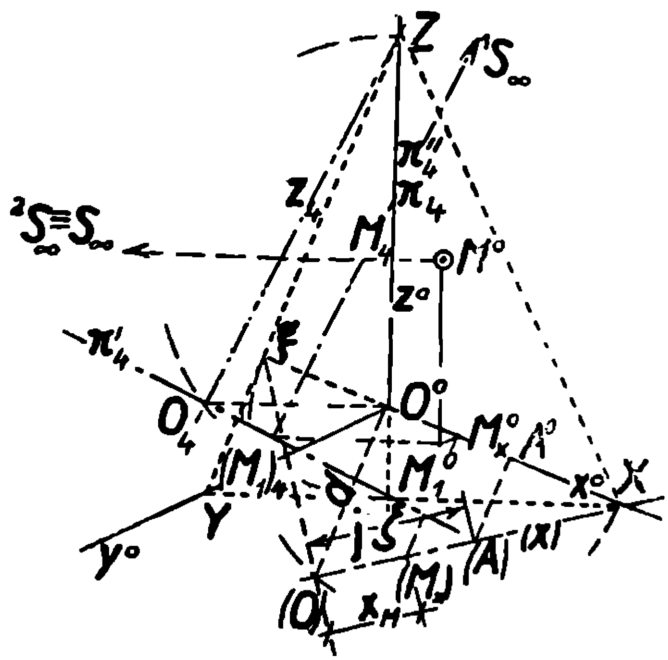
a obrazem na číselné ose (u bodu A body A_1 a A'); zobrazení je tedy též dvojobrazové.

8. AXONOMETRIE

Bod v prostoru určujeme nejčastěji třemi souřadnicemi v pravoúhlé soustavě souřadnic, určené třemi osami x, y, z, jež tvoří pravoúhlý trojhran o vrcholu O, který je počátkem souřadnic. K měření souřadnic je třeba zvoliti si jistou jednotku j, kterou přeneseme na osy x, y, z a sice do délek $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = j$ a dostáváme tak pravoúhlý rovnoramenný trojhran tvořící tři hrany krychle vycházející z téhož vrcholu O. Promítneme-li nyní tuto soustavu souřadnic do obecné průmětny π, o níž v dalším předpokládejme, není-li jinak řečeno, že není rovnoběžná se žádnou osou souřadnic, dostaneme kolmou, kosoúhlou a středovou *axonometrii*, podle toho zda promítání na průmětnu π je kolmé, kosoúhlé nebo středové. Obrazy, které tak dostaneme, jsou velmi názorné. Ve zvláštním případě může průmětna splynouti s některou rovinou souřadnic, jako jsme měli již v odst. **7,3** (obr. 30).

Bod v axonometrii bude opět určen dvěma obrazy a to axonometrickým obrazem originálu a axonometrickým obrazem jeho kolmého průmětu do některé roviny souřadnic; (nejčastěji používáme průměty do roviny (x, y), jehož axonometrický obraz je t. zv. axonometrickým půdorysem). Oba tyto obrazy jsou na přímkách, jež jsou obrazy rovin dvojnásob promítacích a to jak axonometricky tak kolmo do příslušné roviny souřadnic.

8,1 Kolmá axonometrie. V obr. 33 je ukázán postup zobrazení bodu v kolmé axonometrii. Obrazy os x^0, y^0, z^0 možno zvoliti libovolně, jen musí býti obraz kterékoliv z os v tupém úhlu obrazů zbývajících dvou os. Na př. osy x, y určují rovinu, jejíž stopa na axonometrické průmětně π je v spojnici XY stopníků X a Y os x a y na průmětně π. Stopa XY musí býti kolma k obrazu z^0 osy z, která je kolmá k rovině (x, y). Osy x, y uzavírají v prostoru čtyři pravé úhly a ty dva z nich, jimiž jde hlavní přímka bodu O rovnoběžně se stopou XY, promítají se kolmo do ostrých úhlů, kdežto zbývající dva, jimiž jde spádová přímka roviny (x, y) do tupých úhlů. Poně-



Obr. 33. Kolmá axonometrie. Základní pojmy.

vadž kolmý průmět kolmice z k rovině (x, y) splývá s průmětem spádové přímky bodu O, musí obraz z^0 býti v tupých úhlech vrcholových přímex x^0, y^0. Stejné ovšem platí i pro obrazy ostatních dvou os x, y. Stopní trojúhelník XYZ soustavy souřadnic na průmětně π má strany kolmé k obrazům os a je tudíž ostroúhlý. Kolmé průměty x^0, y^0, z^0 os souřadnic na průmětnu $\pi \equiv (X, Y, Z)$ jsou výškami stopního trojúhelníka a jejich průsečík O^0 (orthocentrum trojúhelníka XYZ), je průmět počátku soustavy souřadnic. Zvolme si v axonometricky promítací rovině osy z novou, čtvrtou průmětnu kolmého promítání[13]) a sklopme ji kolem průmětu z^0

---

[13]) (x, y) je první, (x, z) druhá a (y, z) třetí průmětna kolmého promítání.

do axonometrické průmětny (X, Y, Z). Je-li $O\zeta$ spádová přímka roviny souřadnic (x, y) bodu O, trojúhelník ζOZ je pravoúhlý a proto $\sphericalangle\ ZO_4\zeta = 90°$, z čehož se dá obraz O_4 sestrojiti, jakož i čtvrtý průmět π_4' roviny souřadnic $(x, y) \equiv \pi'$ a $z_4 \equiv ZO_4$. Obecný bod M promítáme nyní kolmo na rovinu π' a rovinu axonometrickou π'', jejíž čtvrtý obraz je v z^0 a oba tyto průměty promítáme pak kolmo na průmětnu $\pi \equiv \pi''$. Axonometrický obraz M^0 a axonometrický půdorys $M_1{}^0$ jsou na uzlovém paprsku rovnoběžném s obrazem z^0, ježto oba uzly splývají v úběžném bodě kolmic k základnici, jež tu splývá se stranou $XY \equiv (\pi', \pi'')$ axonometrického trojúhelníka. Je tedy kolmá axonometrie dvojobrazovým zobrazením.

Je-li v obraze dán bod průmětem M^0 a axonometrickým půdorysem $M_1{}^0$, dostaneme jeho souřadnice, vedeme-li axonometrickým půdorysem $M_1{}^0$ rovnoběžku s y^0 až k průsečíku $M_x{}^0$ s osou x^0 a spojnicí $M^0M_1{}^0$; obrazy souřadnic bodu M jsou v délkách $\overline{O^0M_x{}^0}$, $\overline{M_x{}^0M_1{}^0}$ a $\overline{M_1{}^0M^0}$. Jejich skutečné velikosti dostaneme přenesením jich na obrazy os ($\overline{O^0M_x{}^0}$ je již na x^0) a sklopením na př. promítacích rovin os, jak jsme již provedli pro osu z; v obraze je provedeno podobné sklopení ještě pro osu x (sklopením pravoúhlého trojúhelníka $XO\xi$). Na sklopené ose (x) je délka $\overline{(O)(M_x)}$ souřadnicí x_M.

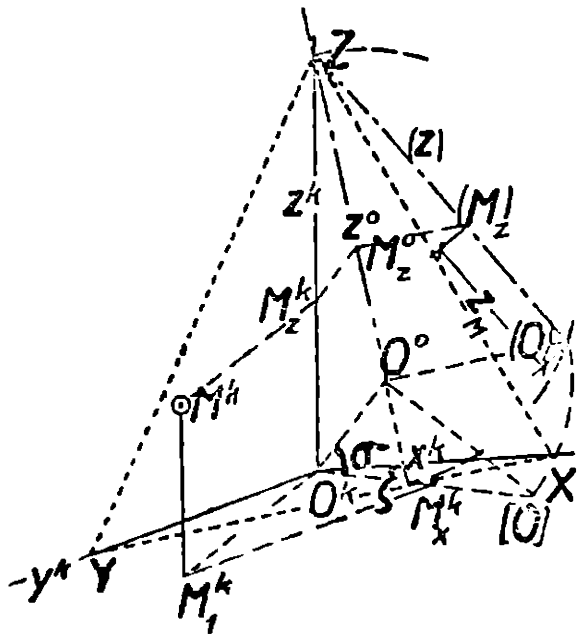
[Sestrojte podle toho ještě skutečné velikosti $y_M = \overline{M_xM_1}$ a $z_M = \overline{M_1M}$.]

Měřítka pro obrazy os dostaneme přenesením jednotky $j = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ na skutečné velikosti (x), ... a odvozením axonometrických obrazů A^0, B^0, C^0. (V obrazci sestrojen bod A^0, body B^0, C^0 nechť sestrojí laskavý čtenář sám.)

Délky $\overline{O^0A^0}$, $\overline{O^0B^0}$, $\overline{O^0C^0}$ budou nestejné, je-li trojúhelník XYZ různostranný; v tomto případě dostáváme t. zv. kolmou *trimetrii*; je-li trojúhelník XYZ rovnoramenný, jsou měřítka na dvou osách stejná a mluvíme o kolmé *dimetrii*; konečně je-li trojúhelník XYZ rovnostranný, máme kolmou *isometrii*. V posledním případě lze vypočítati jednotku (stejnou pro všechny tři osy); je patrně $\overline{O^0A^0} = \overline{O^0B^0} = \overline{O^0C^0} = j \,.\, \frac{1}{3}\sqrt{6} = 0{,}816\ldots j$. Nezkracujeme-li rozměry zobrazovaného předmětu, měřené ve směru os v této kolmé isometrii, ($\sphericalangle\ x^0y^0 = \sphericalangle\ y^0z^0 = \sphericalangle\ z^0x^0 = 120°$) sestrojujeme kolmý obraz předmětu zvětšeného a sice v měřítku $\sqrt{3} : \sqrt{2} = 1{,}224\ldots : 1$.

Z délek $\overline{O^0A^0}$, $\overline{O^0B^0}$, $\overline{O^0C^0}$ lze dvě co do polohy i velikosti zvoliti a třetí již se dá sestrojiti jak co do velikosti, tak co do polohy. (Řešíme v podstatě v kolmém promítání úlohu: Doplniti obraz krychle, dány-li obrazy dvou hran z téhož vrcholu vycházejících.)

8,2. Kosoúhlá axonometrie. V obr. 34 zvolen kosoúhlý trojúhelník axonometrický XYZ a obraz počátku O^k mimo průsečík výšek tohoto trojúhelníka. Směr kosoúhlého promítání určen pro počátek O souřadnic. Známe totiž kolmý průmět O^0 do axonometrické průmětny (X, Y, Z), další jeho průmět O^k na tutéž průmětnu a vzdálenost počátku O od průmětny. Tuto sestrojíme podle odst. **8,1** v délce $\overline{O^0(O)}$ užitím kolmo promítací roviny osy z do axonometrické průmětny. Sklopením kolmo promítacího trojúhelníka $O^kO^0[O]$, $[O^0[O] \perp O^kO^0$, $\overline{O^0[O]} = \overline{O^0(O)}]$ dostaneme úhel $\sigma = \sphericalangle O^0O^k[O]$, který svírá kosoúhle promítací paprsek s axonometrickou průmětnou; jeho kolmý průmět na axonometrickou průmětnu je v O^0O^k, čímž směr promítání určen stejně jako v odst. **7,3.** Bod M se tu určuje opět axonometrickým obrazem M^k a axonometrickým půdorysem $M_1{}^k$, při čemž musí tyto obrazy býti na ordinále rovnoběžné s obrazem z^k osy z $(M_1{}^kM^k \parallel z^k)$.

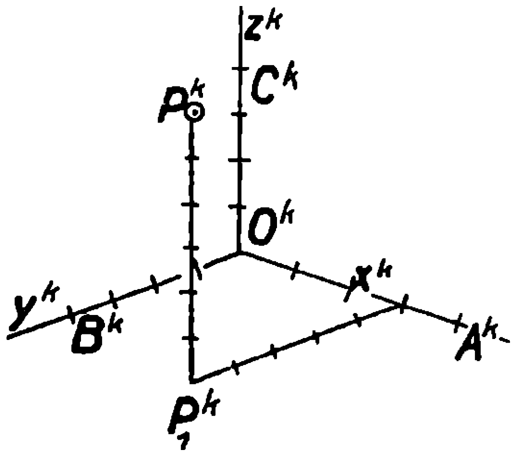


Obr. 34. Kosoúhlé axonometrie. Obrazy bodu M.

Určení souřadnic bodu M lze provésti s pomocí kolmé axonometrie, jak je ukázáno pro souřadnici z_M. Na obraze z^k určíme bod $M_z{}^k$, jehož vzdálenost od obrazu O^k je rovna $\overline{M_1{}^kM^k} = z_M{}^k$. Na kolmém obrazu z^0 určíme $M_z{}^0$ a sice uzlovým paprskem $M_z{}^kM_z{}^0 \parallel O^kO^0$ a z toho na sklopené ose (z) souřadnici $z_M = \overline{(O)(M_z)}$.

V předchozím jsme při konstrukcích používali axonometrického trojúhelníka a kolmého průmětu do axonometrické roviny. Lze však užíti jiné cesty, totiž přímo přechodu k pravoúhlému promítání na roviny souřadnic. Abychom si ji ukázali, uvedeme větu *Pohlkovu:*[14])

Jakékoliv tři z téhož bodu O^k vycházející úsečky O^kA^k, O^kB^k, O^kC^k v nákresně, které nejsou v téže přímce, z nichž žádná není nekonečně dlouhá a nejvýše jedna má délku nulovou, lze považovati za kosoúhlý průmět pravoúhlého rovnoramenného trojhranu (odst. 8).



Obr. 35. Obrazy bodu P v kosoúhlé axonometrii.

Je množství důkazů této základní věty kosoúhlé axonometrie. Nebudeme zde žádný z nich uváděti, ježto v každé obšírnější deskriptivní geometrii[15]) lze jej nalézti. Ukážeme jen použití této věty.

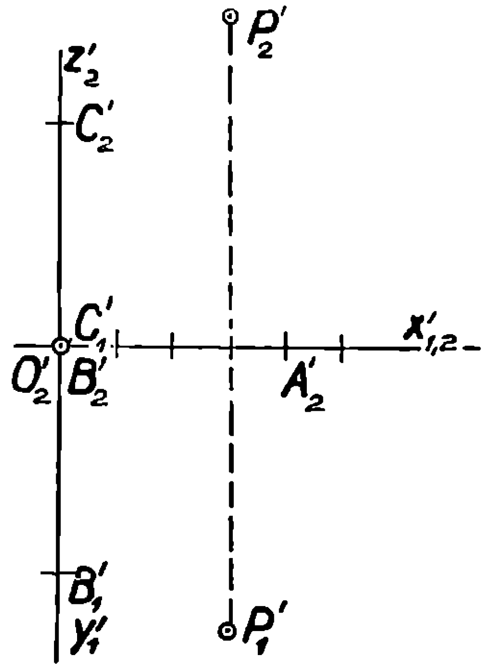
V obr. 35 byly pro kosoúhlou axonometrii zvoleny obrazy x^k, y^k, z^k tří os potud libovolně, pokud to dovolují podmínky vyslovené ve větě Pohlkově; dále byly zvoleny jednotky $\overline{O^kA^k}$, $\overline{O^kB^k}$, $\overline{O^kC^k}$. (V možnosti této volby tkví největší výhoda kosoúhlé axonometrie.) V obr. 35 je sestrojen axonometrický obraz P^k a axonometrický půdorys $P_1{}^k$ bodu $P(3; 5; 6)$, kde za jednotku byla zvolena čtvrtina úseček $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. Naopak obr. 35 ukazuje, jak lze určiti souřadnice bodu P, jsou-li dány jeho obrazy P^k, $P_1{}^k$.

Toho lze nyní použíti k provádění úloh v kosoúhlé axono-

[14]) Nazvanou tak podle *K. Pohlka*, něm. geometra, který ji r. 1853 poznal a r. 1860 bez důkazu uveřejnil.

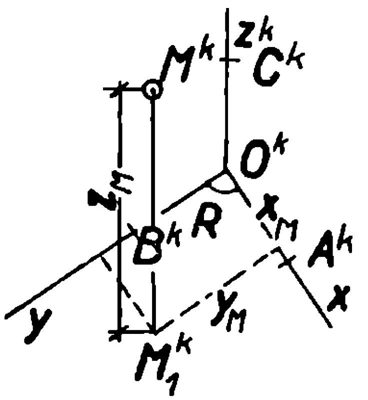
[15]) Viz na př. *Kadeřávek-Klíma-Kounovský*: Deskriptivní geometrie, I. díl, 1929, str. 297 a n.

metrii tím, že zobrazíme dané části v kolmém promítání na dvě k sobě kolmé průmětny a zde úlohy řešíme. Tak byl v obr. 36 zobrazen v pravoúhlém promítání bod P'; měřítka na osách x', y', z' byla zvolena stejná a jednotka $\overline{O'A'} = \overline{O'B'} = \overline{O'C'} = j'$ (v obr. byla zvolena za tuto jednotku přesně jednotka na x^k v obraze axonometrickém). Užitím čtvrtiny jednotky j' byl sestrojen půdorys a nárys bodu P' odpovídajícího bodu P, zobrazeného v obr. 35. Je-li j skutečná délka jednotky $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$, kterou lze konstruktivně určiti, pak útvar $(P', \ldots)$ zobrazený v obr. 36 v kolmém promítání na dvě kolmé průmětny, je podobný s útvarem $(P, \ldots)$, který je zobrazen v obr. 35 v kosoúhlé axonometrii, pro poměr $j' : j$. Máme-li provésti v útvaru $(P, \ldots)$ nějakou konstrukci, jež se nemění podobností (kolmost, úhly, …), lze toto provésti v obr. 36 v útvaru podobném $(P', \ldots)$ a převésti to nazpět do kosoúhlé axonometrie (obr. 35) tím, že přeneseme souřadnice bodů v poměru jednotek na obrazech os x^k, x'; y^k, y'; z^k, z'.



Obr. 36. Pravoúhlé průměty bodu P z obr. 35.

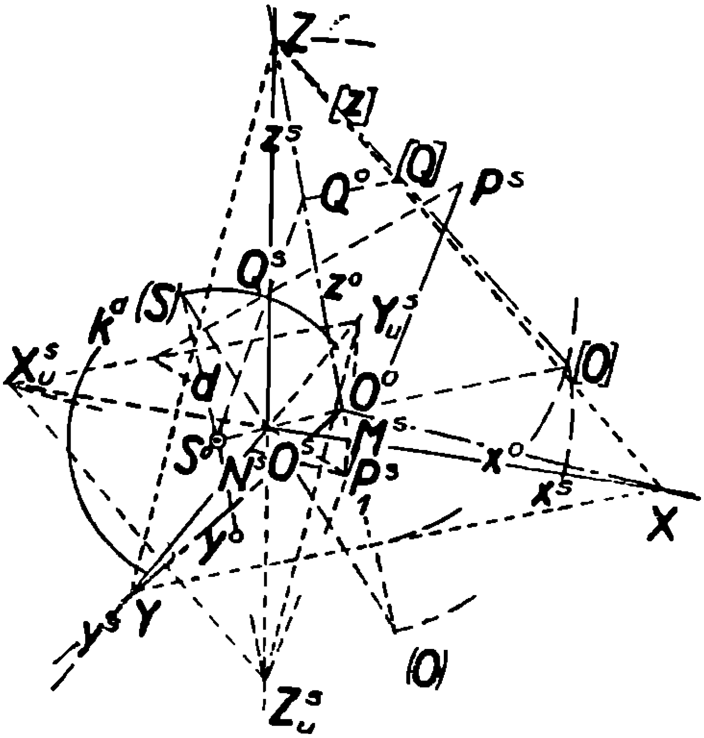
Při skizzování předmětů menší rozlehlosti jedná se nám o znázorňující obraz a tu podle věty Pohlkovy určená kosoúhlá axonometrie skýtá velmi dobré použití. Jen koule se zde promítá jako elipsa, což je nevýhoda. Zvolíme-li na obrazech dvou, případně na obrazech všech tří os stejná měřítka, dostáváme další výhody; příslušná kosoúhlá axonometrie jest dimetrií nebo isometrií. Ovšem ne v každé takové kosoúhlé axonometrii dostaneme příznivý obraz; ukazuje se, že tím více se jeví obrazy oku příjemnější, čím více se kosoúhlá axonometrie blíží kolmé axonometrii. Z dimetrií používá se hojně té, s níž jsme se setkali již v odst. **7,3** a je vyznačena v obr. 30. Z kosoúhlých isometrií je hojně používána tak zvaná *vojenská perspektiva* vyznačená v obr. 37, kde je promítáno kosoúhle do roviny (x, y); úhel paprsků promítacích se volí 45°; potom tedy $x^k \equiv x \perp y \equiv y^k$, z^k se volívá svisle. Situace ve vodorovné rovině (x, y) (t. j. axonometrický půdorys) je podobná situaci ve skutečnosti; poměr podobnosti platí pak i pro výšky, které jsou vynášeny nad půdorysem. Souřadnice bodu M daného v obr. 37 obrazy M^k, $M_1{}^k$ čteme přímo, ovšem, známe-li měřítko, v němž bylo pracováno. (Při této příležitosti je třeba upozorniti, že slovo isometrie neznačí jediné určité zobrazení; může to býti kolmá nebo kosoúhlá isometrie; *kolmá isometrie* je však jen *jediná* [odst. **8,1**].)



Obr. 37. Vojenská perspektiva bodu M.

8,3. Středová axonometrie je vyznačena v obr. 38, kde je opět zvolen axonometrický trojúhelník XYZ, ovšem ostroúhlý, a zvolen hlavní bod S^0 a distanční kružnice k^d středového promítání. Středový obraz počátku O souřadnic lze již z těchto dat sestrojiti. Jako v odst. **8,1** určíme kolmý průmět O^0 počátku O do axonometrické průmětny, což je průsečík výšek v axonometrickém trojúhelníku. Vzdálenost $\overline{O^0[O]}$ počátku O od axonometrické průmětny obdržíme na př. sklopením kolmo promítací roviny osy z do axonometrické průmětny. K sestrojení středového obrazu O^s počátku sklopíme kolmo promítací rovinu středového paprsku SO do axonometrické průmětny, takže $O^0(O) \parallel S^0(S) \perp S^0O^0$, $\overline{O^0(O)} = \overline{O^0[O]}$ a $\overline{S^0(S)} = d$; spojnice $(S)(O)$ vytíná na přímce S^0O^0 středový průmět O^s. Mezi středovým a kolmým průmětem do axonometrické průmětny je vztah odvozený v odst. **7,2**

(viz obr. 28). Úběžníky X_u^s, Y_u^s, Z_u^s os x, y, z tvoří homothetický trojúhelník s axonometrickým trojúhelníkem XYZ pro střed homothetičnosti O^s a pár odpovídajících bodů Z_u^s, Z, kde je $S^0Z_u^s \parallel z^0$. Bod P určuje se tu opět dvěma obrazy a sice axonometrickým P^s a axonometrickým půdorysem P_1^s,



Obr. 38. Středová axonometrie.

jejichž spojnice jde úběžníkem Z_u^s osy z. Uzlové paprsky jsou zde totiž obrazy rovin, jež jsou promítacími jak středově do axonometrické roviny, tak kolmo do roviny (x, y); tyto paprsky procházejí úběžníkem Z_u^s, který proto je uzlem.

Souřadnice bodu P dostaneme, vedeme-li bodem P_1 rovnoběžky s osami x, y, které vytínají na osách y, x body N, M. Na př. v obraze jde $P_1^sN^s$ úběžníkem X_u^s a $P_1^sM^s$ úběžníkem Y_u^s a tu $x_P = \overline{OM}$, $y_P = \overline{ON}$. Souřadnici $z_P = \overline{P_1P}$ přeneseme na osu z do délky $\overline{OQ}$ rovnoběžkou PQ bodem P se spojnicí OP_1. V středovém průmětě $O^sP_1^s$ a Q^sP^s protínají se na úběžnici $X_u^sY_u^s$ roviny (x, y). Skutečnou velikost souřadnice $z_P = \overline{OQ}$ možno určiti podle postupu při středovém promítání (odst. 2,6, obr. 10) anebo lze spojnicí S^0Q^s dostati na z^0 kolmý průmět Q^0 bodu Q a na sklopené ose $[z]$ obdržeti $[Q]$ a tu $z_P = \overline{[O][Q]}$. Čtenáři se ponechává k laskavému sestrojení skutečných velikostí souřadnic x_P, y_P, jakož i obráceně sestrojení obrazů A^s, B^s, C^s bodů os x, y, z, pro něž $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = j$.

Při větě Pohlkově je možno obraz rovnoramenného trojhranu $O(A, B, C)$ voliti do jisté míry libovolně; jednou volbou je určen směr promítání i poloha trojhranu v prostoru a sice v oboru reálných řešení jsou obecně dva směry promítání a ke každému směru dvě polohy trojhranu, tedy čtyři reálná řešení. V středové axonometrii možno obraz $O^s(A^s, B^s, C^s)$ pravoúhlého rovnoramenného trojhranu voliti také libovolně, ale tím poloha středu promítání a trojhranu není v prostoru určena. Zvolíme-li ale ještě úběžníky X_u^s, Y_u^s, Z_u^s obrazů $x^s \equiv O^sA^s$, $y^s \equiv O^sB^s$, $z^s \equiv O^sC^s$, tu je úloha zase přeurčena, ježto prvky O^s, (A^s, B^s, C^s), (X_u^s, Y_u^s, Z_u^s) musí vyhovovati jisté podmínce. Podmínka ta však není jednoduchá a ježto středové axonometrie se prakticky málo používá, opomíjíme ji zde.

9. ZOBRAZENÍ DVOJSTOPNÍ

Pro zobrazování přímek a rovin prostoru jest velmi výhodné používati stop těchto prvků na dvou základních rovinách $^1\sigma$, $^2\sigma$. Toho jsme již použili pro určování přímek a rovin v středovém promítání (odst. 2), kde rovina $^1\sigma$ splývala s průmětnou a rovina $^2\sigma$ byla úběžnou rovinou prostoru. Nechť roviny $^1\sigma$, $^2\sigma$ mají obecnou polohu v prostoru; jejich průsečnici označme jako osu x. Libovolná přímka a protíná stopní roviny $^1\sigma$, $^2\sigma$ v stopnících ^1A, ^2A, a libovolná rovina ϱ v stopách $^1s_\varrho$, $^2s_\varrho$, kteréžto stopy se protínají v bodě průsečnice x. Naopak stopníky ^1A, ^2A pokud nesplývají v témže bodě osy x, určují jednoznačně přímku a a dvě přímky $^1s_\varrho$, $^2s_\varrho$