ISBN 978-80-7015-014-6
EAN 9788070150146

$$e = 2+\sqrt{5} - 2\sqrt{2+\sqrt{5}} \quad , \quad e = 2+\sqrt{5} + 2\sqrt{2+\sqrt{5}}$$

desquelles la dernière valeur

$$e = 2+\sqrt{5} + 2\sqrt{2+\sqrt{5}} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)^2$$

appartient à la question, car l'équation

$1 = e^2 \varphi^2(\frac{\omega}{10}) \cdot \varphi^2(\frac{3\omega}{10})$ nous montre que e doit

être plus grand que l'unité.

Connaissant e on trouve la valeur des quantités

$\varphi(\frac{\omega}{5})$ et $\varphi(\frac{2\omega}{5})$ comme il suit :

Nous avons

$$1 = e^2 \cdot P^2 = e^2 \cdot \frac{f^2(\frac{\omega}{5}) \cdot f^2(\frac{2\omega}{5})}{F^2(\frac{\omega}{5}) \cdot F^2(\frac{2\omega}{5})}$$

or en faisant $\varphi(\frac{\omega}{5}) = \alpha$ et $\varphi(\frac{2\omega}{5}) = \beta$ on aura

$$f^2(\tfrac{\omega}{5}) = 1-\alpha^2 \; ; \quad f^2(\tfrac{2\omega}{5}) = 1-\beta^2$$

$$F^2(\tfrac{\omega}{5}) = 1+e^2\alpha^2 \; , \quad F^2(\tfrac{2\omega}{5}) = 1+e^2\beta^2$$

donc :

$$(1+e^2\alpha^2)(1+e^2\beta^2) = e^2(1-\alpha^2)(1-\beta^2)$$

$$1 + e^2(\alpha^2+\beta^2) + e^4\alpha^2\beta^2 = e^3 - e^3(\alpha^2+\beta^2) + e^3\alpha^2\beta^2$$

$$e^3-1 - e^3(e-1) \cdot \alpha^2\beta^2 = e^2(e+1) \cdot (\alpha^2+\beta^2)$$

or nous avons trouvé plus haut $\alpha^2\beta^2 = \frac{\sqrt{5}}{e^2}$

donc

$$e^3-1 - e(e-1)\sqrt{5} = e^2(e+1)\{\alpha^2+\beta^2\}$$

On connait donc $\alpha^2\beta^2$ et $\alpha^2+\beta^2$ et par suite α^2 et β^2 par la résolution d'une équation du second degré. On a donc aussi la valeur de y, qui satisfait à l'équation.