplexy, dvanácti 1-simplexy a sedmi 0-simplexy.

Triangulace T_1 prostoru X je *zjemněním* triangulace T_2, jestliže je každý simplex triangulace T_1 obsažen v nějakém simplexu triangulace T_2. Na našem obrázku je triangulace T společným zjemněním triangulací T' a T''. *Hauptvermutung* (česky hlavní domněnka) geometrické topologie tvrdí, že libovolné dvě triangulace stejného topologického prostoru mají společné zjemnění.

V [11] Milnor ukázal, že kónus nad kartézským součinem čočkového prostoru[9] s hranicí třírozměrného simplexu má dvě konečné triangulace bez společného zjemnění. Tím sestrojil *protipříklad* k Hauptvermutungu. Povšimněme si, že tento výsledek má podobnou příchuť jako konstrukce exotické sféry. Opět jsme v situaci, kdy daný topologický prostor nese jemnější strukturu (hladký atlas v předchozím, triangulace v tomto případě) a ptáme se, nakolik je tato jemná struktura determinována topologií. Výsledky uvedené ve zbytku této kapitoly publikoval J. Milnor v knize [12].

2) *Milnorovo číslo*

Uvažujme komplexní funkci g v n komplexních proměnných, holomorfní na nějakém otevřeném okolí bodu $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$. Připomeňme, že bod ξ je *singulárním bodem* funkce g, jestliže se v něm nulují parciální derivace prvního řádu ve všech směrech. V opačném případě říkáme, že ξ je *regulární*. Singulární bod ξ je *izolovaný*, jestliže je jediným singulárním bodem v nějakém svém okolí. Konečně, singulární bod ξ je *degenerovaný*, jestliže se v něm anuluje determinant *Hessiánu* funkce g, což je matice druhých derivací

$$\left[\frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j}\right]_{1 \le i,j \le n}.$$

Následující výklad zaměříme na funkce se singulárním bodem v počátku $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0)$ a s nulovou funkční hodnotou v tomto bodě. Případ obecného singulárního bodu a obecné funkční hodnoty převedeme na tento speciální případ posunutím.

Označme tedy $\mathcal{O}$ okruh holomorfních funkcí f definovaných na nějakém otevřeném okolí počátku $\mathbf{0}$ prostoru $\mathbb{C}^n$ a takových, že $f(0, \ldots, 0) = 0$. Pro každou $f \in \mathcal{O}$ vezměme ideál J_f algebry $\mathcal{O}$ generovaný parciálními derivacemi funkce f a označme $\mathcal{A}_f := \mathcal{O}/J_f$ kvocientovou algebru. *Milnorovo číslo* $\mu(f)$ funkce f v bodě $\mathbf{0}$ je komplexní dimenze komplexního vektorového prostoru $\mathcal{A}_f$,

$$\mu(f) := \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}_f).$$

Z definice plyne, že $\mu(f)$ je buď celé nezáporné číslo, nebo nekonečno. Přitom $\mu(f) = 0$, pokud je $\mathbf{0}$ regulárním bodem funkce f a $\mu(f) = 1$, pokud je $\mathbf{0}$ nedegerovanou singularitou. Dále platí, že $\mu(f)$ je konečné právě tehdy, když je $\mathbf{0}$ izolovaným singulárním bodem.

Důležitost Milnorova čísla tkví v jeho alternativních interpretacích. Předpokládejme, že $\mathbf{0}$ je izolovaný singulární bod funkce f. Pro $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ definujme perturbaci f_a funkce f předpisem

$$f_a(\xi_1, \ldots, \xi_n) := f(\xi_1, \ldots, \xi_n) + a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n.$$

Ukazuje se, že pro dostatečně malá a se izolovaný singulární bod $\mathbf{0}$ funkce f rozpadá na izolované *nedegenerované* singulární body perturbace f_a. Jejich počet je roven $\mu(f)$.

[9] Čočkový prostor (angl. lens space) je kvocient třírozměrné sféry $\mathbb{S}^3$ podle akce specifické cyklické grupy.

Milnorovo číslo má i topologickou charakterizaci. Symbolem $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$ označme $(2n-1)$-rozměrnou sféru v $\mathbb{C}^n$ o poloměru ϵ se středem v počátku. Pokud opět předpokládáme, že $\mathbf{0}$ je izolovaný singulární bod funkce f, pak pro dostatečně malá ϵ předpis

$$\psi(\xi) := \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(\xi), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(\xi)\right)}{\sqrt{|\frac{\partial f}{\partial z_1}(\xi)|^2 + \dots + |\frac{\partial f}{\partial z_n}(\xi)|^2}}$$

definuje spojité zobrazení $\psi : \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \to \mathbb{S}^{2n-1}$. Milnorovo číslo $\mu(f)$ je rovno *stupni* tohoto zobrazení. To je homotopický invariant vyjadřující, kolikrát ψ „omotá“ sféru $\mathbb{S}^{2n-1}$ sférou $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1}$.

3) *Milnorova fibrace*

Připomeňme, že lokálně triviální hladká *fibrace* $p : E \to B$ je zobrazení hladkých variet, které je lokálně projekcí $B \times F \to B$, kde F je hladká varieta nazývaná *fibrem* p. Přesnou definici lokality nebudeme uvádět. Je formulována pomocí otevřeného pokrytí variety B a má podobný charakter jako definice hladkého atlasu z kapitoly 9.3.

Předpokládejme, že $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ je nenulový komplexní polynom splňující $f(0, \dots, 0) = 0$. Označme $\mathfrak{Z}_f$ nulovou množinu polynomu f,

$$\mathfrak{Z}_f := \left\{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n;\ f(z_1, \dots, z_n) = 0\right\}.$$

Tedy $\mathfrak{Z}_f$ je komplexní nadplocha dimenze $n-1$ obsahující počátek $\mathbf{0}$. *Argument* funkce f je definován v bodech $\xi \in \mathbb{C}^n$ neležících v $\mathfrak{Z}_f$ předpisem

$$\mathrm{Arg}_f(\xi) := \frac{f(\xi)}{|f(\xi)|} \in \mathbb{S}^1.$$

Milnor dokázal, že pro dostatečně malá ϵ je restrikce

$$\mathrm{Arg}_f : \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \setminus \mathfrak{Z}_f \to \mathbb{S}^1$$

lokálně triviální hladká fibrace, jejíž fíbr je varieta dimenze $2n-2$. V případě, že $\mathbf{0}$ je izolovaný singulární bod, má tento fíbr homotopický typ[10] sjednocení $\mathbb{S}^{n-1} \vee \dots \vee \mathbb{S}^{n-1}$ se ztotožněnými bázovými body určitého počtu standardních $(n-1)$-rozměrných sfér.

Na závěr dovolte osobní poznámku druhého autora. Se jménem John Milnor jsem se seznámil jako student díky známé učebnici [14], kterou Milnor napsal společně s Jimem Stasheffem. Její četba byla požitek, stejně jako četba všeho, na čem se Milnor podílel. S Jimem jsem později napsal několik článků a monografii [7]. Johna Milnora jsem osobně poznal na konferenci v Princetonu v roce 1996.

L i t e r a t u r a

[1] Bečvář, J.: *150 let od objevu kvaternionu.* PMFA *38* (1993), 305–317.

[2] Cipra, B.: *Jeden ze sedmi problémů tisíciletí se přibližuje k úplnému vyřešení.* PMFA *55* (2010), 265–277.

[10] Zhruba řečeno, topologické prostory mají stejný homotopický typ, pokud se liší spojitou deformací.

[3] Freedman, M., Gompf, R., Morrison, S., Walker, K.: *Man and machine thinking about the smooth 4-dimensional Poincaré conjecture.* Quantum Topology *1(2)* (2010), 171–208.

[4] Kervaire, M. A.: *A manifold which does not admit any differentiable structure.* Coo-ment. Math. Helv. *34* (1960), 257–270.

[5] Kervaire, M. A., Milnor, J.: *Groups of homotopy spheres: I.* Ann. of Math. (2) *77(3)* (1963), 504–537.

[6] Křížek, M., Šolc, J.: *Od Keplerových mozaik k pětičetné symetrii.* PMFA *54* (2009), 41–56.

[7] Markl, M., Shnider, S., Stasheff, J.: *Operads in algebra, topology and physics.* Math. Surveys and Monographs *96*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island 2002.

[8] Milnor, J.: *On the total curvature of knots.* Ann. of Math. (2) *52(2)* (1950), 248–257.

[9] Milnor, J.: *On manifolds homeomorphic to the* 7*-sphere.* Ann. of Math. (2), *64(2)* (1956), 399–405.

[10] Milnor, J.: *Differentiable structures on spheres.* Amer. J. Math. *81* (1959), 962–972.

[11] Milnor, J.: *Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct.* Ann. of Math. (2) *74(3)* (1961), 575–590.

[12] Milnor, J.: *Singular points of complex hypersurfaces.* Ann. of Math. Stud. *61*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey 1968.

[13] Milnor, J.: *Nobelova cena pro Johna Nashe.* PMFA *41* (1996), 169–179.

[14] Milnor, J., Stasheff, J.: *Characteristic classes.* Ann. of Math. Stud. *76*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey 1974.

[15] Smale, S.: *Příběh Poincarého hypotézy ve vyšších dimenzích.* PMFA *36* (1991), 38–49.