# Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces

## Chapitre VI: L'applicabilité projective de deux surfaces

# CHAPITRE VI.

## L'APPLICABILITÉ PROJECTIVE DE DEUX SURFACES.

27. **Définitions et propriétés fondamentales.** — La géométrie métrique étudie le problème de la *déformation* métrique d'une surface S, c'est-à-dire le problème de la détermination des surfaces S′ qui sont *applicables* (métriquement, selon la définition de Gauss) sur S.

Entre les points de S et d'une surface S′ applicable sur S (déformée de S), on pourra définir une correspondance (*correspondance d'applicabilité*). Soient A, A′ deux points correspondants quelconques sur les deux surfaces; on pourra trouver un mouvement M qui porte A en A′ et le voisinage de premier ordre de A dans le voisinage du premier ordre de A′; on peut énoncer cette propriété de M, en disant que M porte A en A′, et une courbe quelconque C sortant de A et appartenant à S dans une courbe Γ′, qui a en A′ un contact *analytique* de premier ordre avec la courbe C′ qui sur S′ correspond à la courbe C de S. Ce mouvement M sera en général variable, quand on déplace les points A, A′. Car, s'il était le même pour tous les points A de S, alors ce mouvement porterait chaque point A de S dans le correspondant A′ de S′, et en conséquence porterait toute la surface S en S′; ces deux surfaces S, S′ seraient égales. (L'égalité est un cas particulier de l'applicabilité, le cas le plus élémentaire et le moins intéressant dans ces recherches.)

Si la correspondance entre les points de S, S′ est seulement *conforme* (conserve les angles) (*applicabilité conforme*), on peut répéter les précédentes considérations; il y a seulement une différence : le contact de C′ et Γ′ peut *ne pas être analytique*.

Pour généraliser ces définitions à la géométrie projective, nous pourrions les répéter, en substituant seulement *aux mouvements* M *des transformations homographiques* T. Mais on n'obtiendrait rien d'intéressant, et l'on arriverait au résultat que toute correspondance entre les points de deux surfaces S, S′ est une déformation projective.

En effet, si l'on choisit les coordonnées $u$, $v$ de manière que deux points correspondants quelconques A, A′ de S, S′ aient les mêmes coordonnées $u$, $v$, une direction sortant de A sur S et la direction correspondante sur S′ sont rationnellement définies par le même paramètre $w = dv : du$, et engendrent par conséquent deux faisceaux projectifs. En partant de cette remarque élémentaire, le lecteur pourra facilement donner la démonstration complète.

Nous modifierons par conséquent ces définitions non seulement en substituant aux mouvements M des transformations homographiques, mais encore en considérant les voisinages *du second ordre* des points de S, S′. Nous aurons alors deux définitions possibles :

*Une correspondance entre les points de deux surfaces* S, S′ *est appelée une « déformation » (ou applicabilité) projective, si pour chaque point* A *de* S *nous pouvons trouver une transformation homographique* T *qui porte* A *dans le point corresvondant* A′ *de* S′ *et porte une courbe* C *sortant de* A *et appartenant à* S *dans une courbe* Γ′ *qui en* A′ *a un contact analytique du second ordre avec la courbe* C′ *qui sur* S′ *correspond à la courbe* C *de* S.

Si l'on supprime le mot *analytique*, nous obtenons une seconde définition.

*Au contraire de ce qui arrive pour les définitions précédentes de la géométrie métrique, les deux définitions d'applicabilité projective sont tout à fait équivalentes;* pour la démonstration nous renvoyons le lecteur à la *G. P. D.*, et nous nous occuperons seulement de la première. (Dans la géométrie projective il n'y a par conséquent rien d'analogue à l'applicabilité conforme de la géométrie métrique.)

Parfois nous dirons que deux surfaces sont projectivement applicables seulement pour dire qu'entre les points des deux surfaces on peut poser une correspondance, qui soit une applicabilité projective; mais en général, quand nous parlerons de deux surfaces projectivement applicables, nous aurons déjà défini la correspondance d'applicabilité entre leurs points.

Soient S, S′ deux surfaces projectivement applicables; les coordonnées $u$, $v$ sont choisies de manière que deux points correspondants de S, S′ aient les mêmes coordonnées $u$, $v$. Alors, pour chaque couple de points correspondants $u = u_0$, $v = v_0$, on pourra trouver une homographie (c'est-à-dire une transformation linéaire homogène T sur les $x$ à coefficients constants et à déterminant différent de zéro) qui porte $x$, $dx$, $d^2x$ dans les points $x'$, $dx'$, $d^2x'$. Cette homographie dépendra des valeurs $u_0$, $v_0$ de $u$, $v$, mais ne dépendra pas des valeurs de $du$, $dv$, $d^2u$, $d^2v$. La T devra porter les quantités $\rho x$, $d(\rho x)$, $d^2(\rho x)$ dans les $x'$, $dx'$, $d^2x$ (par $\rho$ nous indiquons une fonction de $u$, $v$, que nous devrons choisir d'une manière convenable) c'est-à-dire portera les coordonnées des points

$$\begin{gathered}\rho x, \quad \rho_u x + \rho x_u, \qquad \rho_v x + \rho x_v, \\ \rho_{uu} x + 2\rho_u x_u + \rho x_{uu}, \\ \rho_{uv} x + \rho_u x_v + \rho_v x_u + \rho x_{uv}, \\ \rho_{vv} x + 2\rho_v x_v + \rho x_{vv}\end{gathered}$$

dans les coordonnées de $x'$, $x'_u$, $x'_v$, $x'_{uu}$, $x'_{uv}$, $x'_{vv}$ (par $u = u_0$, $v = v_0$). On en déduit que les équations

$$(x, x_u, x_v, d^2x) = 0, \qquad (x', x'_u, x'_v, d^2x') = 0$$

sont équivalentes (en deux points correspondants de S, S′). *Les applicabilités projectives conservent* par conséquent *les asymptotiques*, et nous pourrons supposer que les $u$, $v$ soient coordonnées asymptotiques sur l'une et sur l'autre surface.

En remarquant que, d'après les équations fondamentales

$$\begin{aligned}\rho_{uu} x &+ 2\rho_u x_u + \rho x_{uu} \\ &= \left[\left(\frac{\rho_{uu}}{\rho} + p_{11}\right) - \left(\theta_u + 2\frac{\rho_u}{\rho}\right)\frac{\rho_u}{\rho} - \beta\frac{\rho_v}{\rho}\right]\rho x \\ &+ \left(\theta_u + 2\frac{\rho_u}{\rho}\right)(\rho x_u + \rho_u x) + \beta(\rho x_v + \rho_v x),\end{aligned}$$

on en déduit que la T porte les $\rho_{uu} x + 2\rho_u x_u + \rho x_u$ dans les

$$\left[\left(\frac{\rho_{uu}}{\rho} + p_{11}\right) - \left(\theta_u + 2\frac{\rho_u}{\rho}\right)\frac{\rho_u}{\rho} - \beta\frac{\rho_v}{\rho}\right]x' + \left(\theta_u + 2\frac{\rho_u}{\rho}\right)x'_u + \beta x'_v,$$

qui doivent coïncider avec les

$$x'_{uu} = p'_{11} x' + \theta'_u x'_u + \beta' x'_v \quad (^1).$$

(1) Les $p'$, $\beta'$, $\theta'$, $\gamma'$ sont les valeurs de $p$, $\beta$, $\theta$, $\gamma$ pour S′.

Nous nous rappelons maintenant que (dans le point considéré) l'on peut choisir à volonté les valeurs de $\rho$ et de ses dérivées. Pour que les deux quantités précédentes puissent coïncider, il faut et il suffit que $\beta = \beta'$. Par la même méthode on trouve $\gamma = \gamma'$. On ne trouve pas d'autres conditions, car les valeurs (dans le point considéré) de $\rho \neq 0$, $\rho_u$, $\rho_v$, $\rho_{uu}$, $\rho_{uv}$, $\rho_{vv}$ sont tout à fait arbitraires. Et il est bien facile de démontrer que ces conditions sont aussi suffisantes. On pourra donc énoncer le théorème :

*Pour que deux surfaces soient projectivement applicables, la condition nécessaire et suffisante est que les asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces, et que ces surfaces définissent les mêmes valeurs de* $\beta$, $\gamma$.

En se rappelant l'expression de l'élément linéaire projectif en coordonnées asymptotiques, on en déduit :

*Pour que deux surfaces soient projectivement applicables, il faut et suffit qu'elles possèdent le même élément linéaire projectif* (et, si cela arrive, on pourra choisir les coordonnées $x$ de point de manière que les deux surfaces définissent les *mêmes formes* $F_2$, $F_3$).

On en déduit deux conséquences évidentes :

*Une surface réglée* ($\beta\gamma = 0$) *peut être applicable projectivement seulement sur une surface réglée. Une correspondance entre deux quadriques* ($\beta = \gamma = 0$) *qui fait correspondre aux asymptotiques, c'est-à-dire aux génératrices de l'une les génératrices de l'autre, est une applicabilité projective.*

28. **Les conditions d'intégrabilité.** — La recherche des surfaces applicables sur une surface donnée est par conséquent un cas particulier du problème de trouver toutes les surfaces, pour lesquelles $\beta$ et $\gamma$ ont des valeurs données *a priori*. Pour résoudre ce problème, il faut trouver les valeurs correspondantes de $\theta$, $p_{11}$, $p_{22}$ telles que les équations fondamentales soient complètement intégrables.

Remarquons tout de suite qu'à une même surface correspond un nombre infini de systèmes de valeurs pour $\theta$, $p_{ii}$; on passe de l'un à l'autre, en multipliant les $x$ par un même facteur. Il s'agit d'abord, par conséquent, d'éliminer cette indétermination.

L'équation

$$x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x$$

devient, si l'on pose $x = \rho x'$,

$$x'_{uu} = \theta'_u x'_u + \beta x'_v + p'_{11} x',$$

où

$$\theta' = \theta - 2 \log \rho,$$

$$p'_{11} = p_{11} + \beta \frac{\partial \log \rho}{\partial v} + \theta_u \frac{\partial \log \rho}{\partial u} - \frac{1}{\rho} \rho_{uu}.$$

On trouve une équation semblable pour $p'_{22}$, et l'on en déduit que

$$\theta'_{uu} - \frac{1}{2} \theta'^2_u - 2 p'_{11} - \beta \theta'_v = \theta_{uu} - \frac{1}{2} \theta^2_u - 2 p_{11} - \beta \theta_v,$$

$$\theta'_{vv} - \frac{1}{2} \theta'^2_v - 2 p'_{22} - \gamma \theta'_u = \theta_{vv} - \frac{1}{2} \theta^2_v - 2 p_{22} - \gamma \theta_u.$$

Nous poserons

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} L &= \theta_{uu} - \frac{1}{2} \theta^2_u - 2 p_{11} - \beta \theta_v - \beta_v = \theta_{uu} - \frac{1}{2} \theta^2_u - (\pi_{11} + p_{11}) \\ &= \theta_{uu} - \frac{1}{2} \theta^2_u - 2 \pi_{11} + \beta \theta_v + \beta_v, \\ M &= \theta_{vv} - \frac{1}{2} \theta^2_v - 2 p_{22} - \gamma \theta_u - \gamma_u = \theta_{vv} - \frac{1}{2} \theta^2_v - (\pi_{22} + p_{22}) \\ &= \theta_{vv} - \frac{1}{2} \theta^2_v - 2 \pi_{22} + \gamma \theta_u + \gamma_u. \end{aligned} \right.$$

Ce choix des L, M a l'avantage que les L, M non seulement ne changent pas si l'on pose $x = \rho x'$, mais encore restent inaltérées si l'on échange les $x$ avec les $\xi$. *Elles sont invariantes, si l'on soumet la surface à une transformation homographique ou à une corrélation.*

La forme

$$L\, du^2 + M\, dv^2$$

est aussi *invariante; mais elle n'est pas intrinsèque;* pendant que les formes

$$P = p_{11}\, du^2 + p_{22}\, dv^2,$$
$$\Pi = \pi_{11}\, du^2 + \pi_{22}\, dv^2$$

sont *intrinsèques*, mais *ne sont pas invariantes*. Mais il est très facile de démontrer par le calcul effectif que, si l'on pose $\varphi = \log \beta\gamma$, ou $\varphi = \log\sqrt{\beta}$, ou $\varphi = -\log\gamma$, ou $\varphi = \log\sqrt[3]{\beta^2\gamma}$, $\psi = \log\beta\gamma$, ou $\psi = \log\sqrt{\gamma}$, ou $\varphi = -\log\beta$, ou $\psi = \log\sqrt[3]{\beta\gamma^2}$, et

$$\Phi = \left[\left(\varphi_{uu} - \frac{1}{2}\varphi_u^2\right) du^2 + \left(\psi_{vv} - \frac{1}{2}\psi_v^2\right) dv^2\right],$$

alors *la forme*

$$(2) \qquad L\,du^2 + M\,dv^2 - \Phi$$

***est intrinsèque et invariante.*** Remarquons que $\Phi$ *dépend seulement des valeurs données de* $\beta$, $\gamma$. Seulement si $\beta = \gamma = 0$, on ne peut faire usage d'aucune des définitions, que nous avons données pour $\Phi$; mais ce cas n'est pas intéressant; *en effet, si* $\beta = \gamma = 0$, *la surface est une quadrique.* Et nous pouvons l'exclure de nos considérations.

Si l'on écrit maintenant les conditions de complète intégrabilité pour les équations fondamentales (I) ou (II), on trouve

$$(\mathrm{III}) \qquad \begin{cases} L_v = -2\beta\gamma_u - \gamma\beta_u, \\ M_u = -2\gamma\beta_v - \beta\gamma_v, \\ \beta M_v + 2M\beta_v + \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2L\gamma_u + \gamma_{uuu}. \end{cases}$$

Si l'on donne les valeurs de $\beta$, $\gamma$, pour trouver (s'il y en a) les surfaces correspondantes, il faut trouver les L, M satisfaisant aux équations (III); et alors, en choisissant à volonté par exemple la valeur de $\theta$, les équations (1) détermineront les $p_{ii}$ et les $\pi_{ii}$. [Mais en général les équations (III) n'ont pas de solutions.] Si l'on a donné une surface S, et si l'on a calculé les valeurs correspondantes de $\beta$, $\gamma$, alors toute solution L, M de l'équation (III) déterminera une surface S′ applicable sur S. Mais, en général, on trouve seulement les valeurs de L, M correspondant à la surface donnée S, de manière qu'*une surface S est en général projectivement indéformable.*

Nous allons étudier maintenant le cas, où les équations (III) ont au moins *deux* systèmes de solutions L, M, en renvoyant à la *G. P. D.* pour une étude détaillée.

**29. Les couples de surfaces projectivement applicables.** — Supposons que les équations (III) possèdent deux solutions $L = L_i$, $M = M_i$ ($i = 1, 2$). Les deux formes

$$L_i\,du^2 + M_i\,dv^2 - \Phi,$$

et par conséquent aussi leur différence

$$(3)\qquad \lambda\, du^2 + \mu\, dv^2 \qquad (\lambda = L_2 - L_1,\ \mu = M_2 - M_1),$$

seront *intrinsèques* (et invariantes). Des équations (III) on déduit

$$(\mathrm{IV}_1)\qquad \lambda_v = \mu_u = 0, \qquad \beta\mu_v + 2\mu\beta_v = \gamma\lambda_u + 2\lambda\gamma_u.$$

Si $\beta = \gamma = 0$, les surfaces correspondantes sont toutes des quadriques; et nous savons déjà que la recherche des déformations projectives d'une quadrique se réduit à la considération des correspondances, qui font correspondre une génératrice à une génératrice.

Si la surface est réglée (par exemple $\beta = 0$ et $\gamma \neq 0$), on peut poser $\mu$ égal à une fonction arbitraire de $v$, et $\lambda$ égale à une fonction de la seule $u$, qui satisfait à la $\gamma\lambda_u + 2\lambda\gamma_u = 0$. Nous nous en occuperons dans un prochain chapitre.

Si $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, nous pouvons écrire les équations ($\mathrm{IV}_1$) dans la forme

$$(\mathrm{IV}_2)\qquad \begin{cases} \lambda_v = 0, & \lambda_u + 2\lambda\dfrac{\gamma_u}{\gamma} = \nu\beta, \\ \mu_u = 0, & \mu_v + 2\mu\dfrac{\beta_v}{\beta} = \nu\gamma, \end{cases}$$

où $\nu$ est une nouvelle inconnue ([1]). Les conditions d'intégrabilité $\lambda_{uv} = \mu_{uv} = 0$ nous donnent

$$(\mathrm{IV}_3)\qquad \begin{cases} 2\lambda\dfrac{\partial^2 \log\gamma}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{\partial}{\partial v}(\nu\beta), \\ 2\mu\dfrac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\,\partial v} = \dfrac{\partial}{\partial u}(\nu\gamma). \end{cases}$$

Nous en déduisons que la plus générale solution de ces équations peut dépendre seulement de trois constantes arbitraires : les valeurs initiales de $\lambda$, $\mu$, $\nu$. On devra considérer par conséquent seulement les cas suivants :

$\alpha$. Les équations (IV) admettent seulement la solution $\lambda = \mu = 0$. Alors, s'il y a une surface correspondant aux valeurs considérées de $\beta$ et $\gamma$, c'est-à-dire si les équations (III) admettent une solution L, M, la surface correspondante sera projectivement indéformable.

---

([1]) On peut simplifier ces équations en divisant, l'une par $\lambda$, l'autre par $\mu$, seulement si l'on recherche les solutions $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$.

$\beta$. Les équations (IV) admettent $i$ systèmes de solutions linéairement indépendantes $\lambda_i$, $\mu_i$. Alors $i \leqq 3$, et la solution la plus générale des équations (IV) sera

$$\lambda = \sum_i k_i \lambda_i, \qquad \mu = \sum_i k_i \mu_i,$$

où les $k_i$ sont $i$ constantes arbitraires.

Si $L_1$, $M_1$ est une solution des équations (III), la solution la plus générale de ces équations sera

$$L = L_1 + \Sigma k_i \lambda_i, \qquad M = M_1 + \Sigma k_i \mu_i,$$

et toutes les surfaces correspondantes seront projectivement applicables.

*Une surface non réglée peut par conséquent être projectivement applicable seulement sur* $\infty^i$ *surfaces avec* $i \leqq 3$ (naturellement on considère comme identiques deux surfaces si l'une est une transformée homographique de l'autre).

*Si* $i \geqq 1$, *alors il y aura au moins une solution* $\lambda$, $\mu$ *des équations* (IV) *formées par deux fonctions* $\lambda$, $\mu$ *qui ne sont pas nulles toutes les deux.*

Si par exemple $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$, nous échangerons $u$ avec $v$; nous en déduisons que l'on peut en tout cas supposer $\lambda \neq 0$. Mais nous savons que $\lambda\, du^2 + \mu\, dv^2$ est intrinsèque et que $\lambda_v = \mu_u = 0$.

Si nous choisissons comme nouveau paramètre des $u =$ const. le paramètre $U = \int \sqrt{\lambda}\, du$, et l'indiquons par $u$, nous rendrons $\lambda = 1$ (¹). De même, si $\mu \neq 0$, en changeant le paramètre $v$, on pourra rendre $\mu = 1$. En résumant, on pourra choisir les paramètres des asymptotiques de manière que

$$\lambda = 1, \qquad \mu = \sigma \qquad (\sigma = 0 \text{ ou } \sigma = 1).$$

Les équations ($IV_1$) nous donnent alors

$$\gamma_u = \sigma \beta_v \qquad (\sigma = 0 \text{ ou } \sigma = 1).$$

*Si une surface non réglée est projectivement déformable,*

(¹) Si $\lambda$ est réel et $\lambda < 0$, et si l'on veut faire usage seulement de paramètres réels, on pourra rendre $\lambda = -1$.

*on peut choisir les paramètres des asymptotiques de manière que* $\gamma_u = \beta_v$ (surfaces R) *ou* $\gamma_u = 0$ (surfaces $R_0$). (Si $\gamma_u = 0$, on peut changer les paramètres des asymptotiques de manière que $\gamma = 1$).

Dans un prochain chapitre, nous nous occuperons des très remarquables propriétés géométriques des surfaces R.

Nous voulons ici étudier seulement le cas où les équations ($IV_2$) et ($IV_3$) forment un système complètement intégrable, en renvoyant à la *G. P. D.* pour une étude plus complète. En égalant les deux valeurs de $\nu_{uv}$, que l'on obtient des équations ($IV_3$) on trouve

$$2\gamma\lambda\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial^2 \log\gamma}{\partial u\,\partial v}\right) - 2\mu\beta\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\,\partial v}\right) = \nu\frac{\partial^2 \log\frac{\beta}{\gamma}}{\partial u\,\partial v}.$$

Si cette équation est une identité, alors

$$\frac{\partial^2 \log(\beta:\gamma)}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial^2 \log\gamma}{\partial u\,\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\,\partial v}\right) = 0.$$

De la première on déduit que, en changeant les paramètres des asymptotiques, on peut rendre $\beta = \gamma$. Et les autres équations nous disent simplement que la courbure totale de la forme normale $\varphi_2 = 2\beta\gamma\,du\,dv$ est constante. Si $\beta = \gamma$ la surface a été appelée isotherme-asymptotique ou surface F.

*Si une surface non réglée est projectivement applicable sur* $\infty^3$ *surfaces, alors elle est une surface* F, *pour laquelle la forme* $\varphi_2$ *a une courbure constante.*

*Ces surfaces exceptées, toutes les autres surfaces non réglées ou sont projectivement indéformables, ou sont des surfaces* R *ou* $R_0$, *applicables projectivement sur* $\infty^1$, *ou sur* $\infty^2$ *surfaces.*

Nous renvoyons à la *G. P. D.* pour l'étude des surfaces, qui admettent un groupe de transformations homographiques, ou plus généralement d'applicabilités projectives en elles-mêmes.

**30. Quelques propriétés des surfaces projectivement applicables.** — Nous démontrerons plus loin que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une correspondance entre le point de deux sur-*

*faces* S, S′ *soit une applicabilité projective est que, pour chaque couple de points correspondants* A, A′, *on puisse trouver une homographie qui porte* A *en* A′ *et le plan osculateur en* A *à une courbe quelconque* C *sortant de* A *et appartenant à* S *dans le plan osculateur en* A′ *à la courbe* C′, *qui sur* S′ *correspond à* C.

Occupons-nous maintenant des correspondances entre les points de deux surfaces quelconques S, S′, qui conservent les asymptotiques $u$, $v$. Si $x$ et $x'$ sont deux points correspondants A, A′ de S, S′, on peut trouver une homographie qui porte $x$ en $x'$ et chaque courbe C sortant de $x$ sur S dans une courbe $C_1$ qui a en $x'$ un contact analytique de premier ordre avec la courbe C′ correspondant à C (par exemple l'homographie qui porte les points $x$, $x_u$, $x_v$ en $x'$, $x'_u$, $x'_v$). Cette homographie porte la surface S dans une surface $S_1$ (projectivement identique à S); les valeurs de $\beta$, $\gamma$ seront les mêmes pour S et $S_1$. Deux courbes homologues de S′ et $S_1$ sortant de A′ auront en A′ un contact analytique du premier ordre. Par des notations qui s'expliquent par elles-mêmes, on pourra écrire (en A′)

$$x' = x_1, \qquad x'_u = x_{1u}, \qquad x'_v = x_{1v}.$$

Et, si $\beta'$, $\gamma'$ sont les valeurs de $\beta$, $\gamma$ pour la surface S′, nous déduisons des équations fondamentales que

$$x'_{uu} - \frac{\beta'}{\beta} x_{1uu}$$

appartient à la tangente asymptotique $(x, x_u)$. On peut faire une remarque analogue pour le rapport $\gamma' : \gamma$, et l'on conclut (*voir* § 7 et 11) :

*Les rapports* $\beta' : \beta$ *et* $\gamma' : \gamma$ *sont les invariants de contact pour les asymptotiques de* S′ *et* $S_1$. *Les surfaces* S, S′ *sont projectivement applicables seulement si ces invariants sont égaux à* 1, c'est-à-dire : *Une correspondance entre les points* A, A′ *de deux surfaces* S, S′ *qui conserve les asymptotiques est une applicabilité projective seulement si* (pour chaque point A de S) *une transformation homographique qui porte* A *en* A′ *et* S *dans une surface* $S_1$ *qui a en* A′ *un contact analytique de premier ordre avec* S′, *porte les asymptotiques de* S *sortant de* A *dans deux courbes qui ont un contact du second ordre avec les asymptotiques de* S′ *sortant de* A′.

Considérons sur une surface quelconque S une courbe C; soient $u$, $v$ des paramètres asymptotiques pour S. Soit $x$ un point de C; on aura

$$dx = x_u\,du + x_v\,dv,$$

$$\begin{aligned} d^2x = {} & x_u(d^2u + \theta_u\,du^2 + \gamma\,dv^2) + x(p_{11}\,du^2 + p_{22}\,dv^2) \\ & + x_v(d^2v + \theta_v\,dv^2 + \beta\,du^2) + 2x_{uv}\,du\,dv. \end{aligned}$$

La courbe C aura en $x$ un point d'inflexion, seulement si les points $x$, $dx$, $d^2x$ sont en ligne droite, c'est-à-dire si

$$du\,dv = 0,$$
$$(d^2u\,dv - du\,d^2v) + (\theta_u\,du - \theta_v\,dv)\,du\,dv + (\gamma\,dv^3 - \beta\,du^3) = 0.$$

On en déduit le théorème de Castelnuovo et Bompiani (Bompiani [18]).

*Deux surfaces sont projectivement applicables si à chaque courbe de la première qui a un point d'inflexion* A *correspond une courbe de la seconde qui a un point d'inflexion dans le point* A′ *correspondant de* A.

Soient S, S′ deux surfaces projectivement applicables, sur lesquelles $u$, $v$ sont les coordonnées asymptotiques; ces surfaces définiront les mêmes fonctions $\beta$, $\gamma$; et, si l'on choisit les $x$ d'une manière convenable, on pourra supposer que les deux surfaces définissent une même fonction $\theta$. Au contraire les fonctions $p_{ii}$ correspondant à S ne seront pas égales aux fonctions $p'_{ii}$ correspondant à S′ (au moins si les deux surfaces ne sont pas projectivement identiques). Si $u = u_0$, $v = v_0$ est un point A de S de coordonnées homogènes $x$, et si $x'$ sont les coordonnées du point correspondant A′, on pourra trouver une transformation linéaire homogène à coefficients constants (pour les coordonnées de points) qui porte les $x'$, $x'_u$, $x'_v$, $x'_{uv}$ (pour $u = u_0$, $v = v_0$) dans les $x$, $x_u$, $x_v$, $x_{uv}$. Cette transformation homographique portera S′ dans une troisième surface $S_1$, lieu d'un point $x_1$. Et l'on aura (pour $u = u_0$, $v = v_0$)

$$x_1 = x, \qquad x_{1u} = x_u, \qquad x_{1v} = x_v, \qquad x_{1uv} = x_{uv}.$$

Deux courbes correspondantes sur S, $S_1$ auront en A un contact du second ordre. Et l'on aura

$$d^2x_1 - d^2x = x[(p'_{11} - p_{11})\,du^2 + (p'_{22} - p_{22})\,dv^2].$$

Nous nous demandons *s'il y a une courbe sur* S *sortant de* A, *qui a en* A *un contact de troisième ordre avec la courbe correspondante de* $S_1$. Si nous calculons les différentielles le long de ces courbes, la condition nécessaire et suffisante pour que le contact soit de troisième ordre est que les points

$$x = x_1, \qquad dx = dx_1, \qquad d^3 x - d^3 x_1$$

appartiennent à une même ligne droite. (On le démontre par une méthode semblable à celle que nous avons suivie (§ 11) dans un cas analogue.)

D'après les équations fondamentales $(\mathrm{I})_1$ du paragraphe 17 (où $\alpha = \theta_u$, $\varepsilon = \theta_v$), on trouve

$$\begin{aligned} d^3 x - d^3 x_1 = \; & x_u(\mathrm{P}_{11}\, du^3 + 3\mathrm{P}_{22}\, du\, dv^2) \\ & + x_v(3\mathrm{P}_{11}\, dv\, du^2 + \mathrm{P}_{22}\, dv^3) + x\Phi_3, \end{aligned}$$

où la valeur de $\Phi_3$ ne nous intéresse pas, et où

$$\mathrm{P}_{11} = p_{11} - p'_{11}; \qquad \mathrm{P}_{22} = p_{22} - p'_{22}.$$

Les trois points considérés seront sur une même droite seulement si

$$\mathrm{P}_{11}\, du^2 - \mathrm{P}_{22}\, dv^2 = 0.$$

Avec les notations du paragraphe 29, nous pouvons écrire $\mathrm{P}_{11} = \lambda$, $\mathrm{P}_{22} = \mu$ (pour cela il suffit de remarquer que $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\theta = \theta'$). *Le contact est par conséquent du troisième ordre pour les lignes conjuguées aux lignes définies par l'équation* $\lambda\, du^2 + \mu\, dv^2 = 0$, dont nous avons de cette manière trouvé la signification géométrique (Cartan et Čech). Nous nous en occuperons dans un prochain chapitre.

La notion d'applicabilité projective et le théorème fondamental relatif à l'invariance de l'élément linéaire projectif sont dus à M. Fubini [3]. Les conditions $\beta_v = \sigma\gamma_u$ ($\sigma = 1, 0$) pour une surface projectivement déformable ont été données par M^lle^ Stipa [1] et retrouvées indépendamment par M. Kanitani [2]; *voir* aussi Fubini [12]. Les conditions d'intégrabilité sous la forme (III) ont été données par M. Fubini [5]. M. Cartan [4] (*voir* déjà [2]) a démontré que les surfaces projectivement déformables dépendent de six fonctions arbitraires d'un argument. Les surfaces non réglées avec $\infty^3$ déformées projectives ont été déterminées par MM. Cartan [4] et Kanitani [2]; *voir* aussi *G. P. D.*, Chap. VII. Une condition nécessaire (mais non suffisante) pour qu'il existe une surface appartenant à des quantités $\beta$, $\gamma$ données *a priori* a été trouvée par M. Bortolotti [4].

M. Fubini [11] a étudié les surfaces qui admettent un groupe continu G de déformations projectives en elles-mêmes. Il a trouvé que dans les cas d'une surface non réglée le groupe G a deux paramètres au plus et a déterminé les surfaces correspondantes. Ce résultat a été retrouvé par une autre méthode par M. Cartan [4]; *voir* aussi Borůvka [1]. Le cas où le groupe G a un seul paramètre a été résolu par M. Čech [21]; *voir* aussi Féraud [4]. Cf. *G. P. D.*, Chap. VIII.

Dans la théorie de l'applicabilité projective des surfaces, il reste encore à résoudre un problème important, à savoir la détermination de toutes les surfaces $\Sigma_2$ qui admettent précisément $\infty^2$ déformées projectives. M. Cartan [4] a démontré que les surfaces $\Sigma_2$, si elles existent, dépendent au plus de 16 constantes arbitraires. On trouve des exemples effectifs de surfaces $\Sigma_2$ parmi les surfaces qui admettent $\infty^1$ déformations projectives en elles-mêmes. Dans un Mémoire non encore publié, M. Čech a déterminé un cas particulier de surfaces $\Sigma_2$, à savoir celles où un des réseaux R correspondants a ses invariants de Laplace-Darboux égaux; ces surfaces se partagent en plusieurs catégories dépendant de six constantes arbitraires au plus.

Pour l'extension de la notion d'applicabilité projective aux hyperespaces, *voir* Fubini [7], [11]; Cartan [4], [5]; Čech [14]; Bersano [1], [2]; Féraud [1], [2], [3]; Pantazzi [1], [2]. M. Fubini et M. Thomsen ont étudié même les généralisations à la géométrie conforme.

Le lecteur pourra consulter la *G. P. D.* (Chap. XII) et, pour les généralisations aux systèmes de droites, la *G. P. D.* (Chap. XI). Il s'agit de questions très intéressantes, où il y a encore beaucoup de problèmes à résoudre.