

# Life and work of Vojtěch Jarník

---

Vojtěch Jarník

Fascimile of "Sur le produit de composition de deux fonctions continues"

In: Břetislav Novák (editor): Life and work of Vojtěch Jarník. (French). Praha: Society of Czech Mathematicians and Physicists, 1999. pp. 161--167.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402258>

## Terms of use:

© Society of Czech Mathematicians and Physicists

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

## Sur le produit de composition de deux fonctions continues

par

V. JARNÍK (Praha).

Par  $I$  nous allons désigner ou bien l'intervalle fermé  $\langle 0, t_0 \rangle$ , où  $0 < t_0 < +\infty$ , ou bien l'intervalle  $\langle 0, +\infty \rangle$ . L'ensemble de toutes les fonctions réelles et continues dans  $I$  sera désigné par  $C(I)$ . On définit le produit de composition  $z = xy$  de deux fonctions  $x \in C(I)$ ,  $y \in C(I)$  par l'équation

$$z(t) = \int_0^t x(t-\tau)y(\tau) d\tau \quad (t \in I).$$

On a  $z \in C(I)$ , car

$$(1) \quad \begin{aligned} & z(t+h) - z(t) \\ &= \int_t^{t+h} x(t+h-\tau)y(\tau) d\tau + \int_0^t (x(t+h-\tau) - x(t-\tau))y(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

I. M. MIKUSIŃSKI a posé la question, s'il existe deux fonctions  $x \in C(I)$ ,  $y \in C(I)$  telles que la fonction  $z = xy$  soit dépourvue de dérivée dans chaque point intérieur de  $I$ . Je vais donner une réponse affirmative à cette question.

Lemme 1. Soit  $x \in C(I)$ ,  $y \in C(I)$ ,  $z = xy$ ; supposons qu'il existe trois nombres  $K, L_1, L_2$  tels que

$$(2) \quad |x(t_1) - x(t_2)| \leq K|t_1 - t_2|, \quad |x(t_1)| \leq L_1, \quad |y(t_1)| \leq L_2$$

pour  $t_1 \in I$ ,  $t_2 \in I$ ; on a alors, pour  $t \in I$ ,  $t+h \in I$ ,

$$(3) \quad |z(t+h) - z(t)| \leq (L_1 + Kt)L_2|h|.$$

Démonstration. Voir (1).

Lemme 2. Soit  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Définissons une fonction  $x = x_{a,b}$ , continue dans l'intervalle  $(-\infty, +\infty)$ , de la manière suivante:

$$\begin{aligned} x_{a,b}(t) &= 2abt - \frac{1}{2}b && \text{pour } 0 \leq t \leq 1/2a; \\ x_{a,b}(-t) &= x_{a,b}(t), && x_{a,b}(t) = x_{a,b}(t+1/a), \end{aligned}$$

donc

$$(4) \quad \text{Max } |x_{a,b}(t)| = \frac{1}{2}b, \quad |x_{a,b}(t_1) - x_{a,b}(t_2)| \leq 2ab|t_1 - t_2|.$$

Posons  $z = x_{a,b} \cdot x_{a,b}$ . Alors, si  $q$  est un nombre naturel, on a

$$(5) \quad z\left(\frac{q}{2a}\right) = (-1)^q \frac{qb^2}{24a}.$$

Démonstration. On voit facilement que  $x(1/2a - t) = -x(t)$ . Soit  $k \geq 0$  un nombre entier. Alors

$$\begin{aligned} z\left(\frac{2k}{2a}\right) &= \int_0^{k/a} x\left(\frac{k}{a} - \tau\right) x(\tau) d\tau = \int_0^{k/a} x^2(\tau) d\tau \\ &= 4k \int_0^{1/4a} x^2(\tau) d\tau = \frac{2kb^2}{24a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z\left(\frac{2k+1}{2a}\right) &= \int_0^{(2k+1)/(2a)} x\left(\frac{2k+1}{2a} - \tau\right) x(\tau) d\tau = \int_0^{(2k+1)/(2a)} x\left(\frac{1}{2a} - \tau\right) x(\tau) d\tau \\ &= - \int_0^{(2k+1)/(2a)} x^2(\tau) d\tau = -(4k+2) \int_0^{1/4a} x^2(\tau) d\tau = -\frac{(2k+1)b^2}{24a}. \end{aligned}$$

Lemme 3. Soit  $t$  un nombre,  $z$  une fonction réelle. Supposons qu'il existe deux suites de nombres  $v_n, w_n$  telles que

$$v_n \leq t \leq w_n, \quad v_n < w_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = t,$$

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(w_n) - z(v_n)}{w_n - v_n} = +\infty.$$

Alors

$$(7) \quad \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h} = +\infty.$$

On a un résultat analogue avec  $-\infty$  au lieu de  $+\infty$ .

Démonstration. Evidente et bien connue.

Théorème 1. Il existe une fonction  $x$ , continue dans  $\langle 0, +\infty \rangle$  et telle que la fonction  $z = xx$  satisfasse, pour chaque  $t > 0$ , aux équations

$$(8) \quad \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h} = +\infty, \quad \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h} = -\infty.$$

Démonstration. Posons

(9)  $c_1=2, c_{n+1}=c_n^3=2^{3^n}; y_n=x_{a,b},$  où  $a=c_n^3, b=1/c_n$   
 ( $x_{a,b}$  est la fonction du Lemme 2). On a donc

$$(10) \quad |y_n(t_1)| \leq 1/2c_n, \quad |y_n(t_2) - y_n(t_1)| \leq 2c_n^2 |t_2 - t_1|,$$

$$(11) \quad \sum_{k=1}^n c_k < 2c_n, \quad \sum_{k=n}^{\infty} 1/c_k < 2/c_n.$$

La série  $x(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots$  est donc absolument et uniformément convergente. En posant  $z_{k,m} = y_k y_m = z_{m,k}, z = xx$  (produit de composition), on a pour tout  $t \geq 0$

$$(12) \quad z(t) = \sum_{m,k=1}^{\infty} z_{m,k}(t).$$

Soit  $t$  un nombre positif quelconque, qui sera fixe dans ce qui suit. A chaque nombre naturel  $n$  suffisamment grand, on peut faire correspondre un nombre *pair*  $p_n > 0$  et un nombre *impair*  $q_n > 0$ , tels que

$$(13) \quad r_n = \frac{p_n}{2c_n^3} \leq t < \frac{p_n+2}{2c_n^3}, \quad v_n = \frac{q_n}{2c_n^3} \leq t < \frac{q_n+2}{2c_n^3}.$$

Posons encore

$$s_n = \frac{p_n+3}{2c_n^3} > t, \quad w_n = \frac{q_n+3}{2c_n^3} > t,$$

d'où

$$\lim r_n = \lim s_n = \lim v_n = \lim w_n = t.$$

D'après (5) on a alors

$$z_{n,n}(r_n) > 0, \quad z_{n,n}(v_n) < 0,$$

$$z_{n,n}(s_n) = -\frac{p_n+3}{24c_n^5} < -\frac{t}{12c_n^2}, \quad z_{n,n}(w_n) > \frac{t}{12c_n^2};$$

donc

$$(14) \quad \frac{z_{n,n}(s_n) - z_{n,n}(r_n)}{s_n - r_n} < -\frac{tc_n}{18}, \quad \frac{z_{n,n}(w_n) - z_{n,n}(v_n)}{w_n - v_n} > \frac{tc_n}{18}.$$

Si  $k < n, m > 0$ , on a d'après (10) et d'après le lemme 1

$$\left| \frac{z_{k,m}(s_n) - z_{k,m}(r_n)}{s_n - r_n} \right| \leq \left( \frac{1}{2c_k} + 2c_k^2 t \right) \frac{1}{2c_m} \leq \frac{1}{4c_m c_k} + \frac{c_k c_{n-1} t}{c_m}.$$

La somme de toutes ces expressions pour  $k=1,2,\dots,n-1$ ,  $m=1,2,\dots$  est, d'après (9) et (11), plus petite que

$$(15) \quad \frac{1}{4} + 2c_{n-1}^2 t = \frac{1}{4} + 2c_n^{2/3} t.$$

Si  $k > n$ ,  $m > 0$ , on a d'après (10)

$$\left| \frac{z_{k,m}(s_n) - z_{k,m}(r_n)}{s_n - r_n} \right| \leq \frac{2c_n^3}{3} \cdot \frac{1}{4c_k c_m} (s_n + r_n) < \frac{c_n^3(t+1)}{3c_k c_m}.$$

La somme de toutes ces expressions pour  $k=n+1, n+2,\dots$ ,  $m=1,2,\dots$ , est, d'après (9) et (11), plus petite que

$$(16) \quad \frac{2}{3} \frac{c_n^3}{c_{n+1}} (t+1) = \frac{2}{3} (t+1).$$

De (15), (16), on conclut immédiatement que

$$(17) \quad \left| \frac{z(s_n) - z(r_n)}{s_n - r_n} - \frac{z_{n,n}(s_n) - z_{n,n}(r_n)}{s_n - r_n} \right| < \frac{1}{2} + 4c_n^{2/3} t + \frac{4}{3} (t+1) < \frac{1}{36} c_n t,$$

si  $n$  est assez grand; et l'on a, évidemment, la même relation avec  $v_n, w_n$  au lieu de  $r_n, s_n$ . Mais (14) et (17) donnent

$$\frac{z(s_n) - z(r_n)}{s_n - r_n} < -\frac{1}{36} c_n t \rightarrow -\infty \quad \text{pour } n \rightarrow \infty,$$

et d'une manière analogue

$$\frac{z(w_n) - z(v_n)}{w_n - v_n} > \frac{1}{36} c_n t \rightarrow +\infty \quad \text{pour } n \rightarrow \infty.$$

L'application du Lemme 3 achève la démonstration du Théorème 1.

2. Je vais donner encore un autre théorème de ce genre. Pour simplifier, je pose dans la suite  $I = \langle 0, 1 \rangle$ ,  $C(I) = C$ . Nous introduisons dans  $C$  la métrique habituelle:

$$\rho(x_1, x_2) = \text{Max}_{0 \leq t \leq 1} |x_1(t) - x_2(t)|.$$

Le produit combinatoire  $C^2 = C \times C$  est l'ensemble de tous les couples  $[x, y]$ , où  $x \in C$ ,  $y \in C$ . La métrique dans  $C^2$  soit donnée par la formule

$$\rho_2([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = \text{Max}(\rho(x_1, y_1), \rho(x_2, y_2)).$$

Lemme 4. Soit  $x_n \in C$ ,  $y_n \in C$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ ; alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = xy$ .

Démonstration. Pour  $0 \leq t \leq 1$ , on a

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t (x_n(t-\tau) y_n(\tau) - x(t-\tau) y(\tau)) d\tau \right| \\ & \leq \int_0^t |x_n(t-\tau)| |y_n(\tau) - y(\tau)| d\tau + \int_0^t |y(\tau)| |x_n(t-\tau) - x(t-\tau)| d\tau \\ & \leq (\varrho(x, 0) + \varrho(x_n, x)) \varrho(y_n, y) + \varrho(y, 0) \varrho(x_n, x), \end{aligned}$$

et la dernière expression est indépendante de  $t$  et tend vers zéro.

Théorème 2. Il existe un ensemble  $M \subset C^2$  jouissant des propriétés suivantes:

- 1°  $C^2 - M$  est un ensemble de première catégorie dans  $C^2$  (donc  $M \neq 0$ , car  $C^2$  est complet);
- 2° si  $x \in M$ ,  $y \in M$ ,  $xy = z$ , alors on a (8) pour chaque  $t$  de l'intervalle ouvert  $(0, 1)$ .

Démonstration. Pour chaque nombre entier  $n > 0$ , soit  $G_n$  l'ensemble de tous les points  $[x, y] \in C^2$  jouissant de la propriété suivante: à chaque  $t \in \langle 1/n, 1 - 1/n \rangle$  correspondent deux nombres  $r, s$  tels que l'on ait (en posant  $z = xy$ )

$$(18) \quad t - \frac{1}{n} \leq r \leq t \leq s \leq t + \frac{1}{n}, \quad r < s, \quad \frac{z(s) - z(r)}{s - r} > n.$$

Posons  $M_1 = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$  et soit  $M_2$  l'ensemble de tous les points  $[x, y]$  tels que  $[-x, y] \in M_1$ . Soit  $M = M_1 M_2$ . D'après (18) et d'après le Lemme 3, il est évident que  $M$  possède la propriété 2°. Pour achever la démonstration du théorème 2, il suffit donc de démontrer les deux propositions suivantes:

- I.  $G_n$  est ouvert, c'est-à-dire que  $F_n = C^2 - G_n$  est fermé dans  $C^2$ .
- II.  $G_n$  est dense dans  $C^2$ .

En effet, I et II entraînent que  $C^2 - M_1$  est de première catégorie; on voit immédiatement qu'alors  $C^2 - M_2$  est, lui aussi, de première catégorie; donc, il en est de même de l'ensemble

$$C^2 - M = (C^2 - M_1) + (C^2 - M_2).$$

Démonstration de I. Soit donné un nombre entier  $n > 0$ . Soit  $[x_\nu, y_\nu] \in F_n$  pour  $\nu = 1, 2, \dots$  et soit  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} [x_\nu, y_\nu] = [x, y]$ . Il faut démontrer que  $[x, y] \in F_n$ .

Posons  $x_\nu, y_\nu = z_\nu$ ,  $xy = z$ . D'après la définition de  $G_n$  et de  $F_n$ , il existe, pour chaque  $\nu$ , un nombre  $t_\nu \in \langle 1/n, 1-1/n \rangle$  jouissant de la propriété suivante: chaque couple de nombres  $r_\nu, s_\nu$ , tel que l'on ait

$$(19) \quad t_\nu - \frac{1}{n} \leq r_\nu \leq t_\nu \leq s_\nu \leq t_\nu + \frac{1}{n}, \quad r_\nu < s_\nu,$$

satisfait à l'inégalité

$$(20) \quad \frac{z_\nu(s_\nu) - z_\nu(r_\nu)}{s_\nu - r_\nu} \leq n.$$

En passant à une suite partielle, on peut supposer qu'il existe  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\nu = t$ . On a  $t \in \langle 1/n, 1-1/n \rangle$ . Prenons deux nombres  $r, s$  tels que

$$(21) \quad t - \frac{1}{n} \leq r \leq t \leq s \leq t + \frac{1}{n}, \quad r < s,$$

et définissons les nombres  $r_\nu, s_\nu$  par les équations  $r_\nu - r = s_\nu - s = t_\nu - t$ . On a donc (19), donc (20). Mais, en vertu du Lemme 4, on a (car  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} r_\nu = r$ ,  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} s_\nu = s$ )

$$\frac{z(s) - z(r)}{s - r} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{z_\nu(s_\nu) - z_\nu(r_\nu)}{s_\nu - r_\nu} \leq n.$$

Ceci étant vrai pour chaque couple  $r, s$  satisfaisant aux conditions (21), on a  $[x, y] \in C^2 - G_n = F_n$ .

Démonstration de II. Soit donné un nombre  $n > 0$  entier. Soit  $[\xi, \eta] \in C^2$ ; soit  $0 < \varepsilon < 1$ . Il faut démontrer l'existence d'un point  $[x, y] \in G_n$  tel que  $\varrho(x, \xi) < \varepsilon$ ,  $\varrho(y, \eta) < \varepsilon$ .

Il existe deux fonctions  $\xi_1 \in C$ ,  $\eta_1 \in C$  avec  $\varrho(\xi, \xi_1) < \frac{1}{2}\varepsilon$ ,  $\varrho(\eta, \eta_1) < \frac{1}{2}\varepsilon$ , dont les diagrammes sont composés d'un nombre fini de segments de droites. Choisissons  $\xi_1, \eta_1$  de cette façon. On peut alors choisir un nombre  $A > 1$  tel que

$$(22) \quad \begin{aligned} &|\xi_1(t)| \leq A, \quad |\eta_1(t)| \leq A, \quad |\xi_1(t) - \xi_1(u)| \leq A|t - u|, \\ &|\eta_1(t) - \eta_1(u)| \leq A|t - u| \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq u \leq 1. \end{aligned}$$

Choisissons ensuite un nombre entier  $m$  tel que

$$(23) \quad \frac{m\varepsilon^2}{30n} - 4A^2 > n, \quad \text{donc} \quad m > 30n,$$

et posons  $x = \xi_1 + x_{m,\varepsilon}$ ,  $y = \eta_1 + x_{m,\varepsilon}$  (où  $x_{m,\varepsilon}$  est la fonction du Lemme 2). On a  $|x_{m,\varepsilon}(t)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ , donc  $\varrho(\xi, x) < \varepsilon$ ,  $\varrho(\eta, y) < \varepsilon$ . Il suffit donc de démontrer que  $[x, y] \in G_n$ .

Posons  $xy = z$ ,  $\xi_1 \eta_1 = z_1$ ,  $\xi_1 x_{m,\varepsilon} = z_2$ ,  $\eta_1 x_{m,\varepsilon} = z_3$ ,  $x_{m,\varepsilon} x_{m,\varepsilon} = z_4$ , donc  $z = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ . Si  $0 \leq t \leq 1$ ,  $0 \leq u \leq 1$ ,  $t \neq u$ , on a, d'après le Lemme 1,

$$(24) \quad \left| \sum_{i=1}^3 \frac{z_i(t) - z_i(u)}{t - u} \right| \leq 2A \cdot A + 2A \cdot \frac{1}{2} \varepsilon + 2A \cdot \frac{1}{2} \varepsilon < 4A^2.$$

Soit maintenant  $1/n \leq t \leq 1 - 1/n$ . Choisissons  $r, s$  comme il suit. Il existe un nombre entier  $k$  tel que

$$\frac{2k+1}{2m} \leq t < \frac{2k+3}{2m};$$

on a  $k > 0$ , car  $3/2m < 1/n \leq t$ ; posons

$$r = \frac{2k+1}{2m}, \quad s = \frac{2k+6}{2m},$$

donc  $0 < \text{Max}(s-t, t-r) \leq s-r = 5/2m < 1/n$ , d'où  $0 < r \leq t < s < 1$ . Le Lemme 2 donne

$$(25) \quad \frac{z_4(s) - z_4(r)}{s-r} = \varepsilon^2 \left( \frac{2k+6}{24m} + \frac{2k+1}{24m} \right) \cdot \frac{2m}{5} > \varepsilon^2 \cdot \frac{t}{12} \cdot \frac{2m}{5} \geq \frac{m\varepsilon^2}{30n}.$$

Or, (24), (25), (23) donnent

$$\frac{z(s) - z(r)}{s-r} > \frac{m\varepsilon^2}{30n} - 4A^2 > n,$$

ce qui démontre que  $[x, y] \in G_n$ .

(Reçu par la Rédaction le 2. 5. 1950).