9. LOGICKÝ KALKUL

V předešlé kapitole jsme řekli, že jsou dvě metody důkazu bezespornosti: buď (1) přímo dokážeme, že mezi důsledky axiomů se nevyskytují odporující si výroky anebo (2) postupujeme nepřímo, totiž interpretujeme axiomy v nějakém oboru, který považujeme za bezesporný. První metodou, jež má pro základy matematiky nesmírný význam, se budeme stručně zabývat v této závěrečné kapitole.

Když chceme postupovat touto metodou, pak vznikají dvě otázky. Za prvé musíme, jak jsme již řekli v odst. 8·5, „pořídit katalog" všech možných důsledků axiomů; není jasné, jakým způsobem to můžeme provést. Za druhé, když dokážeme bezespornost, pak tím dokážeme zároveň, že logická dedukce nemůže vést ke sporu. Avšak při tomto důkazu samém používáme již jakéhosi druhu logické dedukce, takže je nebezpečí, že použijeme při důkazu bezespornosti toho, co teprve máme dokázat. Proto musíme stanovit předem, jakých vět a úsudkových schemat budeme používat při důkazu bezespornosti, a u těchto vět a úsudkových schemat musíme považovat bezespornost za evidentní.

Než promluvíme o těchto problémech, odpovíme ještě na jednu otázku, kterou by si zde mohl položit čtenář. Řekli jsme již, proč musíme dokazovat bezespornost axiomů. Na první pohled se však zdá docela samozřejmé, že logické odvozování samo o sobě nemůže vést ke sporu. Ve skutečnosti to vůbec není samozřejmé, jak ukazují na příklad antinomie theorie množin (viz odst. 6·5). Tam jsme se neopírali o žádné axiomy, nýbrž užívali jen obvyklých logických obratů. Ukázalo se však, že jistá — na první pohled zcela korektní — definice vedla nakonec ke sporu. Z toho jsou zřejmé dvě okolnosti: za prvé, některé logické obraty (především některé druhy definic) nejsou přípustné; za druhé, bezespornost logického odvozování není samozřejmá, jakmile, obrazně řečeno, se setkáváme s něčím nekonečným (s nekonečnými množinami atd.).

Obrátíme se nyní k první z našich otázek. Jde o následující úkol: podat vyčerpávající přehled všech možných typů výroků a všech druhů logického odvození. Je jasné, že jednou z největších překážek, které tomu stojí v cestě, je to, že formulujeme výroky v obvyklé slovní řeči. Řada výrazů obvyklé řeči může totiž mít podle okolností různý význam a kromě toho při logických úvahách, v nichž užíváme slov obvyklé řeči, nemáme nikdy úplnou jistotu, že jsme nepoužili nevědomky nějaké „samozřejmé" věty, kterou jsme však nezařadili mezi axiomy.

Tyto okolnosti vedou k tomu, že zavádíme místo obvyklé řeči „řeč" symbolickou čili t. zv. **logický kalkul.** S ukázkami takové symboliky se čtenář již setkal v prvních třech kapitolách. Toto zavedení symboliky je prvním krokem při vybudování logického kalkulu. Další krok spočívá v tom, že stanovíme ryze formálně, čemu budeme říkat výrok. Nebudeme totiž vůbec dbát významu našich symbolů, nýbrž řekneme: sled značek nazýváme výrokem, když se skládá ze značek toho a toho druhu v tom a tom pořadí. Konečně formalisujeme také úsudky (odvození). Řekneme totiž, že výrok (t. j. skupinu značek určitého tvaru) **A** nazýváme bezprostředním důsledkem výroků **B**, **C**, . . ., **K**, když výroky **A**, **B**, **C**, . . ., **K** se skládají ze značek toho a toho druhu v tom a tom pořadí.

Tím dostáváme t. zv. logický kalkul, čili logickou řeč. Opakujeme nyní ještě jednou, co je to vlastně logický kalkul. Máme zde především určité značky. V našem případě jsou to písmena a číslice; mohly by to však být jakékoli jiné značky, na příklad zvuky (mluvená řeč). Pro tyto značky jsou dána určitá „pravidla hry", je totiž řečeno: 1. jaké skupiny značek nazýváme „výroky", 2. kdy nazýváme „výrok", t. j. skupinu značek, „důsledkem" jiných „výroků", t. j. skupin značek, 3. které „výroky" prohlásíme předem za „správné". Případný význam značek je zde zcela vedlejší; logický kalkul studujeme tak, jako by šlo o jakousi hru se značkami.

Jaký význam má zavedení logického kalkulu pro studium základů matematiky? To jsme vlastně již řekli a nyní to pouze opakujeme. Zavedení logického kalkulu umožňuje snadný přehled všech možných druhů výroků a všech důsledků daných výroků. Tím, že pojímáme logický kalkul jako „hru" s pevnými pravidly, dosáhneme toho, že nám nemůže nepozorovaně vklouznout do důkazů žádný zamlčený předpoklad nebo nepřípustný typ odvození případně nekorektní definice; krátce řečeno, jsme zde — na rozdíl od obvyklé řeči — nuceni k naprosté jasnosti. Z těchto důvodů je teprve po zavedení logického kalkulu možný bezvadný důkaz bezespornosti a jiných podobných vlastností. Ovšem je vždy problémem, do jaké míry lze vyjádřit v takovém kalkulu obvyklý obsah matematiky.

Než budeme postupovat dále, musíme zase odpovědět na jednu otázku, kterou si asi položil čtenář sám. Je jen jeden logický kalkul, nebo jsou možné různé logické kalkuly? Odpověď je vlastně samozřejmá. Jsou možné nejrůznější logické kalkuly. Již volba symboliky je věcí konvence. To však je vedlejší; důležité je to, že můžeme různým způsobem stanovit „pravidla hry" a tím dostaneme různé logické kalkuly. Tak dejme tomu, že chceme vypracovat logický kalkul, odpovídající intuicionistickým tendencím (viz str. 25). Dostaneme jej z obvyklého logického kalkulu (srovn. odst. 3·5) tak, že pozměníme „pravidla hry" následujícím způsobem: Výrok tvaru „$\sim (x)\ P(x) \Leftrightarrow (\exists x) \sim P(x)$" neprohlásíme předem za správný. To odpovídá obsahově tomu, že nepovažujeme předem za ekvivalentní existenční výrok a negaci obecné platnosti opaku — a to je právě intuicionistické stanovisko. Můžeme však také zasáhnout do „pravidel hry", která určují tvar výroku a nepovažovat skupinu značek „$\sim (x) P (x)$" vůbec za výrok. To pak odpovídá extrémnímu intuicionistickému stanovisku, podle kterého nemá negace obecného výroku vůbec smysl, pokud nemůžeme skutečně udat prvek, který nemá uvažovanou vlastnost.

Máme zde příklady různých logických kalkulů. Lze sestrojit nejrůznější takové příklady, neboť každou „hru" se značkami lze považovat za kalkul. Skutečný význam má takový kalkul ovšem jen tehdy, jestliže při vhodné interpretaci je ve shodě se zkušeností (a s obvyklou logikou) aspoň pokud jde o výroky o názorných vlastnostech konečných skupin předmětů, t. j. o názornou elementární aritmetiku. Jinak, na příklad pokud jde o pojem existence (v matematickém smyslu), o úsudková schemata atd., mohou se logické kalkuly navzájem značně lišit, jak jsme ostatně již viděli na příkladech.

Vracíme se k našemu thematu. Důkaz bezespornosti daného systému axiomů (a tím současně důkaz bezespornosti logického odvozování) provádíme tak, že dokážeme bezespornost vhodně vybudovaného logického kalkulu, do něhož jsou zařazeny tyto axiomy. Při tomto důkaze se již vůbec nemusíme zabývat významem axiomů nebo logických termínů a operací. Dokazujeme vlastně jen toto: vycházíme-li z určitých seskupení značek a přecházíme-li k jiným podle určitých „pravidel hry", pak nedospějeme nikdy k seskupení značek (t. j. k „výroku") těch a těch vlastností — totiž k výroku tvaru „$\mathbf{A} \vee \sim \mathbf{A}$". Bezespornost kalkulu a jiné podobné vlastnosti jsou pak názornými vlastnostmi skupin značek a tedy vlastně záležitostí kombinatoriky konečných skupin předmětů. Při studiu těchto vlastností užíváme pouze tak zvaných **finitních** vět a úsudků, totiž vět, které se týkají názorných vlastností konečných skupin předmětů, jež tedy můžeme v zásadě názorně verifikovat; v tomto postupu spočívá právě tak zvaná **finitní metoda.** Finitní věty při tom považujeme za základ matematiky i logiky a jejich bezespornost považujeme za zaručenou právě tím, že každá taková věta připouští názornou verifikaci na konečných skupinách předmětů.

Finitní jsou především individuální věty elementární aritmetiky jako „$1 + 1 = 2$", „$3 + 5 = 5 + 3$", „$2 \cdot 3^2 \neq 5^2$". Obecné věty jako „$m + n = n + m$" a „pro libovolná přirozená m, n jest $2\,m^2 \neq n^2$" jsou rovněž finitní, neboť můžeme udat obecně platný názorný předpis, podle kterého lze tyto věty verifikovat pro libovolná m, n. — Nemůžeme však zdaleka považovat každou obecnou větu aritmetiky za finitní. Tak když je dán určitý předpis φ, podle kterého je každému přirozenému číslu n přiřazeno určité přirozené číslo $\varphi(n)$, pak nemůžeme ihned názorně verifikovat anebo vyvrátit na příklad tvrzení „pro libovolné n je $\varphi(n) \neq 3$". Toto tvrzení má ráz matematického problému, který může, ale nemusí býti rozhodnut názorným způsobem — totiž buď tak, že udáme obecně platný názorný předpis, podle kterého lze toto tvrzení verifikovat pro libovolné n, anebo tak, že udáme předpis, podle kterého lze najít určité n, pro něž je $\varphi(n) = 3$. Pouze tehdy, když je takové rozhodnutí možné, můžeme považovat tvrzení „pro libovolné n je $\varphi(n) \neq 3$" za finitní.

Pojem finitní věty není, jak si čtenář všiml, přesně stanoven, takže je možné pojímat jej různým způsobem. Při studiu základů matematiky a hlavně problému bezespornosti na základě finitní metody musíme tedy jednak zvolit vhodný logický kalkul, v němž by se dalo vyjádřit co nejvíce z obvyklého obsahu matematiky, jednak vhodně vymezit pojem finitní věty a finitního úsudku. Velmi jemnými a obtížnými otázkami, které s tím souvisí a jež nejsou ještě zdaleka definitivně rozřešeny, se zde ovšem nemůžeme zabývat. — Závěrem uvedeme jenom odpovědi na dvě takové otázky (jež ovšem zde formulujeme velmi nepřesně).

1. Lze provést pro některý dostatečně obsažný logický kalkul (v němž by se dala na příklad vyjádřit podstatná část obsahu obvyklé aritmetiky) důkaz bezespornosti finitní metodou?

Odpověď: Ano, když finitní metodu pojímáme dosti široce.

2. Lze v nějakém (rozumí se, bezesporném) logickém kalkulu vyjádřit celý obvyklý obsah aritmetiky?

Odpověď: Je dokázáno, že to není možné. Ať je dán jakýkoli logický kalkul, v němž lze vyjadřovat aritmetické věty, vždy lze najít aritmetickou větu, která je obsahově správná, avšak v daném logickém kalkulu se nedá dokázat.