Úvod.

Z prvního ročníku znáte některé logické operace, jako je negace výroku, implikace (z A plyne B) atd. Zopakujme to stručně a připojme některé doplňky. Slovem "výrok" rozumíme tvrzení, které "má smysl", tj. je buďto pravdivé nebo nepravdivé. Například $3 < 5$ (slovy: tři je menší než pět) je výrok, a to pravdivý; $3 > 5$ je rovněž výrok, a to nepravdivý. Naproti tomu nesmyslné spojení slov nenazýváme výrokem. Také např. věta tázací nebo rozkazovací (Kde jsi byl? Přines mi vodu!) není výrokem v našem smyslu. Místo: výrok je pravdivý - nepravdivý, budeme také říkat, že platí - neplatí. Negací výroku A (znak *non* A) nazýváme výrok, který má opačnou "pravdivostní hodnotu" než výrok A. To znamená, že je-li A pravdivý, je *non* A nepravdivý, je-li A nepravdivý, je *non* A pravdivý výrok. K libovolnému výroku A vždy mohu sestrojit jeho negaci tvrzením "není pravda, že A".

Máme-li dva výroky A, B, jsou možné tyto čtyři případy:

I. A platí, B platí;
II. A platí, B neplatí;
III. A neplatí, B platí;
IV. A neplatí, B neplatí.

Zavedeme nyní nové výroky sestrojené z A, B. Výrok "A a B" bude znamenat tvrzení, že platí A i B. Je to tedy výrok, který platí v případě I, neplatí v ostatních případech. Budeme jej zapisovat latinskou spojkou: A *et* B. Výrok "buďto A nebo B" bude znamenat tvrzení, že platí aspoň jeden z výroků A, B. Je to tedy výrok, který platí v případech I, II, III, neplatí v případě IV. Budeme jej zapisovat: A *vel* B.[1)]

Další výrok je "A implikuje B", znak $A \Rightarrow B$. Tím rozumíme výrok, který tvrdí, že nenastává případ II (tj. případ, kdy "premisa" A platí a "závěr" neboli "these" B neplatí). Implikace tedy platí tehdy a jen tehdy, když buďto A neplatí nebo B platí. Tedy lze implikaci $A \Rightarrow B$ psát také: (*non* A) *vel* B, takže se implikace dá psát pomocí "non" a "vel". Přesto se implikace zavádí jako zvláštní operace, protože se velmi často vyskytuje. Historický vývoj způsobil, že se implikace $A \Rightarrow B$ často vyslovuje slovy "z A plyne B" nebo "platí-li A, platí B", "je-li A, je B" apod. Musíme však přitom přesně dbát definice implikace. Například implikace "je-li $2 \times 2 = 5$, je Vác-

---

1) V češtině se užívá v běžné řeči slov "buďto - anebo" ve dvojím smyslu. Latina má dvojí výraz: vel a aut - aut. Řekneme-li: "Student vyřešil úlohu velmi vtipně; buďto je velmi nadaný nebo se s touto úlohou už někde setkal", jistě nemyslíme na to, že by se tyto dvě možnosti vylučovaly. V tomto případě se v latině užije slova vel. Řekneme-li však: "Dnes večer buďto zůstanu doma nebo půjdu do divadla", jde zřejmě o dvě možnosti, které se vylučují. Zde by se v latině užilo slov aut - aut.

lav papežem" platí, ať Václav papežem je či není, protože premisa neplatí; naproti tomu implikace: "je-li $2 \times 2 = 4$, je Václav papežem" platí právě tehdy, je-li Václav skutečně papežem. Účelnost naší formulace implikace vysvitne např. z této věty o transitivnosti uspořádání reálných čísel:

Pro každou trojici reálných čísel x, y, z (nemusí být navzájem různá) platí implikace:

$$((x<y) \text{ et } (y<z)) \Rightarrow (x<z) .$$

Při jiné definici implikace bychom sotva dovedli tuto větu tak jednoduše vyslovit.

Víte, že implikace $A \Rightarrow B$ znamená něco jiného než $B \Rightarrow A$. Víte však také, že $A \Rightarrow B$ znamená totéž jako $(\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A)$. Ostatně to plyne ihned takto: Implikace $(\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A)$ znamená: $(\text{non}(\text{non } B)) \text{ vel } (\text{non } A)$, neboli (jelikož B je zřejmě negací výroku $\text{non } B$) $B \text{ vel } (\text{non } A)$, což je právě definice $A \Rightarrow B$. Ještě se někdy definuje tzv. ekvivalence dvou výroků: $A \Leftrightarrow B$; to je výrok, který platí tehdy a jen tehdy, jestliže buďto oba výroky A, B jsou pravdivé nebo oba nepravdivé (to jsou případy I, IV naší tabulky). Proto čteme tuto ekvivalenci často též takto: A platí tehdy a jen tehdy, platí-li B. Zřejmě $B \Leftrightarrow A$ znamená totéž jako $A \Leftrightarrow B$. Ekvivalence tedy neplatí tehdy, když buďto nastává případ II $(A \text{ et } (\text{non } B))$, což znamená nepravdivost implikace $A \Rightarrow B$, nebo když nastává případ III $(B \text{ et } (\text{non } A))$, což znamená nepravdivost implikace $B \Rightarrow A$. V ostatních případech ekvivalence platí. Ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ tedy neplatí tehdy a jen tehdy, když aspoň jedna z implikací $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ neplatí; jinak řečeno: ekvivalence $A \Rightarrow B$ platí tehdy a jen tehdy, platí-li obě implikace $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$. Máme-li tedy dokázat ekvivalenci $A \Leftrightarrow B$, musíme (a stačí) dokázat obě implikace $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$; místo druhé z nich můžeme napsat také $\text{non } A \Rightarrow \text{non } B$. Tedy ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ platí tehdy a jen tehdy, platí-li tyto dvě implikace: Je-li A, je B ; není-li A, není B.

V matematice se často vyskytují seskupení slov (nebo znaků), která vypadají na pohled jako výroky, ale ve skutečnosti výroky nejsou. Např.: $x > 3$, slovy "x je větší než 3" není výrok (ani když se domluvíme, že symbol x znamená reálné číslo), neboť dokud nevíme, které číslo znamená symbol x, nemůžeme mluvit o pravdivosti či nepravdivosti věty "x je větší než 3". Tak např. pro $x = 5$ dostaneme pravdivý výrok $5 > 3$, pro $x = 2$ nepravdivý výrok $2 > 3$. Z takovýchto zdánlivých "výroků" (říká se jim někdy "výrokové funkce") lze vytvořit skutečné výroky pomocí tzv. kvantifikátorů, o kterých si nyní promluvíme.

Nechť $S(x)$ je určitá vlastnost "věci" x, přičemž x může být kterákoliv věc jistého oboru, který je stanoven. Potom znakem $\forall_x S(x)$ rozumíme výrok "všechna x našeho oboru mají vlastnost $S(x)$" (znak $\forall$ pochází patrně z anglického all nebo německého alle = všechny).

Znakem $\exists_x S(x)$ rozumíme výrok "aspoň jedno x našeho oboru má vlastnost $S(x)$"; častěji to čteme takto: "existuje (v našem oboru) x, mající vlastnost $S(x)$".

Příklady: Nechť oborem "proměnné x" je množina všech reálných čísel. Potom symbol $\forall_x (x > 3)$ znamená: všechna reálná čísla x jsou větší než 3. To je již vskutku výrok, a to nepravdivý. Symbol $\exists_x (x > 3)$ znamená: "existuje reálné číslo x, jež je větší než 3". To je pravdivý výrok. Dále $\forall_x (x^2 \geq 0)$ je pravdivý výrok: druhá mocnina každého reálného čísla je číslo nezáporné. Naproti tomu $\forall_x (x^2 > 0)$ je nepravdivý výrok, neboť číslo $x = 0$ patří do oboru proměnné x (je to reálné číslo), ale není $0^2 > 0$. Ovšem výrok $\exists_x (x^2 > 0)$ je pravdivý. Symbolu $\forall$ se říká obecný **kvantifikátor** (dříve se někdy psalo Π a říkalo "velký kvantifikátor"); symbolu $\exists$ se říká existenční kvantifikátor (dříve se někdy psalo Σ a říkalo "malý kvantifikátor").

V matematice se často vyskytují výroky, obsahující několik kvantifikátorů. Například budiž x proměnná s oborem X, budiž y proměnná s oborem Y a budiž $S(x, y)$ nějaký vztah mezi x, y. Potom

(1) $$\forall_x \left\{ \forall_y S(x,y) \right\}$$

znamená tento výrok: Pro každé x z oboru X je pravda, že pro každé y z oboru Y platí mezi x, y vztah $S(x, y)$. Jednodušeji se to dá zřejmě vyslovit takto: pro každé x z oboru X a pro každé y z oboru Y platí vztah $S(x,y)$. Závorku $\{\ \}$ obyčejně vynecháváme, nehrozí-li nedorozumění. Je-li například oborem x i y množina všech komplexních čísel, znamená výrok

$$\forall_x \forall_y ((x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3)$$

tvrzení, že pro každé komplexní číslo x a pro každé komplexní číslo y platí napsaná rovnost. Tento výrok tedy je pravdivý, kdežto například výrok

$$\forall_x \forall_y ((x + y)^2 = x^2 + y^2)$$

je nepravdivý. Je zřejmé, že výrok (1) znamená totéž jako

$$\forall_y \forall_x S(x, y)$$

- pořadí dvou obecných kvantifikátorů lze zaměnit. Sami si rozvážíte, co znamená výrok $\exists_x \exists_y S(x, y)$; opět je jasné, že místo něho můžeme psát $\exists_y \exists_x S(x, y)$.

Důležitý je případ, kdy se <u>střídají</u> existenční kvantifikátory s obecnými. Abychom se neomezovali na příklady s čísly, vezměme příklad docela jiného druhu. Představme si universitu, na které se přednášejí práva, lékařství, matematika, přírodní vědy, filosofie, historie, filologie atd. Písmenem x budeme značit učitele této university (oborem x je tedy množina všech učitelů na této universitě), oborem proměnné y budiž množina všech povinných přednášek. Vztah $S(x, y)$ nechť znamená: učitel x je schopen konat přednášku y. Potom výrok

(2) $$\forall_y \{\exists_x S(x, y)\}$$

znamená:

pro každou povinnou přednášku y platí, že existuje učitel x, který je k ní ve vztahu $S(x, y)$, tj., který je schopen ji konat. Častěji to čteme takto: Ke každé povinné přednášce existuje učitel, který je schopen ji konat. Tento výrok by měl být pravdivý pro každou řádně vybavenou universitu. Naproti tomu výrok

(3) $$\exists_x \{\forall_y S(x, y)\}$$

(slovy: Existuje x, mající tuto vlastnost: pro všechna y platí vztah $S(x, y)$) znamená: Existuje učitel, který je schopen konat všechny povinné přednášky: z trestního práva, chirurgie, matematiky, čínské gramatiky, dějin Jižní Ameriky atd. Sotva se najde universita, pro kterou by tento výrok byl pravdivý. Vidíte, že (2) může znamenat něco docela jiného než (3). Jednu věc je však dobře si uvědomit: Platí-li (3), platí také (2) (ovšem ne naopak!). Jestliže totiž existuje nějaké x - označme je x_0 - tak, že pro všechna y platí vztah $S(x_0, y)$, potom ovšem ke každému y existuje x (totiž právě toto x_0) tak, že platí $S(x, y)$.

Velmi důležitá je úloha tvořit negace k výrokům složeným z několika výroků (např. k výroku A *et* B) nebo k výrokům obsahujícím kvantifikátory.

Probereme to. Výrok A je zřejmě negací výroku *non* A. Negací výroku A *et* B je výrok (*non* A) *vel* (*non* B). Vskutku výrok A *et* B platí tehdy a jen tehdy, když platí oba výroky A, B. Výrok A *et* B tedy neplatí tehdy a jen tehdy, když není pravda, že platí oba výroky A, B, tj. když aspoň jeden z nich neplatí. Sami si rozmyslíte, že negací výroku A *vel* B je výrok (*non* A) *et* (*non* B). Negací implikace $A \Rightarrow B$ je výrok A *et* (*non* B); to jsme poznamenali hned při definici implikace. Jak se nyní vytvoří negace výroku $\forall_x S(x)$? Jde tedy o výrok: není pravda, že pro všechna x platí $S(x)$. Jinými slovy: existuje x_0 (v našem oboru), pro něž neplatí $S(x_0)$ (neboli platí *non* $S(x_0)$).

Výrok *non* $\{\forall_x S(x)\}$ lze tedy psát také $\exists_x \{$*non* $S(x)\}$. Sami si rozvažte, že výrok *non* $\{\exists_x S(x)\}$ lze psát také $\forall_x \{$*non* $S(x)\}$. Mechanické pravidlo: "non" se posune za kvantifikátory a vymění se kvantifikátory $\forall$, $\exists$.

Vezměme příklad: Budiž dána posloupnost čísel c_1, c_2, ... a číslo c. Napišme výrok, který tvrdí, že číslo c je limitou posloupnosti $c_1, c_2, \ldots$. Podle definice limity lze tento výrok napsat takto (přičemž pro stručnost označme $\mathcal{N}$ množinu všech přirozených čísel):

$$(4) \qquad \forall_{\varepsilon>0} \; \exists_{n_0\in\mathcal{N}} \; \forall_{n\in\mathcal{N}} \; (n \geqq n_0 \Rightarrow |c_n - c| \leqq \varepsilon) .$$

Přitom oborem ε je množina všech kladných čísel, oborem n_0 a oborem n je množina všech přirozených čísel. Ty obory jsme vyznačili pod příslušnými kvantifikátory, abychom je nemusili zvlášť uvádět slovy.

Nyní napišme výrok "číslo c není limitou posloupnosti c_1, c_2..." (to tedy znamená, že limita $\lim_{n\to\infty} c_n$ buďto neexistuje, nebo existuje, ale není rovna číslu c). Máme tedy sestrojit negaci výroku (4). Napsali bychom tedy před (4) symbol "non", a ten bychom posunovali postupně doprava, přičemž je nutno měnit kvantifikátory. Nakonec dostaneme

$$\exists_{\varepsilon>0} \; \forall_{n_0\in\mathcal{N}} \; \exists_{n\in\mathcal{N}} \left\{ \mathrm{non} \, (n \geqq n_0 \Rightarrow |c_n - c| \leqq \varepsilon) \right\} .$$

Teď ještě vytvoříme negaci té implikace; dostaneme

$$(n \geqq n_0) \; \mathrm{et} \; \left\{ \mathrm{non} \, (\, |c_n - c| \leqq \varepsilon \,) \right\} .$$

Ježto $|c_n - c|$, ε jsou reálná čísla, mohu místo $\mathrm{non}(|c_n - c| \leqq \varepsilon)$ psát také $|c_n - c| > \varepsilon$ (podle věty, že mezi dvěma reálnými čísly a, b platí vždy jeden a jen jeden ze vztahů $a < b$, $a = b$, $a > b$)[2].

Tedy celkem: Výrok "není pravda, že $\lim_{n\to\infty} c_n = c$ " lze napsat takto:

$$\exists_{\varepsilon>0} \; \forall_{n_0\in\mathcal{N}} \; \exists_{n\in\mathcal{N}} \, (n \geqq n_0 \; \mathrm{et} \; (|c_n - c| > \varepsilon)).$$

Slovy: Existuje $\varepsilon > 0$ tak, že ke každému přirozenému číslu n_0 existuje přirozené číslo n , které je nejméně rovno číslu n_0 a přitom se c_n liší od c o více než ε . Zkuste dojít k této formulaci bez použití naší symboliky, tj. vyjděte ze slovní formulace definice limity a užívejte při úvahách vedle matematických značek jen slov českého jazyka.

Prosím, abyste tento úvod nepovažovali za žádný úvod do matematické logiky. Šlo mně jen o to, zavést několik symbolů, které mohou ulehčit správné logické deduktivní uvažování, kterého se v matematice užívá. Všechno, co jsme zde formulovali symboly non, et, vel, $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$, se dá také vyslovit v obvyklé řeči. Není to tedy vlastně nic nového proti obvyklému způsobu slovního vyjadřování logických vztahů. Naproti tomu matematická logika je samostatný

---

2) Zde jsme tedy k úpravě výroku $\mathrm{non}\,(|c_n - c| \leqq \varepsilon)$ použili matematické věty. To se v konkrétních případech často dělá, ale musíme při tom být opatrní: např. nechť oborem x , y je E_1 (množina všech reálných čísel); budiž f reálná funkce jedné proměnné s definičním oborem $M \subset E_1$. Chci-li pro určitá reálná čísla x , y upravit výrok "není $|f(x) - f(y)| < 1$ ", musím to říci takto: buďto není $x \in M$ (takže $f(x)$ nemá smysl), nebo není $y \in M$, nebo je $|f(x) - f(y)| \geqq 1$.

obor matematiky. Doufám však, že přesto tento výklad může čtenáři v praxi posloužit. Mám-li např. vytvořit negaci k výroku tvaru: "Existuje x tak, že ke každému y existuje z tak, že pro všechna t a všechna u platí implikace

$$A(x, y, z, t, u) \Rightarrow B(x, y, z, t, u) \text{"},$$

bude asi nejjednodušší napsat tento výrok pomocí našich symbolů, a potom vytvořit jeho negaci. K tomu je ovšem třeba

1) umět přepsat výrok daný slovy do naší symboliky,
2) umět operovat s těmito symboly,
3) umět přečíst slovy výsledek zapsaný symboly.

Podotýkám také, že jednoduchá symbolika, kterou jsem zavedl, sice připomíná symboliku užívanou v matematické logice, ale je přirozené, že matematická logika, jakožto vědní obor, si musí vybudovat svou vlastní důslednou symboliku (v matematické logice je to zvláště důležité). Nechtěl jsem čtenáře zatěžovat vybudováním složité symboliky, která není nutná pro skromný obsah tohoto úvodu, a proto se čtenář nesmí divit, jestliže se symbolika zde zavedená poněkud liší od standartní symboliky matematické logiky.

1014-4527