

Determinanty a matice v teorii a praxi

1. Lineární závislost číselných soustav

In: Václav Vodička (author): Determinanty a matice v teorii a praxi. Část druhá. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1950. pp. 5–11.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403286>

Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

1. LINEÁRNÍ ZÁVISLOST ČÍSELNÝCH SOUSTAV.

Definice 1. Číselné soustavy v počtu $m(\geq 1)$ po n číslech

$$a_{\mu 1}, a_{\mu 2}, \dots, a_{\mu n}, (\mu = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

nazýváme lineárně závislými, existují-li čísla c_{μ} , která nejsou všechna rovna nule tak, že platí n rovnic

$$\sum_{\mu=1}^m c_{\mu} a_{\mu \nu} = 0; \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Je-li možno rovnice (2) splniti jenom tím, že položíme $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$, říkáme, že jsou soustavy (1) navzájem lineárně nezávislé.

Příklady. 1. Soustavy

$$\begin{array}{cccc} 5, & -2, & 0, & 3 \\ 7, & 6, & -4, & 7 \\ -1, & -4, & 2, & -2 \end{array} \quad (3)$$

jsou navzájem lineárně závislé. Za čísla c_{μ} stačí zde vzít: $c_1 = -1, c_2 = 1, c_3 = 2$.

2. Soustavy

$$\begin{array}{ccc} 8, & -2, & 3 \\ 0, & 1, & -5 \end{array} \quad (4)$$

jsou lineárně nezávislé. Z rovnic

$$8c_1 + 0 \cdot c_2 = 0, \quad -2c_1 + 1 \cdot c_2 = 0, \quad 3c_1 - 5c_2 = 0$$

totiž nutně vyplývá $c_1 = c_2 = 0$.

V dalších úvahách poznáme, že bývá často velmi důležité rozhodnouti o závislosti či nezávislosti předložených číselných soustav. Na druhé straně však není takového rozhod-

nutí vždy zcela jednoduché — to nahlédneme ostatně již z případu soustav uvedených v prvním příkladě. Zvláště tehdy, když jde o veliký počet soustav s mnoha čísly, byla by tato úloha prakticky vůbec neřešitelná. A právě v tomto bodě nám prokáže theorie determinantů a matic po své neocenitelnou službu, podávajíc spolehlivý a poměrně jednoduchý prostředek, jak o závislosti či nezávislosti soustav rozhodnouti.

Věta 1. Má-li matice $\|a_{ik}\|$, ($i, k = 1, 2, \dots, m$) hodnotu h , lze v ní nalézt h řádků navzájem lineárně nezávislých. Všechny ostatní řádky jsou pak lineárními kombinacemi oněch h navzájem nezávislých.

Důkaz. Majíce zřetel k definici 1. nahlédneme, že jsou-li soustavy (1) navzájem lineárně závislé, lze mezi nimi jistě nalézt takovou, jež jest lineární kombinací všech ostatních (pojem lineární kombinace byl vysvětlen v poznámce 3, str. 14, části I). V případě závislosti soustav jest totiž v rovnicích (2) alespoň jeden z koeficientů $c_1, c_2, \dots, c_m$ různý od nuly; budiž to na př. c_i . Rovnice (2) lze pak psát i ve tvaru

$$a_{iv} = - \sum_{\mu \neq i}^{1, m} \frac{c_\mu}{c_i} a_{\mu v}, \quad v = 1, 2, \dots, n;$$

z něho je patrné, že i -tá ze soustav (1) jest lineární kombinací ostatních.

Obráceně soustavy (1) jsou lineárně závislé, je-li mezi nimi některá lineární kombinací všech ostatních.

Toto majíce na paměti, obrátíme se nyní k vlastnímu důkazu věty 1. Budeme při tom předpokládati, že determinant h -řadový, jehož různost od nuly je zaručena hodnotou h dané matice, je vytvořen z prvních h řádků a z prvních h sloupců; toho lze vždycky dosáhnouti eventuální změnou pořadí řádek a sloupců, t. j. výkonem, který nemá na hodnotu matice žádného vlivu. Je tedy

$$A_h = \begin{vmatrix} a_{11}, \dots, a_{1h} \\ \dots\dots\dots \\ a_{h1}, \dots, a_{hh} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (5)$$

avšak

$$\begin{vmatrix} a_{11}, \dots, a_{1h}, a_{1k} \\ \dots\dots\dots \\ a_{h1}, \dots, a_{hh}, a_{hk} \\ a_{i1}, \dots, a_{ih}, a_{ik} \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

pro $i = h + 1, h + 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, h, h + 1, \dots, m$.

Platnost právě napsaného vztahu je pro $i, k \geq h + 1$ zřejmá, protože na levé straně stojí v tomto případě $h + 1$ -řadový determinant matice o hodnoti h , pro $k \leq h$ pak je onen vztah také správný, protože jde v těchto případech o determinant se dvěma sloupci navzájem stejnými.

Rozvedeme-li determinant na levé straně naší rovnice (6) podle elementů posledního sloupce, dostaneme

$$a_{ik} = - \sum_{e=1}^h \frac{c_e}{A_h} a_{ek}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Těchto m rovnic však vyjadřuje, že je i -tý řádek dané matice lineární kombinací prvních h jejích řádků. Protože pak takovéto rovnice platí pro všechna $i \geq h + 1$ a protože prvních h řádků dané matice je zcela jistě navzájem nezávislých (jinak by se z nich nedal utvořit nenulový determinant A_h — rozvažte si to podrobně pomocí toho, co bylo předesláno důkazu věty 1. o vzájemném vztahu mezi pojmem lineární závislosti soustav číselných a pojmem lineární kombinace a pak pomocí pozn. 2. a 3. na str. 13 a 14 části I), je platnost věty 1. dokázána.

Téměř samozřejmý je také opak právě dokázané věty. Vyslovíme jej *větou 2.*

Je-li možno v matici $\|a_{ik}\|$ ($i, k = 1, 2, \dots, m$) nalézt h řádků lineárně nezávislých tak, že všechny ostatní jsou jejich lineárními kombinacemi, má tato matice hodnot h .

Důkaz. Budiž p hodnost matice M ; podle věty 11 svazku I je tato hodnost táž, jako u matice M_1 vznikší z M vynecháním oněch řádků, jež nejsou navzájem nezávislé. Tato matice je však h -řádková a její řádky jsou podle předpokladu navzájem nezávislé, takže má (v důsledku právě dokázané věty 1.) hodnost h . Je tedy opravdu $p = h$, jak věta 2. tvrdí.

Výsledky podané větami 1. a 2. nám dávají možnost rozhodnutí zcela obecně otázku závislosti či nezávislosti soustav (1). Příslušné kritérium vyslovíme větou.

Věta 3. Nutná a postačující podmínka, aby m soustav (1) bylo navzájem lineárně nezávislých, je ta, aby matice oněch soustav měla hodnost právě m .

Na základě všech uvedených poznatků nahlédneme snadno správnost věty důležité pro určování hodnosti dané matice. Jest to

věta 4. Je-li některý h -řadový determinant dané matice různý od nuly, jsou-li však rovny nule všechny jeho superdeterminanty $h + 1$ -řadové, má matice hodnost h .

Důkaz. Bez újmy obecnosti lze opět předpokládati, že nenulový determinant je právě A_h z věty 1. Z faktu, že všechny jeho superdeterminanty (jsou to zase právě determinanty (6) z věty 1.) jsou rovny nule, bylo odvozeno, že každý z posledních $m - h$ řádků matice je lineární kombinací prvních h navzájem nezávislých řádků. Podle věty 2. je tudíž hodnost matice skutečně h a věta 4. je tím dokázána.

Poznámka. Ve stejném smyslu, jako jsme to učinili pro číselné soustavy a řádky matic, budeme mluvit také o vzájemné lineární závislosti řad v determinantech. Věty 1., 2. a 4. se dají bezprostředně přenést na případ determinantu.

Příklady.

Dva příklady byly již uvedeny při definici lineární závislosti číselných soustav. Je dobře všimnouti si ještě jedenkrát ve světle nových poznatků soustav (3). Protože jest

determinant elementů společných prvním dvěma řádkům a prvním dvěma sloupcům matice určené soustavami (3) různý od nuly (má hodnotu 44), má tato matice hodnot alespoň 2. Počítáme nyní hodnotu třířadového determinantu

$$\begin{vmatrix} 5, & -2, & 0 \\ 7, & 6, & -4 \\ -1, & -4, & 2 \end{vmatrix}.$$

Odečteme-li první řádek od druhého, vidíme ihned, že pozměněný druhý řádek 2, 8, —4 jest roven poslednímu, násobenému číslem —2, takže determinant má nulovou hodnotu. Zkoumáme proto ještě druhý superdeterminant výše uvedeného nenulového dvouřadového determinantu; tento nový superdeterminant se liší od právě uvažovaného pouze tím, že jeho poslední sloupec je tvořen čísly 3, 7, —2. Stejným způsobem jako výše poznáme, že má i tento determinant hodnotu nulovou, takže je podle věty 4. hodnota matice určené soustavami (3) rovna 2 a soustavy samy podle věty 3. lineárně závislé a to (na příklad) tak, že prvé dvě z nich jsou navzájem nezávislé, třetí pak je jejich lineární kombinací. Existují tedy čísla γ_1, γ_2 taková, že platí rovnice

$$\begin{aligned} 5\gamma_1 + 7\gamma_2 &= -1, & -2\gamma_1 + 6\gamma_2 &= -4, \\ 0 \cdot \gamma_1 - 4\gamma_2 &= 2, & 3\gamma_1 + 7\gamma_2 &= -2; \end{aligned}$$

třetí z nich přímo udává hodnotu $\gamma_2 = -\frac{1}{2}$ a z druhé pak vychází $\gamma_1 = \frac{1}{2}$. Koeficienty c_1, c_2, c_3 , o nichž mluví definice 1., jsou pak $\varrho\gamma_1, \varrho\gamma_2, \varrho$, při čemž je ϱ libovolný od nuly různý faktor úměrnosti. Volíme-li na př. $\varrho = 2$, dostáváme $c_1 = -1, c_2 = 1, c_3 = 2$, tedy tytéž hodnoty, jež byly uvedeny výše.

3. Co značí lineární závislost soustav

$$\begin{aligned} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \end{aligned} \quad (7)$$

Ježto soustavy jsou lineárně závislé, existují ve smyslu

definice 1. čísla c_1, c_2 (která nejsou obě rovna nule) tak, že platí n rovnic

$$c_1 a_{1\nu} + c_2 a_{2\nu} = 0, \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Je-li na př. $c_2 \neq 0$, položíme $\rho c_2 = -c_1$ a dostáváme

$$a_{2\nu} = \rho a_{1\nu}, \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Znamená tedy lineární závislost dvou číselných soustav, že jejich stejnohlé členy jsou navzájem úměrné.

4. Rozhodnouti otázku závislosti či nezávislosti soustav

$$\begin{array}{cccccc} 3, & 2, & 4, & 2, & 4, & 3 \\ 1, & 3, & 1, & 4, & 3, & 4 \\ 3, & 3, & 3, & 3, & 3, & 3 \\ 3, & 3, & 2, & 2, & 1, & 1. \end{array} \quad (9)$$

Determinant elementů společných prvním dvěma řádkům a prvním dvěma sloupcům má hodnotu 7; protože pak jest

$$\begin{vmatrix} 3, & 2, & 4 \\ 1, & 3, & 1 \\ 3, & 3, & 3 \end{vmatrix} = 3. \quad \begin{vmatrix} 3, & 2, & 4 \\ 1, & 3, & 1 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 3. \quad \begin{vmatrix} 1, & 0, & 2 \\ 0, & 2, & 0 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 3. \cdot 2. \\ \cdot \begin{vmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

vypočteme ještě čtyřřadový superdeterminant determinantu právě uvažovaného. Dostáváme

$$\begin{vmatrix} 3, & 2, & 4, & 2 \\ 1, & 3, & 1, & 4 \\ 3, & 3, & 3, & 3 \\ 3, & 3, & 2, & 2 \end{vmatrix} = 3. \quad \begin{vmatrix} 1, & 0, & 2, & 0 \\ 0, & 2, & 0, & 3 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 3. \quad \begin{vmatrix} 0, & -1, & 2, & 0 \\ 0, & 2, & 0, & 3 \\ 0, & 0, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 0, & 0 \end{vmatrix} = \\ = (-3) \cdot \begin{vmatrix} -1, & 2, & 0 \\ 2, & 0, & 3 \\ 0, & 1, & 1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot \begin{vmatrix} -1, & 2, & 0 \\ 0, & 4, & 3 \\ 0, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

takže je hodnota matice soustav (9) rovna 4 a soustavy jsou podle věty 3. lineárně nezávislé.

5. Je-li daných soustav více, než čísel v každé z nich (t. j. $m > n$), jsou vždycky navzájem lineárně závislé.

Důkaz. Hodnost matice vytvořené danými soustavami může totiž býti za daných okolností nejvýše rovna číslu n , takže je vždycky menší než m a nikdy tedy nemůže býti splněna nutná a postačující podmínka pro nezávislost soustav, jak ji vyjadřuje věta 3.