4. Erlangenský program

Erlangenský program představuje významný mezník ve vývoji geometrie 19. století, neboť na dlouhou dobu zásadně ovlivnil zaměření a další rozvoj matematiky. Tento název dostala slavná přednáška Felixe Kleina *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* [Srovnávací úvahy o novějších geometrických bádáních]. F. Klein její text předložil v říjnu roku 1872 na univerzitě v Erlangen u příležitosti svého jmenování řádným profesorem. Tato přednáška, v níž byl vyložen význam pojmu grupa pro klasifikaci různých geometrií, vyšla také jako samostatná brožura [K2].[1] Postupně byla přeložena do dalších jazyků.[2]

Životní osudy F. Kleina jsou podrobně popsány v několika publikacích.[3] Připomeneme proto jen základní životopisné a bibliografické údaje, které nám umožní zařadit Kleinovy práce a výsledky do dobového i odborného kontextu.

4.1 Felix Klein

Felix Klein se narodil 25. dubna 1849 v Düsseldorfu. Absolvoval zde gymnázium a poté odešel studovat matematiku a fyziku na univerzitu v Bonnu. V roce 1866, ještě během studia, získal místo laboratorního asistenta u Julia Plückera, který se zabýval teoretickou matematikou a experimentální fyzikou. Pod jeho vedením sepsal disertační práci *Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Koordinaten auf eine kanonische Form* [O transformaci obecné rovnice druhého stupně v přímkových souřadnicích na kanonický tvar],[4] za niž roku 1868 získal doktorát.

Během následujících dvou let postupně navštívil slavná matematická pracoviště v Berlíně, Paříži a Göttingen. V roce 1870 začal v Paříži spolupracovat s norským matematikem Sophusem Lie (1842–1899), s nímž se seznámil nedlouho předtím v Berlíně. S. Lie se tehdy teprve krátce zabýval matematikou, právě on má však nezanedbatelný podíl na Kleinových výsledcích, neboť ho přivedl k myšlence propojení geometrie a teorie grup. Tato idea sehrála velkou roli v Kleinově pozdější práci. F. Klein a S. Lie začali již v té době chápat zásadní význam

[1] F. Klein svůj program znovu otiskl v roce 1893 v časopisu *Mathematische Annalen*, který v té době redigoval; viz Mathematische Annalen 43(1893), 63–100. Při té příležitosti do původního textu dodatečně přidal několik poznámek, s cílem upřesnit nebo doplnit některá tvrzení. Erlangenský program byl dále otištěn v [K8], str. 460–497, a v časopisu The New Mathematical Intelligencer 0(1977), 22–30.

[2] Italský překlad: Fano G., *Considerazioni comparative su ricerche geometriche recenti*, Annali di matematica pura ed applicata 17(1890), 307–343; francouzský překlad: Padé M. H., *Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure 8(1891), 87–102, 173–199; anglický překlad: Haskell M. W., *A comparative review of recent researches in geometry*, Bulletin of the New York Mathematical Society 2(1893), 215–249; polský překlad: Dickstein S., *Rozważania porównawcze o nowszych badaniach geometrycznych*, Prace matematyczno-fizyczne 6(1895), 27–61. Oficiální překlad do češtiny však dosud není k dispozici.

[3] Např. [To], [Ja], str. 219–230, a [WA], str. 470–481; relevantní informace poskytuje i webová stránka http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Klein.html.

[4] Viz Mathematische Annalen 23(1884), 539–578; též [K8], str. 5–49.

teorie grup, a proto si oblast matematiky, která je zajímala, „rozdělili“ na dvě části; F. Klein se soustředil na nespojité a S. Lie na spojité grupy. V Paříži se F. Klein stýkal také s francouzskými matematiky, zejména s Camillem Jordanem (1838–1922), profesorem na École Polytechnique, a studoval jejich práce.

V červenci 1870 proslovil pruský kancléř Otto von Bismarck (1815–1898) útočnou řeč proti francouzské vládě, Francie vyhlásila 19. července Prusku válku a F. Klein se rozhodl Paříž opustit. Krátce sloužil v armádě jako zdravotník, počátkem roku 1871 se však habilitoval a začal přednášet na univerzitě v Göttingen. Právě tehdy učinil své významné objevy, které se týkaly zejména geometrie. V roce 1872 byl ve věku pouhých 23 let jmenován řádným profesorem filozofické fakulty univerzity v Erlangen. Působil zde však pouze do roku 1875, kdy mu bylo nabídnuto výhodnější místo na Technische Hochschule v Mnichově; přednášel zde velkému počtu posluchačů, mezi nimiž bylo i několik budoucích významných matematiků. V srpnu 1875 se F. Klein oženil s Annou Hegelovou (1851–1927), vnučkou významného německého filozofa Georga Wilhelma Friedricha Hegela (1770–1831). Narodily se jim čtyři děti, tři dcery a jeden syn. Nejmladší dcera Elisabeth po svém otci zdědila nadání, studovala matematiku a fyziku, později připravila k vydání některé Kleinovy přednášky.

Po pětiletém působení na Technische Hochschule přesídlil F. Klein do Lipska, kde pracoval v letech 1880 až 1886. Chtěl zde vybudovat školu Riemannovy geometrie a teorie funkcí. Na podzim roku 1882 se však zhroutil a začal propadat těžkým depresím. Jeho kariéra špičkového tvůrčího matematika tím skončila. Roku 1886 se vrátil na univerzitu v Göttingen (na jeho místo v Lipsku přišel S. Lie), kde působil až do roku 1913. Spektrum jeho přednášek bylo široké; přednášel řadu partií matematiky a fyziky, např. teoretickou mechaniku nebo teorii potenciálu. V roce 1913 ze zdravotních důvodů univerzitu opustil, během první světové války se věnoval soukromé výuce matematiky. Zemřel 22. června 1925 v Göttingen.

Obr. 34: Felix Klein

Kleinovy zásluhy v matematice, zejména v geometrii, jsou všestranné. Na univerzitě v Göttingen vybudoval matematické středisko světové úrovně, které se pod jeho vedením stalo významným centrem matematického bádání. Přicházeli sem mladí lidé z celého světa a studovali speciální matematické otázky. Zřídil zde matematickou knihovnu a čítárnu, zavedl pravidelná týdenní diskusní setkání. Kromě geometrie a teorie grup se hlouběji věnoval i algebraickým rovnicím a teorii funkcí; z těchto oblastí publikoval na sedmdesát prací.

V roce 1876 převzal vedení časopisu *Mathematische Annalen*, který roku 1868 založili Alfred Clebsch (1833–1872) a Carl Gottfried Neumann (1832–1925), a přispěl nepochybně ke zvýšení jeho úrovně. Tento časopis se specializoval především na problémy komplexní analýzy, otázky algebraické geometrie a teorie invariantů. Právě pod Kleinovým vedením začaly *Mathematische Annalen* konkurovat významnému časopisu *Journal für die reine und angewandte Mathematik* vydávanému berlínskými matematiky, který měl v té době za sebou již téměř padesátiletou úspěšnou historii. Na více než šedesát let se *Mathematische Annalen* staly jedním z nejvýznamnějších matematických časopisů. V roce 1885 byl F. Klein přijat do londýnské Královské společnosti, roku 1913 se stal členem Berlínské akademie věd.

Ke konci své kariéry se začal zajímat i o výuku matematiky na německých školách, snažil se o její modernizaci. Prosadil, aby se na středních školách vyučovaly základy teorie funkcí a základy diferenciálního a integrálního počtu (tzv. *Kleinsche Reform*). Roku 1908 byl na 4. mezinárodním kongresu matematiků v Římě jmenován předsedou Mezinárodní komise pro vyučování matematice. Pod jeho vedením bylo vydáno několik publikací o výuce matematiky na všech stupních škol. Aktivně se podílel také na vydávání mnohasvazkové *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*, sám vydal čtyři svazky věnované mechanice.

4.2 Základní myšlenka klasifikace geometrií

V následujících třech odstavcích nastíníme v elementární podobě hlavní myšlenku Kleinova přístupu ke klasifikaci různých geometrií.

Elementární eukleidovská geometrie studuje ty vlastnosti geometrických útvarů, které zůstávají zachovány při jejich „pohybech". Většinou takto hovoříme o přímých nebo nepřímých shodnostech. Říkáme, že útvary A a B jsou shodné, je-li možno útvar A přemístit tak, aby splynul s útvarem B. Místo libovolných „pohybů" (shodností) se však můžeme omezit např. pouze na všechna posunutí nebo pouze na všechny rotace kolem pevně zvoleného bodu apod., tj. na množinu nějakých speciálních transformací.

Nechť M je množina nějakých transformací (roviny, prostoru). Útvary A a B (v rovině, v prostoru) pokládáme za „ekvivalentní" (vzhledem k množině M), existuje-li v této množině transformace f, která útvar A převádí na útvar B, tj. platí $f(A) \equiv B$. Přitom požadujeme, aby uvedená relace mezi oběma útvary byla opravdu ekvivalencí, tj. aby byla reflexivní, symetrická a tranzitivní. Odtud vyplývá, že množina M musí být uzavřená vzhledem ke skládání transformací (plyne z tranzitivity), musí obsahovat identickou transformaci (plyne z reflexivity) a s každou transformací musí obsahovat také transformaci k ní inverzní (plyne ze symetrie). Množina M spolu s operací skládání je tedy grupou.

Každá grupa geometrických transformací tedy definuje určitou ekvivalenci geometrických útvarů. Volbou různých grup transformací tak získáváme různé geometrie: volíme-li klasické „pohyby“ (shodnosti), dostáváme eukleidovskou geometrii, afinní transformace vedou ke geometrii afinní, projektivní transformace vedou ke geometrii projektivní apod.

4.3 Grupy

Je třeba zdůraznit, že v sedmdesátých letech 19. století již teorie grup jako matematická disciplína existovala (rodila se přibližně na přelomu dvacátých a třicátých let 19. století), nikoliv však ve své dnešní podobě. Pojem grupy se v matematice objevil v souvislosti se studiem řešitelnosti algebraických rovnic vyšších stupňů, jednalo se o tzv. řešitelnost *v radikálech*.[5] Při těchto bádáních začínali matematici čím dál tím více pracovat s grupami permutací.

V letech 1770 až 1771 sepsal významnou práci o algebraických rovnicích Joseph Louis Lagrange (1736–1813). Jeho spis *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* [Úvahy o algebraickém řešení rovnic][6] se stal velkou inspirací pro mnoho dalších matematiků. J. L. Lagrange se v něm zabýval základní otázkou, proč metody, které umožňují řešení algebraických rovnic stupně nejvýše čtvrtého, zůstávají pro rovnice vyšších stupňů neúspěšné. Tato otázka ho vedla ke studiu racionálních funkcí kořenů rovnic a jejich chování při permutaci kořenů.

Roku 1799 uveřejnil italský matematik Paolo Ruffini (1765–1822) pojednání *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto* [Obecná teorie rovnic, v níž je dokázána nemožnost algebraického řešení obecné rovnice stupně většího než čtyři][7] obsahující „důkaz“ neřešitelnosti algebraické rovnice stupně vyššího než čtvrtého v radikálech. Nebyl však uznán jako úplný, neboť je založen na hypotéze, že *radikály* lze vyjádřit jako racionální funkce kořenů rovnice.

Úplný důkaz neřešitelnosti obecné algebraické rovnice stupně vyššího než čtvrtého v radikálech podal jako první norský matematik Niels Henrik Abel (1802–1829). V roce 1824 na vlastní náklady vydal spis *Mémoire sur les équations algébriques, où on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième dégré* [Pojednání o algebraických rovnicích s důkazem neřešitelnosti obecné rovnice pátého stupně],[8] v němž poprvé prezentoval svůj důkaz. Když

[5] O řešitelnosti algebraické rovnice v radikálech hovoříme, pokud je možno její kořeny vyjádřit vzorcem, v němž jsou použity pouze koeficienty dané rovnice a operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování. Poznamenejme ještě, že slovo *radikál* je tradičním termínem pro odmocninu.

[6] Viz Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin 1(1770), 134–215; 2(1771), 138–253.

[7] Nella stamperia di S. Tommaso d'Aquino, Bologna, 1799, parte prima, 206 stran, parte seconda, str. 207–509.

[8] De l'imprimerie de Groendahl, Christiania, 1824, 8 stran.

začal v roce 1826 August Leopold Crelle (1780–1855) vydávat časopis *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, uveřejnil v prvním ročníku také několik Abelových prací; jednou z nich byl článek *Beweis der Unmöglichkeit algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen* [Důkaz obecné neřešitelnosti algebraické rovnice stupně vyššího než čtvrtého][9] obsahující novou, propracovanější verzi stejného důkazu. N. H. Abel v něm implicitně použil teorii grup a některé Lagrangeovy a Cauchyho výsledky týkající se počtu hodnot, kterých může funkce n proměnných nabývat při jejich permutaci.

Dva měsíce před svou smrtí publikoval N. H. Abel článek *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement* [Pojednání o zvláštní třídě rovnic řešitelných algebraicky],[10] který pojednává o speciální třídě rovnic všech stupňů řešitelných v radikálech, a v němž je mimo jiné dokázáno následující obecné tvrzení:

> *Jestliže všechny kořeny nějaké rovnice lze vyjádřit jako racionální funkce jednoho z nich, označme jej x, a pokud libovolné dva kořeny $\theta_1 x$ a $\theta_2 x$, kde θ_1 a θ_2 jsou racionální funkce, splňují podmínku $\theta_1\theta_2 x = \theta_2\theta_1 x$, potom je uvažovaná rovnice řešitelná v radikálech.*

Uvedené Abelovo tvrzení je přitom speciálním případem hlavního výsledku tzv. *Galoisovy teorie*. O ní bude řeč v následujícím odstavci.

Studiem řešitelnosti algebraických rovnic v radikálech se na přelomu dvacátých a třicátých let 19. století intenzivně zabýval také Evariste Galois (1811–1832). Jako první použil v roce 1830 termín *grupa* (v originále *groupe*), a to nejprve ve smyslu množina. Při studiu řešitelnosti obecné algebraické rovnice v radikálech našel určitou podmínku týkající se „substitucí na permutacích“.[11] Substituce rozdělil do „grup“ a odhalil jejich uzavřenost (složení dvou substitucí je opět substituce). Každé rovnici potom přiřadil grupu permutací. Dále se zabýval rozkladem grupy na pravé a levé třídy podle podgrupy a uvažoval případ, kdy se oba rozklady shodují, tj. případ, kdy je uvažovaná podgrupa normální. Poté rozvinul obecnou teorii (dnes nazývanou *Galoisovou*), která umožňuje podle struktury tzv. *Galoisovy grupy*[12] dané rovnice rozhodnout o její řešitelnosti v radikálech. Platí následující tvrzení:

> *Rovnice $f(x) = 0$, kde f je polynom nad tělesem K, je řešitelná v radikálech právě tehdy, když je její Galoisova grupa G řešitelná, tj. právě tehdy, když existuje posloupnost podgrup $G \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_m = E$ taková, že každá grupa H_k je normální podgrupou grupy H_{k-1} a všechny faktorové grupy H_{k-1}/H_k jsou Abelovy.*

[9] Viz Journal für die reine und angewandte Mathematik 1(1826), 65–84.

[10] Viz Journal für die reine und angewandte Mathematik 4(1829), 131–156.

[11] E. Galois permutací rozuměl pořadí kořenů a substituci chápal jako vzájemně jednoznačné zobrazení množiny kořenů.

[12] *Galoisova grupa* rovnice $f(x) = 0$, kde f je polynom nad tělesem K, je grupa všech automorfismů rozkladového nadtělesa polynomu f, které jsou identické na K.

Pro ireducibilní rovnice prvočíselného stupně dokázal E. Galois toto tvrzení:

> *Ireducibilní rovnice $f(x) = 0$, jejímž stupněm je nějaké prvočíslo n, je řešitelná v radikálech právě tehdy, když každá substituce grupy G převádí kořen x_k do kořenu $x_{k'}$ pomocí následující lineární transformace indexu k: $k' = ak + b \pmod{n}$.*

Protože Galoisova grupa obecné rovnice 5. stupně výše uvedenou podmínku nesplňuje, vyplývá odtud, že taková rovnice není řešitelná v radikálech.

E. Galois své výsledky publikoval útržkovitě v letech 1830 až 1832; hlavní myšlenky jeho rukopisu *Mémoire sur la résolution algébrique des équations* [Pojednání o algebraickém řešení rovnic] publikoval až v roce 1846 Joseph Liouville v časopisu *Journal de mathématiques pures et appliquées*.[13]

Grupami permutací se zabýval také Augustin Louis Cauchy (1789–1857). V článcích uveřejněných v letech 1844 až 1846 dokázal řadu poznatků o grupách substitucí, které jsou podgrupami symetrické grupy.[14] Zdůraznil také rozdíl mezi permutacemi a substitucemi; permutaci představuje libovolné pořadí n proměnných, substituce je přechod od jedné permutace k jiné.[15] Později se „substituce" ve významu, v jakém je používali A. L. Cauchy a E. Galois, začaly nazývat naopak „permutacemi", což lépe vystihovalo původní význam latinského slova *permutare* (zaměňovat, vyměňovat).

V padesátých a šedesátých letech 19. století pak začal prudký a systematický rozvoj teorie grup. Arthur Cayley (1821–1895) zavedl v roce 1854 pojem grupy a jako první podal poměrně moderní definici tohoto pojmu. V práci *On the theory of groups, as depending on the symbolic equation* $\Theta^n = 1$ [O teorii grup v souvislosti se symbolickou rovnicí $\Theta^n = 1$][16] definoval grupu jako abstraktní množinu symbolů s asociativní operací, která obsahuje jednotkový prvek a rovnice $ax = b$ a $ya = b$ v ní mají jednoznačná řešení pro každá a a b. Dále uvedl možnost definovat grupu tabulkou popisující násobení jejích prvků (tzv. *Cayleyho tabulka*) a zkoumal způsoby jejího zadávání pomocí generátorů. Poznamenal přitom, že prvky grupy mohou být libovolné objekty. Kromě pojmu grupy zavedl v této práci řadu dalších základních pojmů abstraktní teorie; objevuje se zde např. pojem izomorfismu. Cayleyho výsledkům nebyla zpočátku věnována příliš velká pozornost, později se však staly významnými zejména pro svou exaktní definici grupy a objevily se prakticky ve všech učebnicích.

[13] Viz *Analyse d'un Mémoire sur la résolution algébrique des équations*, Bulletin des Sciences mathématiques, physiques et chimiques 13(1830), 271–272; Journal de mathématiques pures et appliquées 11(1846), 395–396.

[14] Viz Cauchy A. L., *Oeuvres complètes*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009, 516 stran.

[15] Jak jsme již poznamenali, E. Galois používal stejnou terminologii, avšak nepříliš důsledně.

[16] Viz The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science 7(1854), 40–47, 408–409; 18(1859), 34–37.

Zásadní význam pro další rozvoj teorie grup mělo dílo francouzského matematika Camilla Jordana (1838–1922). V roce 1868/69 publikoval rozsáhlé pojednání *Mémoire sur les groupes des mouvements* [Pojednání o grupách pohybů][17] obsahující analýzu fyzikálních pohybů pevných těles v prostoru,[18] jež ho vedla ke klasifikaci grup pohybů. Teorii grup dále aplikoval na výsledky A. Bravaise[19] a dalších fyziků, které se týkaly krystalové mřížky. Roku 1870 vyšel v Paříži Jordanův spis *Traité des substitutions et des équations algébriques* [Traktát o substitucích a algebraických rovnicích][20] obsahující mimo jiné první systematický výklad Galoisovy teorie, který je důsledně vybudován na teorii grup permutací. Tato práce navíc přináší podrobné shrnutí všech dosavadních výsledků teorie grup včetně Jordanových vlastních výsledků. Věnuje se např. zobrazení jedné grupy na jinou nebo na sebe samu. Poprvé se zde objevuje termín homomorfismus, ovšem ve významu surjektivního homomorfismu, tj. epimorfismu.

Koncem dubna 1870 přijel na studijní pobyt do Paříže Felix Klein a spolu se Sophusem Lie se z Jordanovy knihy *Traité des substitutions* seznámili s teorií grup permutací. Oba pak studiu grup věnovali velkou pozornost a přenesli pojem grupy do geometrie.[21] Právě Jordanovo dílo zásadním způsobem ovlivnilo Kleinův přístup ke klasifikaci různých geometrií, dalo mu do rukou rozhodující algebraický aparát k vypracování Erlangenského programu.

F. Klein ve své tehdejší práci využil nejen nejnovější poznatky teorie grup, ale také některé podněty teorie invariantů. Klasická teorie invariantů vznikla kolem roku 1850 v Anglii. Mezi nejvýznamnější matematiky zabývající se teorií invariantů patřili již zmíněný Arthur Cayley a James Joseph Sylvester (1814–1897), který vytvořil řadu pojmů a termínů této teorie, včetně základního termínu *invariant*.

Pro Kleinův Erlangenský program se podnětnou inspirací stal Cayleyho spis *A sixth memoir upon quantics* [Šesté pojednání o kvantikách][22] z roku 1859, v němž bylo ukázáno, jak chápat metrické vlastnosti geometrických objektů z pohledu teorie invariantů. Základní Cayleyho přístup spočívá v myšlence, že vlastnosti geometrických útvarů, které jsou invariantní vůči geometrickým transformacím, se musí projevit také analyticky ve formě algebraických invariantů *kvantik*,[23] které daným geometrickým útvarům odpovídají.

---

[17] Viz Annali di matematica pura ed applicata 2(1868/69), 167–215, 322–345.

[18] C. Jordan zkoumal hlavně šroubový pohyb, otočení kolem osy a posunutí ve směru osy.

[19] Auguste Bravais (1811–1863), francouzský přírodovědec; zabýval se zejména krystalografií. Odvodil čtrnáct topologicky odlišných krystalových mřížek – tzv. *Bravaisovy mřížky*.

[20] Gauthier-Villars, Paris, 1870, 667 stran.

[21] F. Klein a S. Lie teorii grup v geometrii využili již roku 1871 v práci o W-křivkách v rovině, tj. křivkách, které jsou invariantní při jednoparametrické grupě komutativních lineárních transformací. Viz Klein F., Lie S., *Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen*, Mathematische Annalen 4(1871), 50–84; též [K8], 424–459.

[22] Viz Philosophical Transactions of the Royal Society of London 149(1859), 61–90.

[23] Pod pojmem *kvantika* (v originále *quantic*) A. Cayley rozuměl v dnešní terminologii formu, tj. homogenní polynom n-tého stupně v m neurčitých s konstantními koeficienty.

4.4 Geometrie

V následujících odstavcích uvedeme velmi stručný přehled vývoje geometrie až do vzniku Erlangenského programu.

Počátky geometrie jsou spojeny se zeměměřictvím, vytyčováním a konstrukcí staveb a využíváním geometrických tvarů, vzorů a ornamentů. Ve starém Egyptě a Mezopotámii se geometrie rozvíjela v souvislosti s řešením praktických problémů, které postupně vedly k počátkům teoretické geometrie. Vysokého stupně abstrakce dosáhlo studium geometrie v Řecku v 6. až 4. stol. př. n. l. Kolem roku 300 př. n. l. sepsal Eukleidés z Alexandrie (asi 325–265 př. n. l.) významné dílo *Základy* (řecky *Stoicheia*, latinsky *Elementa*) obsahující většinu tehdejších matematických poznatků. Eukleidův výklad je založen na logické dedukci jednotlivých matematických vět z definic, postulátů a axiomů. Geometrii obsaženou v *Základech* dnes označujeme jako *klasickou eukleidovskou geometrii.* Prakticky až do konce 18. století zůstávala předmětem studia celé řady matematiků a byla jediným tehdy známým „druhem" geometrie.

V 17. století došlo ke vzniku nových metod studia eukleidovské geometrie. Roku 1637 vydal francouzský matematik René Descartes (1596–1650) krátké filozofické pojednání *Discours de la méthode* [Rozprava o metodě],[24] v němž objasňuje svůj racionalistický přístup ke studiu přírody. Jedním ze tří dodatků k této práci byla kniha *La Géométrie* [Geometrie],[25] v níž autor načrtnul obecnou metodu propojující algebru a geometrii. Právě tato kniha prezentovala hlavní myšlenky *analytické geometrie.* Neobsahuje přitom ani kartézské souřadnice, ani rovnice přímek, ačkoliv jednotlivé rovnice 2. stupně jsou interpretovány jako rovnice vyjadřující kuželosečky. Její velká část je věnována teorii algebraických rovnic, mimo jiné je v ní obsaženo tzv. Descartovo pravidlo znamének. Hlavní Descartův přínos však spočívá v tom, že na eukleidovskou geometrii systematicky aplikoval algebru, v níž bylo v předcházejícím století dosaženo významných výsledků. Poznamenejme, že k základní myšlence analytické geometrie dospěl ve stejné době také francouzský matematik Pierre de Fermat (1601–1665). Jeho práce o tomto tématu však byla publikována se značným zpožděním a vývoj matematiky téměř neovlivnila.[26]

V první polovině 17. století se rovněž objevily první myšlenky *projektivní geometrie.* Jejich autorem je francouzský architekt Girard Desargues (1591–1661). Jeho spis *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan* [Předběžný náčrt pokusu o pochopení jevů při vzájemném

[24] Viz Descartes R., *Discours de la méthode, pour bien conduire sa raison, & chercher la vérité dans les sciences. Plus La Dioptrique, Les Meteores, et La Géométrie. Qui sont des essais de cete methode*, De l'imprimerie de Ian Maire, Leyde (Leiden), 1637, 78 stran.

[25] Český překlad včetně komentáře viz *René Descartes: Geometrie*, z francouzského originálu přeložil Jiří Fiala, Oikoymenh, Praha, 2010, xlvi + 106 stran (protilehlé stránky mají duplicitní stránkování). Kniha navíc obsahuje přetisk prvního latinského vydání z roku 1683 v překladu Franse van Schootena (1615–1660).

[26] Fermatovo pojednání *Ad locos planos et solidos isagoge* sepsané roku 1636 bylo uveřejněno až po jeho smrti. Viz Fermat P., *Varia opera mathematica*, apud Joannem Pech, Tolosae (Toulouse), 1679, 1–8.

styku kužele a roviny][27] z roku 1639 obsahuje některé základní pojmy a myšlenky projektivní geometrie, např. ideu nevlastních bodů. V roce 1648 uveřejnil G. Desargues větu o perspektivních trojúhelnících.[28] Ve své době však jeho dílo zůstalo stranou zájmu. Jednak jej zastínila rozvíjející se analytická geometrie, jednak mohl být překážkou Desarguesův neobvyklý způsob vyjadřování. Ve své práci totiž použil kolem sedmdesáti nových výrazů, z nichž většina byla převzata z botaniky a byla těžko srozumitelná. Jedinou výjimkou je pojem *involuce*, který se používá dodnes. Význam myšlenek, s nimiž G. Desargues přišel, se v plném rozsahu projevil až v 19. století.

Také koncem 18. století a na počátku 19. století vznikaly a rozvíjely se nové geometrické metody. S těmi nejdůležitějšími přišel francouzský matematik Gaspard Monge (1746–1818). V letech 1768 až 1780 působil na vojenské akademii v Mézières, kde ho přípravy přednášek o stavbě pevností přivedly k rozvinutí *deskriptivní geometrie* jako zvláštního odvětví geometrie. Mongeova hlavní idea spočívala v zobrazení trojrozměrných objektů pomocí vhodné projekce do dvou rovin, vodorovné a svislé. Své přednášky uveřejnil v roce 1799 v knize *Géométrie descriptive* [Deskriptivní geometrie].[29] Jako jeden z prvních matematiků začal využívat analytické metody při studiu prostorových křivek a ploch. Jeho práce o tomto tématu byly uveřejněny roku 1807 v knize *Application de l'analyse à la géométrie* [Aplikace analýzy na geometrii],[30] kterou lze považovat za první knihu o *diferenciální geometrii*. Forma výkladu je však značně odlišná od dnešního obvyklého přístupu. V Mongeových pracích lze nalézt kořeny tzv. syntetické i algebraické metody. U jeho žáků se obě metody oddělily; syntetická metoda vedla k *projektivní geometrii*, algebraická metoda se stala základem moderní *analytické a algebraické geometrie*. Hlavními představiteli algebraické geometrie byli v Německu již dříve zmiňovaní A. F. Möbius a J. Plücker, ve Francii M. Chasles a v Anglii A. Cayley.

Jedním z Mongeových žáků byl Jean Victor Poncelet, jenž je považován za zakladatele *projektivní geometrie*. Ovlivněn Mongeovým analytickým přístupem ke geometrii rozvinul novou geometrickou disciplínu, jejíž některé myšlenky naznačil již dvě století před ním G. Desargues. Ponceletův spis *Traité des propriétés projectives des figures* [Pojednání o projektivních vlastnostech útvarů],[31] který vyšel roku 1822 v Paříži, obsáhl všechny důležité pojmy tohoto nového odvětví geometrie, jako např. dvojpoměr, perspektivitu a projektivitu. Tato objemná kniha byla prvním souhrnným pojednáním o projektivní geometrii, která se stala již během dalšího desetiletí ucelenou matematickou teorií. Na Ponceletovy myšlenky navázali zejména švýcarský matematik Jacob Steiner a německý matematik Karl Georg Christian von Staudt (1798–1867).

[27] Publication par voie d'impression à cinquante exemplaires, source René Taton, Paris, 1639, 36 stran.

[28] Viz *Desarguesova věta* v kapitole 1 této monografie.

[29] Viz Monge G., *Géométrie descriptive. Leçons données aux Écoles Normales, l'an 3 de la Republique*, Baudouin, Paris, 1799, 132 stran.

[30] Viz Monge G., *Application de l'analyse à la géométrie, à l'usage de l'École impériale polytechnique*, Bernard, Paris, 1807, 416 stran.

[31] Viz Poncelet J. V., *Traité des propriétés projectives des figures: ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*, Bachelier, Paris, 1822, 426 stran.

Zatímco všechny výše uvedené druhy geometrie „pouze“ vnášejí nové metody do studia geometrie eukleidovské, rodil se na počátku 19. století zcela nový typ geometrie, *geometrie neeukleidovská.*

Otázka, zda pátý Eukleidův postulát o rovnoběžkách je nezávislým axiomem, nebo zda jej lze odvodit z ostatních axiomů, zaměstnávala matematiky více než dva tisíce let. Někteří z nich vypracovali různé „důkazy“ nezávislosti pátého postulátu, které však v nějaké skryté formě tento postulát využívaly. V 18. století se řada matematiků neúspěšně pokoušela Eukleidův postulát o rovnoběžkách dokázat sporem. Dospěli přitom k některým myšlenkám geometrie neeukleidovské. Jmenujme alespoň italského matematika G. Saccheriho (1667–1733), švýcarské matematiky L. Bertranda (1731–1812) a J. H. Lamberta (1728–1777) a francouzského matematika A. M. Legendrea (1752–1833), kteří při svých pokusech dokázat platnost pátého postulátu sporem došli k větám, které dnes řadíme do neeukleidovské geometrie. Žádný z nich však nemůže být označen za objevitele nové geometrie, neboť jejich výsledky byly více méně izolované a nebyla mezi nimi patrná žádná hlubší souvislost.[32]

Německý matematik Carl Friedrich Gauss byl patrně prvním matematikem, který byl zcela přesvědčen o nezávislosti pátého postulátu, a tedy i o tom, že další geometrie, které by se zakládaly na volbě jiného axiomu, jsou logicky možné. Během svého života však o této problematice nic nepublikoval.

Za objevitele neeukleidovské geometrie jsou kromě C. F. Gausse považováni ruský matematik Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792–1856) a maďarský důstojník János Bolyai (1802–1860). N. I. Lobačevskij své myšlenky shrnul roku 1826 ve francouzsky psané práci *Exposition succinte des principles de la Géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des paralèlles* [Stručný výklad základů geometrie s přesným důkazem věty o rovnoběžkách], v níž poprvé ukázal, že axiom o rovnoběžkách není k vybudování geometrie nutný. K vytištění jeho práce však roku 1826 nedošlo pro nepochopení ze strany kolegů; výtah z tohoto rukopisu je obsažen v Lobačevského práci *O načalach geometrii* [O základech geometrie] uveřejněné v letech 1829 až 1830 v časopise kazaňské univerzity, na níž v té době N. I. Lobačevskij působil.

János Bolyai svůj spis o neeukleidovské geometrii dokončil již roku 1825; vyšel však až roku 1832 jako *Appendix, scientiam spatii absolute veram exhibens* [Dodatek vysvětlující absolutně přesnou nauku o prostoru] ke knize jeho otce Farkase (Wolfganga) Bolyaie (1775–1856) nazvané *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos* [Pojednání o základech matematiky pro pilné mladíky].[33] Jak

[32] O objevu neeukleidovské geometrie viz Pavlíček J. B., *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského*, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1953, 142–212.

[33] Viz Bolyai J., *Appendix, scientiam spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica*; in Bolyai F., *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi*, Maros Vásárhely, 1832, 502 stran. Český překlad díla J. Bolyaie „Appendix“ viz Šedivý J. (ed.), *Světonázorová výchova v matematice*, Sborník vybraných referátů z letních škol MPS JČSMF, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1987, 253–296 (přeložili J. Pech a J. Šedivý).

N. I. Lobačevskij, tak i J. Bolyai ve svých pracích považovali pátý Eukleidův postulát za nezávislý axiom a vytvořili geometrii založenou na odlišném axiomu, podle něhož lze k dané přímce daným bodem, který na ní neleží, vést alespoň dvě různé rovnoběžky. Ještě několik desetiletí po svém objevu zůstávala neeukleidovská geometrie nesrozumitelnou a nepochopenou, mnoho vůdčích matematiků ji vůbec neznalo nebo ji odmítalo.

Prvním velkým matematikem, který plně pochopil její význam, byl Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), jenž vytvořil další typ neeukleidovské geometrie. Ve své přednášce *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* [O hypotézách, na nichž spočívají základy geometrie][34] pronesené roku 1854 na univerzitě v Göttingen představil obecnou metrickou geometrii, která zahrnuje celkem tři typy různých geometrií; vedle geometrie Eukleidovy a Lobačevského to je geometrie, jež byla později nazvána geometrií Riemannovou. V této geometrii se každé dvě přímky navzájem protínají, z čehož plyne, že neexistují rovnoběžky.

K obecnému uznání neeukleidovských geometrií došlo až po roce 1870. Přispěl k němu rovněž Felix Klein, který poukázal na to, že kdyby existovaly logické rozpory v neeukleidovské geometrii, byly by stejné rozpory obsaženy také v geometrii eukleidovské. Podle něho se pro Lobačevského geometrii používá také název *hyperbolická geometrie*, pro eukleidovskou název *parabolická geometrie* a pro Riemannovu název *eliptická geometrie*[35].

4.5 Erlangenský program

Nyní se věnujme přímo Erlangenskému programu. Jak již bylo řečeno, v říjnu 1872 předložil Felix Klein na univerzitě v Erlangen text své nástupní profesorské přednášky, která se později stala známou jako Erlangenský program. Sestává z úvodu, deseti kapitol a závěrečných poznámek.

V úvodu F. Klein nastínil tehdejší situaci v geometrii a uvedl, že ve vývoji geometrického bádání zaujímala v posledních padesáti letech přední místo geometrie projektivní. Zdůraznil, že vedle elementární (eukleidovské) a projektivní geometrie existuje celá řada dalších geometrií, např. geometrie reciprokých poloměrů[36] nebo geometrie racionálních transformací. Jeho cílem bylo zformulovat obecný

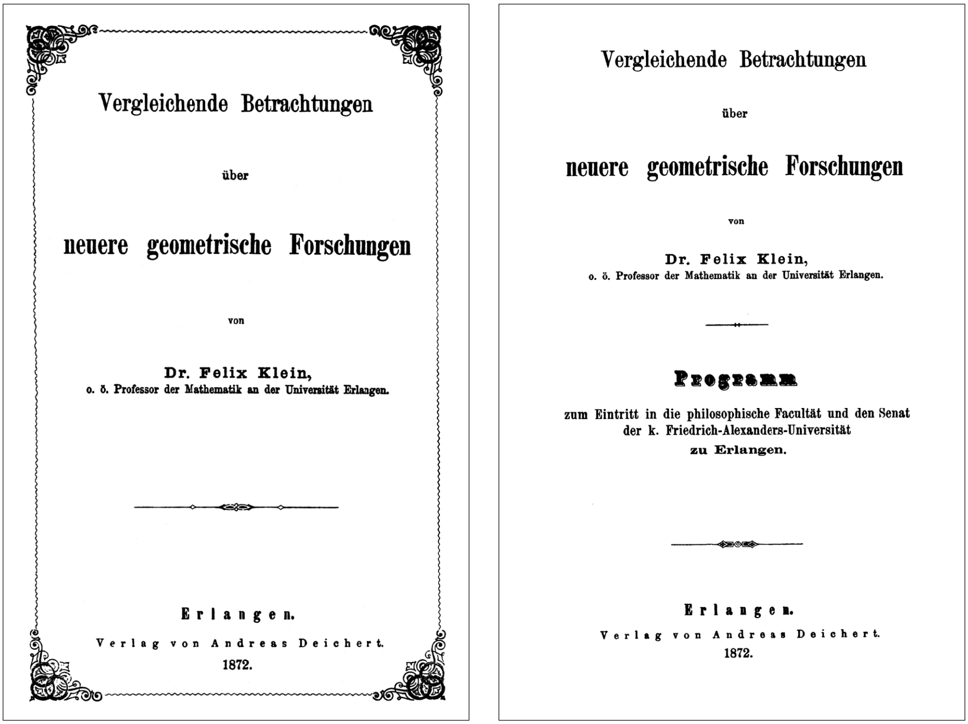
[34] Text přednášky viz Riemann B., *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, aus dem Nachlass des Verfassers mitgetheilt durch R. Dedekind, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13(1866/67), 133–150. Český překlad viz Riemann B., *O hypotézách, které leží v základech geometrie (spolu s vysvětlením H. Weyla)*, z německého originálu přeložil Petr Rys, Univerzita J. E. Purkyně, Pedagogická fakulta, Ústí nad Labem, 1999, 35 stran.

[35] Poznamenejme, že Riemannova geometrie zahrnuje vedle eliptické geometrie ještě *sférickou geometrii*, která při dimenzi 2 splývá s eukleidovskou geometrií na sféře, jestliže jako „přímky“ uvažujeme hlavní kružnice. V této geometrii se každé dvě „přímky“ protínají právě ve dvou bodech, a proto ve sférické geometrii neplatí věta, že každé dva různé body určují právě jednu přímku. Tím se geometrie sférická odlišuje od eliptické, v níž tato věta platí.

[36] Transformací reciprokými poloměry (*die Transformation durch reziproke Radien*) F. Klein rozuměl transformaci, která každému bodu P přiřadí bod P' ležící na přímce OP spojující bod P s počátkem O a pro niž je součin $OP \cdot OP'$ roven dané konstantě. Viz [K7], str. 203. Geometrie reciprokých poloměrů odpovídá v dnešní terminologii tzv. Möbiově inverzní geometrii.

princip, který by jednotlivé geometrie jasně a jednoznačně vymezil a logicky je uspořádal. Podle F. Kleina se jeho záměr jevil oprávněným z toho důvodu, že geometrie, svým obsahem jednotná, rozpadala se rychlým rozvojem v tehdejší době v řadu téměř oddělených disciplín, rozvíjejících se značně nezávisle jedna na druhé. Své geometrické úvahy přitom nepovažoval za nijak převratnou myšlenku, ve své práci chtěl jen přehledně vymezit a shrnout výsledky, jež do větší či menší míry jistě tušili mnozí další matematici.

> *Wenn wir es im Nachstehenden unternehmen, ein solches Prinzip aufzustellen, so entwickeln wir wohl keinen eigentlich neuen Gedanken, sondern umgränzen nur klar und deutlich, was mehr oder minder bestimmt von Manchem gedacht worden ist. Aber es schien um so berechtigter, derartige zusammenfassende Betrachtungen zu publiciren, als die Geometrie, die doch ihrem Stoffe nach einheitlich ist, bei der raschen Entwicklung, die sie in der letzten Zeit genommen hat, nur zu sehr in eine Reihe von beinahe getrennten Disciplinen zerfallen ist, die sich ziemlich unabhängig voneinander weiter bilden.*
>
> ([K2], str. 3–4)



Vergleichende Betrachtungen

über

neuere geometrische Forschungen

von

Dr. Felix Klein,
o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen.

Erlangen.
Verlag von Andreas Deichert.
1872.

Vergleichende Betrachtungen

über

neuere geometrische Forschungen

von

Dr. Felix Klein,
o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen.

Programm

zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat
der k. Friedrich-Alexanders-Universität
zu Erlangen.

Erlangen.
Verlag von Andreas Deichert.
1872.

Obr. 35: Titulní a úvodní strana Erlangenského programu

První kapitola, v níž je zformulována základní myšlenka Kleinova přístupu ke klasifikaci různých geometrií, se týká grup prostorových transformací. F. Klein nejprve zavedl a vysvětlil pojem grupa transformací – rozuměl jím takovou soustavu transformací, která má tu vlastnost, že každá transformace složená z libovolných transformací této soustavy je rovněž její součástí.[37] V dalším textu uvažoval transformace prostoru, které zachovávají geometrické vlastnosti prostorového útvaru. Tyto transformace tvoří grupu, kterou F. Klein nazval *hlavní grupou* (v originále *die Hauptgruppe*). Geometrické vlastnosti se tedy nemění při těchto transformacích, tj. u prvků hlavní grupy. Naopak lze říci, že geometrické vlastnosti lze charakterizovat právě na základě jejich invariantnosti vůči transformacím z hlavní grupy. Geometrii poté definoval následujícím způsobem: *Je dán geometrický prostor a nějaká grupa transformací. Úkolem geometrie je zkoumat právě ty vlastnosti prostoru, které se nemění při transformacích dané grupy. Jinými slovy řečeno, každá geometrie je teorií invariantů dané grupy transformací.* Ocitujme tuto nejdůležitější pasáž v původním znění:

> *Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden. In Anlehnung an die moderne Ausdrucksweise, die man freilich nur auf eine bestimmte Gruppe, die Gruppe aller linearen Umformungen, zu beziehen pflegt, mag man auch so sagen: Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben. Man entwickele die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie.* ([K2], str. 7)

F. Klein přitom zdůrazňoval, že grupu transformací lze volit zcela libovolně.

Grupy transformací umožňují podle F. Kleina nejen zkoumání a klasifikaci daných geometrií, ale rovněž zavedení nových geometrií. Základní geometrické pojmy jsou potom určeny jako invarianty zvolených grup transformací. Pokud však základní geometrické objekty dané geometrie určíme až na základě jejich invariantnosti vůči uvažované grupě transformací, nemůžeme předem definiční obor těchto transformací omezit právě na tyto objekty. F. Klein tedy musel definiční obor transformací stanovit nezávisle na nějakých objektech, čehož dosáhl tím, že za definiční obor zvolil obecně n-dimenzionální projektivní prostor (varietu).[38]

[37] V roce 1893 F. Klein dodatečně do 8. poznámky pod čarou přidal upřesnění, že uvedenou definici grupy transformací je třeba doplnit. Mlčky se totiž předpokládá, že taková grupa navíc obsahuje ke každé transformaci rovněž transformaci inverzní. V případě grup obsahujících nekonečně mnoho transformací to není nutné, avšak pro úplnost by tento požadavek měl být v definici explicitně uveden. Viz [K8], str. 462.

[38] F. Klein použil označení *die gesamte Mannigfaltigkeit* (něm. *die Mannigfaltigkeit* = rozmanitost), které v samotném Erlangenském programu nijak blíže neobjasnil. Vysvětlení lze nalézt v článku Klein F., *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, Mathematische Annalen 4(1871), 573–625. Zde definoval pojem *eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen* takto: Je-li dáno n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sestrojíme obor n-krát nekonečně mnoha systémů hodnot, které získáme tak, že proměnné x nezávisle na sobě necháme proběhnout reálné hodnoty od $-\infty$ do $+\infty$.

F. Klein tedy charakterizoval každou geometrii pomocí grupy geometrických transformací, které zachovávají základní vlastnosti dané geometrie. Např. klasickou eukleidovskou geometrii asocioval s grupou shodností, tj. s grupou transformací, které zachovávají eukleidovskou vzdálenost, a Lobačevského geometrii s grupou transformací, které zachovávají nějakou regulární, bodově reálnou kuželosečku. Ve svých úvahách však opomenul afinní geometrii, kterou lze přirozeným způsobem asociovat s grupou afinit. F. Klein se k tomuto opomenutí roku 1921 sebekriticky přiznal; ve svých přednáškách afinní grupu začal zdůrazňovat teprve od školního roku 1895/96. Jedním z důvodů mohla být skutečnost, že ve druhé polovině 19. století se pozornost matematiků soustředila na analytickou projektivní geometrii, jež byla na vrcholu svého rozkvětu, středem zájmu se staly kolineace (obecná lineární zobrazení), a afinity jako jejich speciální případ ustoupily do pozadí. Jejich postavení v geometrii se radikálně změnilo až ve 20. století.[39]

Ve druhé kapitole F. Klein zavedl uspořádání geometrií, a to tak, že relaci inkluze mezi jednotlivými grupami transformací přenesl na odpovídající geometrie. Pokud nějakou grupu nahradíme jinou grupou, která danou grupu obsahuje, zůstane zachována pouze část původních geometrických vlastností. Přechodem k rozšířené grupě nebo k vlastní podgrupě tak lze přejít od jednoho typu geometrie k jinému.[40] Erlangenský program tedy přinesl jednoduchý, ale důležitý princip uspořádání jednotlivých geometrií.

Ilustrujme nyní Kleinovy myšlenky na příkladech. Nechť M je množina všech bodů nějaké roviny. Uvažujme množinu G všech transformací množiny M, která obsahuje právě všechny transformace složené z osových souměrností (a tedy rovněž všechna posunutí a otočení). Protože složení libovolných transformací z množiny G je opět prvkem množiny G a ke každé transformaci z množiny G existuje v této množině transformace inverzní, je množina G grupou. Jí odpovídající geometrií je *klasická eukleidovská geometrie*, G je grupa shodností. Protože takové vlastnosti jako délka, obsah, shodnost, podobnost, kolmost, rovnoběžnost a kolineárnost bodů jsou invariantní vzhledem ke grupě G, studuje eukleidovská geometrie právě tyto vlastnosti.

Pokud grupu G rozšíříme na nejmenší grupu obsahující navíc všechny stejnolehlosti, získáme grupu podobností. Vzhledem k této grupě již délka, obsah a shodnost invariantní nezůstávají, a tedy se v této geometrii nestudují. Podobnost, kolmost, rovnoběžnost a kolineárnost bodů se však stále zachovávají, a jsou proto předmětem studia této geometrie. Obdobně projektivní geometrie studuje ty vlastnosti, které zůstávají invariantní vzhledem ke grupě projektivních transformací. Z výše zmíněných vlastností se v tomto případě zachovává pouze kolineárnost bodů. Významným invariantem této grupy je také dvojpoměr čtyř kolineárních bodů.

[39] Zásluhu na tom má Hermann Weyl (1885–1955), jenž ve svém díle *Raum – Zeit – Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie* [We1] pojednal afinní geometrii axiomaticky, v souvislosti s geometrií vektorového prostoru.

[40] F. Klein tento přístup přiblížil na příkladu sférické trigonometrie, již lze získat z eukleidovské geometrie přechodem od grupy shodností k její podgrupě, která zachová invariantní nějaký bod. Podobným způsobem by bylo možné od projektivní geometrie přejít ke geometrii afinní, pokud bychom místo grupy kolineací uvažovali její podgrupu, která zachová invariantní nějakou rovinu.

V následující tabulce (viz tab. 2) je vybráno pět základních geometrických vlastností a u každé ze čtyř zvolených grup transformací je uvedeno, zda uvažované transformace dané vlastnosti zachovávají, či nikoliv.

vlastnost/grupa	*grupa shodností*	*grupa podobností*	*grupa afinit*	*grupa projektivit*
poloha	mění se	mění se	mění se	mění se
velikost	zachována	mění se	mění se	mění se
kolmost	zachována	zachována	mění se	mění se
rovnoběžnost	zachována	zachována	zachována	mění se
kolineárnost	zachována	zachována	zachována	zachována

Tab. 2: Invarianty grup transformací

Jednotlivé grupy lze relací inkluze uspořádat takto:

$$\begin{matrix}\text{grupa}\\ \text{shodností}\end{matrix} \subset \begin{matrix}\text{grupa}\\ \text{podobností}\end{matrix} \subset \begin{matrix}\text{grupa}\\ \text{afinit}\end{matrix} \subset \begin{matrix}\text{grupa}\\ \text{projektivit}\end{matrix}$$

Každé grupě přitom přísluší odpovídající geometrie. Grupě shodností odpovídá eukleidovská geometrie, grupě podobností odpovídá „podobnostní“ geometrie, grupě afinit odpovídá afinní geometrie a grupě projektivit odpovídá projektivní geometrie. Z výše uvedeného schématu inkluzí grup transformací tak získáme následující uspořádání klasických geometrií:

$$\begin{matrix}\text{eukleidovská}\\ \text{geometrie}\end{matrix} \supset \begin{matrix}\text{podobnostní}\\ \text{geometrie}\end{matrix} \supset \begin{matrix}\text{afinní}\\ \text{geometrie}\end{matrix} \supset \begin{matrix}\text{projektivní}\\ \text{geometrie}\end{matrix}$$

Kleinova jednotná definice vévodila geometrii přibližně padesát let. Dnes je již zřejmé, že všechny typy geometrií do jeho schématu začlenit nelze, příkladem jsou algebraická nebo diferenciální geometrie. Navíc je třeba upřesnit, že geometrie není jednoznačně určena pouze geometrickým prostorem, v němž pracujeme, a volbou nějaké grupy transformací. Je ještě navíc potřeba specifikovat, které geometrické objekty bereme za základní stavební prvky uvažované geometrie. Pokud uvažujeme např. projektivní rovinu a grupu projektivních transformací, nezáleží na tom, zda za základní prvky vezmeme body nebo přímky, vždy získáme stejný geometrický systém (plyne z platnosti principu duality). V rovinné eukleidovské geometrii, v níž princip duality neplatí, bychom však získali v závislosti na volbě základních elementů dva různé geometrické systémy.

Např. pokud trojúhelník zadáme pomocí jeho stran, které leží na třech různých přímkách, z nichž každé dvě jsou různoběžné, pak „součet vzdáleností všech dvojic stran“, tj. součet velikostí úhlů, které strany navzájem svírají, je pro všechny trojúhelníky stejný; v obloukové míře je roven 2π rad. Na druhou stranu, pokud trojúhelník určíme pomocí trojice různých, nekolineárních bodů, pak součet jejich vzdáleností, tj. obvod uvažovaného trojúhelníku, je pro různé trojúhelníky různý. Každý geometrický systém je tedy zcela jednoznačně určen volbou tří základních charakteristik – geometrického prostoru, grupy transformací, které zachovávají podstatné vlastnosti objektů, a základního prvku uvažované geometrie, z něhož jsou složeny geometrické objekty.

Z hlediska teorie grup lze význam volby základního prvku uvažované geometrie vysvětlit následovně. Uvažujme všechny transformace obsažené ve zvolené grupě transformací G, které zachovávají základní prvek uvažované geometrie (tj. zobrazí jej opět na sebe). Takové transformace zřejmě tvoří grupu, která je podgrupou grupy G – nazývá se *stabilizační podgrupou* příslušející uvažované geometrii se zvoleným základním prvkem. Pokud tedy např. grupa G je tvořena všemi shodnostmi eukleidovské roviny a základním prvkem geometrie je bod, potom stabilizační podgrupa bude tvořena všemi otočeními kolem uvažovaného bodu. Pokud však základním prvkem bude přímka, budou stabilizační podgrupu tvořit všechna posunutí ve směru zvolené přímky, osová souměrnost podle zvolené přímky a všechny středové souměrnosti podle bodů zvolené přímky. V řeči teorie grup budou dva geometrické systémy totožné, pokud se budou shodovat i ve stabilizačních podgrupách. Základní prvky takových geometrických systémů se přitom mohou lišit, příkladem je výše zmiňovaná projektivní geometrie.[41]

Další kapitoly Erlangenského programu již okomentujeme jen stručně.

Třetí kapitola je věnována projektivní geometrii. F. Klein zde mimo jiné uvedl, že každá prostorová transformace, která nenáleží hlavní grupě, může být využita k přenesení vlastností známého útvaru na útvar nový. Kromě projektivních transformací uvažoval také tzv. dualistické a imaginární transformace; současně s nimi zavedl imaginární prvky.

Ve čtvrté kapitole se F. Klein zabýval „přenášením prostřednictvím zobrazení“ (v originále *Übertragung durch Abbildung*). Uvažoval varietu A jako definiční obor transformací grupy B. Pokud pomocí nějakého zobrazení přejdeme od variety A k jiné varietě A', změníme tímto zobrazením grupu B na grupu B', jejíž transformace se vztahují k varietě A'. Vlastnosti útvarů variety A se přenesou na odpovídající útvary variety A'. Tuto myšlenku ilustroval na příkladech.

Pátá kapitola je mimo jiné věnována tzv. přímkové geometrii. Již Kleinův učitel J. Plücker poukázal roku 1865 na to, že geometrie nemusí být vybudována pouze na bodu jako základním prvku; přímky, roviny nebo kružnice lze též užít jako základní prvky nějaké geometrie. F. Klein v této kapitole zdůraznil, že základními prvky geometrie mohou být libovolné útvary uvažované variety.

[41] Poznamenejme, že F. Klein považoval dva geometrické prostory M a M', jimž přísluší grupy transformací G a G', za identické, pokud existuje takové vzájemně jednoznačné zobrazení $f\colon M \to M'$, které indukuje izomorfismus $\varphi\colon G \to G'$ mezi grupami transformací.

Als Element der geraden Linie, der Ebene, des Raumes, überhaupt einer zu untersuchenden Mannigfaltigkeit kann statt des Punctes jedes in der Mannigfaltigkeit enthaltene Gebilde: die Punctgruppe, ev. die Curve, die Fläche u. s. w. verwandt werden. ... Aber so lange wir der geometrischen Untersuchung dieselbe Gruppe von Aenderungen zu Grunde legen, bleibt der Inhalt der Geometrie unverändert, das heisst, jeder Satz, der bei einer Annahme des Raumelements sich ergab, ist auch ein Satz bei beliebiger anderer Annahme, nur die Anordnung und Verknüpfung der Sätze ist geändert. Das Wesentliche ist also die Transformationsgruppe; die Zahl der Dimensionen, die wir einer Mannigfaltigkeit beilegen wollen, erscheint als etwas Secundäres.
([K2], str. 16)

Dále zde uvedl souvislost projektivní geometrie roviny s teorií binárních forem, neboli s projektivní geometrií přímky, kterou lze ztotožnit s projektivní geometrií kuželosečky nahrazením každého bodu přímky dvojicí bodů, v nichž uvažovaná přímka protne danou kuželosečku.

Die Theorie der binären Formen und die projectivische Geometrie der Ebene unter Zugrundelegung eines Kegelschnittes sind gleichbedeutend. ... Die Theorie der binären Formen und die allgemeine projectivische Massgeometrie in der Ebene sind dasselbe. ([K2], str. 17)

F. Klein přitom odkázal na tzv. Hesseův princip (v originále *das Hessesche Übertragungsprinzip*).[42] Obdobným způsobem, s využitím homogenních souřadnic, našel souvislost mezi projektivní geometrií prostoru a teorií bikvadratických (kvaternárních) forem.

V šesté kapitole se F. Klein zabýval geometrií reciprokých poloměrů (inverzní geometrií) a porovnával ji s projektivní geometrií. Uvedl, že v projektivní geometrii jsou základními pojmy bod, přímka a rovina, zatímco kružnice, resp. sféra jsou pouze speciálními případy kuželosečky, resp. plochy druhého stupně. Naproti tomu v geometrii reciprokých poloměrů jsou základními pojmy bod, kružnice a sféra; přímka a rovina jsou speciálními případy útvarů, které obsahují nekonečně vzdálený (nevlastní) bod.[43] Dále našel souvislost mezi geometrií reciprokých poloměrů v rovině a projektivní geometrií na ploše druhého stupně (na kvadrice). V závěru kapitoly se věnoval reprezentaci geometrie reciprokých poloměrů pomocí teorie binárních forem komplexních proměnných.

V sedmé kapitole F. Klein navázal na některé předchozí myšlenky a dále je rozvíjel. Připomněl, že geometrii roviny lze propojit s geometrií na kuželosečce tím, že přímkám roviny přiřadíme dvojice bodů, v nichž přímky danou kuželosečku protínají. Obdobně můžeme dát do souvislosti geometrii prostoru s geometrií na

[42] Ludwig Otto Hesse (1811–1874), německý matematik. Hesseův princip je založen na skutečnosti, že pokud přímku v projektivní rovině zobrazíme z nějakého bodu libovolné kuželosečky na tuto kuželosečku, potom kolineace přímky jsou určeny kolineacemi roviny, které kuželosečku zobrazí samu na sebe, a naopak. Toto zobrazení určuje izomorfismus mezi grupou kolineací přímky a grupou kolineací roviny, které danou kuželosečku zachovávají. Viz Hesse L. O., *Ein Uebertragungsprincip*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 66(1866), 15–21.

[43] Elementární geometrii získáme, pokud tento bod pevně zafixujeme.

sféře tím, že každé rovině prostoru přiřadíme kružnici, ve které uvažovaná rovina danou sféru protíná. Pomocí stereografické projekce lze geometrii na sféře převést na geometrii v rovině; proto si budou navzájem odpovídat prostorová geometrie, jejímiž základními prvky jsou roviny a jejíž grupa obsahuje lineární transformace zachovávající danou sféru, a rovinná geometrie, jejímiž základními prvky jsou kružnice a jejíž grupou je grupa reciprokých poloměrů. Uvedenou prostorovou geometrii dále zobecnil; uvažoval obsáhlejší grupu a dospěl k tzv. Lieově sférické geometrii. Na závěr zmínil, že výsledné rozšíření lze pomocí určitého zobrazení přenést také na rovinnou geometrii.

Osmá kapitola přibližuje další metody založené na zkoumání nějaké grupy bodových transformací. Samostatný odstavec se týká tehdy ještě relativně neznámé topologie (v originále *die Analysis situs*), kterou F. Klein charakterizoval jako teorii invariantů spojitých bodových transformací. Dále se věnoval geometrii racionálních transformací; ukázal, že na přímce jsou racionální transformace totožné s lineárními transformacemi, v rovině se jedná o tzv. Cremonovy transformace, které lze vytvořit složením kvadratických transformací. V závěru kapitoly se zabýval grupou všech bodových transformací; uvedl, že libovolná bodová transformace nekonečně malé části prostoru vždy odpovídá nějaké lineární transformaci.

V deváté kapitole F. Klein pojednal o grupě všech kontaktních transformací. Kontaktní transformací rozuměl každou substituci, která proměnné x, y, z a jejich parciální diferenciální podíly označené $p = \frac{dz}{dx}$ a $q = \frac{dz}{dy}$ vyjadřuje pomocí nových veličin x', y', z', p', q'. Název je odvozen ze skutečnosti, že dotýkající se plochy se při těchto transformacích zobrazí opět na plochy, které se dotýkají. Pokud za základní prvky geometrie vezmeme body, lze kontaktní transformace rozdělit do tří skupin podle toho, zda uvažované transformace bodům přiřazují opět body (tj. jedná se o bodové transformace), nebo křivky, nebo plochy. F. Klein ve svých dalších úvahách volil za základní prvek prostoru systém hodnot x, y, z, p, q. Kontaktní transformace lze poté ekvivalentně definovat jako právě ty substituce pěti proměnných x, y, z, p, q, které zachovávají vztah $dz - p\,dx - q\,dy = 0$. Předmětem Kleinova dalšího zkoumání byly variety, které lze vyjádřit pomocí soustavy parciálních diferenciálních rovnic prvního stupně.

Poslední, desátá kapitola rozšiřuje pojem „varieta“. F. Klein zde připomněl, že všechny geometrické úvahy provedené v prostoru lze přenést také na libovolnou varietu. Dále se krátce zmínil o jedné oblasti moderní algebry, kterou je teorie invariantů. V závěru kapitoly demonstroval svůj geometrický přístup k prostorům s konstantní Gaussovou křivostí. Důvodem je souvislost s Lobačevského hyperbolickou geometrií, jež se lokálně realizuje na prostorech se zápornou konstantní křivostí, a s Riemannovou eliptickou geometrií, jež se lokálně realizuje na prostorech s kladnou konstantní křivostí.

Na závěr F. Klein připojil ještě sedm poznámek. V prvních dvou poukázal na svůj hlavní záměr, jenž ho přivedl k využití teorie grup v geometrii; doufal, že se mu podaří vnést do roztříštěné geometrie opět řád, jednotu a nové perspektivy. První poznámka pojednává o rozporu mezi syntetickým a analytickým přístupem v geometrii, druhá kritizuje tehdejší přílišnou separaci geometrie do jednotlivých, úzce zaměřených disciplín. Pátá poznámka se týká neeukleidovské geometrie.

První reakce na Erlangenský program

F. Klein v Erlangenském programu prezentoval svůj jednotný pohled na geometrii. Do té doby byly jednotlivé geometrie (eukleidovská, projektivní, hyperbolická, eliptická) zkoumány odděleně. Kleinovy výsledky však nebyly ihned pochopeny a přijaty. Ještě dvacet let poté zůstávalo toto jeho dílo široce neznámé; zmínky o Erlangenském programu z uvedené doby nacházíme spíše výjimečně. Lze se domnívat, že s Kleinovými geometrickými výsledky byla krátce po roce 1872 nejlépe seznámena italská matematická komunita.[44] Později bylo zjištěno, že několik dalších matematiků, např. Henri Poincaré (1854–1912),[45] Wilhelm Karl Joseph Killing (1847–1923)[46] a Eduard Study (1862–1922),[47] přišlo nezávisle na Kleinovi na podobné myšlenky. Erlangenský program se stal všeobecně známým až poté, co jej F. Klein znovu otiskl v roce 1893 v časopisu *Mathematische Annalen*.

Česká matematická komunita nevěnovala Erlangenskému programu dlouhou dobu prakticky žádnou pozornost. V *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky*, jenž začal vycházet právě v roce 1872, není z té doby o Kleinově programu ani krátká zmínka. První referenci nalezneme v časopisu až v roce 1906 v rámci recenze učebnice *Lehrbuch der analytischen Geometrie*, jejímiž autory jsou L. Heffter a C. Koehler.[48] Kniha obsahuje výklad základů geometrie v duchu základní myšlenky Erlangenského programu, recenzent Jan Vojtěch (1879–1953) proto nejprve krátce popsal Kleinův „důležitý princip, jenž poskytuje neobyčejně jasný pohled na podstatu celé geometrie i jednotlivých jejích částí“.

Možná pod vlivem výše uvedené knihy sepsal Jan Vojtěch článek *Geometrické transformace prvního stupně v rovině a jich grupy*, jenž byl na pokračování uveřejněn v následujících dvou číslech časopisu.[49] Obsahuje systematický přehled

---

[44] O vlivu Erlangenského programu na geometrické práce vybraných italských matematiků viz Boi L., *The influence of the Erlangen Program on Italian geometry, 1880–1890: n-dimensional geometry in the works of D'Ovidio, Veronese, Segre and Fano*, Archives Internationales d'Histoire des Sciences 40(1990), 30–75.

[45] H. Poincaré byl ve své práci ovlivněn dílem C. Jordana a objevem neeukleidovské geometrie. Roku 1880 dospěl k závěru, že geometrie studuje grupy operací tvořených takovými přemístěními geometrického objektu, které ho nedeformují. Svoji myšlenku vyložil v článku obsahujícím základy teorie Fuchsových funkcí a diferenciálních rovnic. Článek zaslal do soutěže vypsané pařížskou akademií věd, ale protože žádnou cenu nezískal, nebyl tehdy publikován; byl objeven a prozkoumán teprve o sto let později. Viz Gray J. J., *The three supplements to Poincaré's prize essay of 1880 on Fuchsian functions and differential equations*, Archives Internationales d'Histoire des Sciences 32(1982), 221–235.

[46] W. Killing pod vlivem prací H. Helmholtze a B. Riemanna studoval jednotlivé geometrie z pohledu teorie grup; viz Killing W., *Erweiterung des Raumbegriffes*, Programm Braunsberg, 1884, 21 stran. Zatímco F. Klein se soustředil na klasifikaci známých geometrií, W. Killing zdůrazňoval potřebu systematické a úplné klasifikace všech možných forem prostoru. Jeho výzkumný program zahrnoval mimo jiné problém kompletní klasifikace všech Lieových algeber nad tělesem komplexních čísel.

[47] E. Study byl v kontaktu se S. Lie, pod vlivem Grassmannovy knihy nazvané *Die Lineale Ausdehnungslehre* (1844) rozpracoval algebraické pojetí geometrie s využitím teorie invariantů.

[48] Viz Heffter L., Koehler C., *Lehrbuch der analytischen Geometrie*, Band I: *Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1905, 517 stran. Recenze viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 35(1906), 134–136.

[49] Viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 35(1906), 249–275, 377–397.

všech geometrických transformací v rovině. J. Vojtěch se zaměřil na vyšetřování transformací, které vzniknou skládáním jednoduchých transformací – uvažoval středové souměrnosti, translace, osové souměrnosti (pravoúhlé i šikmé), rotace a homothetie; postupně dospěl i k afinním a obecným kolineárním transformacím. Své výsledky dokládal na základě názorných konstrukcí, uvedl a odvodil však i analytická vyjádření všech transformací.

4.6 Elementární matematika

V letech 1908 až 1911 postupně vyšly tři díly Kleinových přednášek *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* [Elementární matematika z vyššího hlediska], které byly určeny středoškolským učitelům a studentům. Každý díl má tři části. První je věnován aritmetice, algebře a analýze, obsahuje přednášky konané na univerzitě v Göttingen v zimním semestru 1907/08; byl vydán roku 1908. Druhý díl se týká geometrie, obsahuje přednášky konané v letním semestru 1908; byl vydán roku 1909. Ve třetím díle jsou mimo jiné studovány funkce reálné proměnné (zejména jejich znázornění v pravoúhlé soustavě souřadnic) a rovinné křivky; byl vydán roku 1911.

Ocitujme úvodní text z Kleinovy předmluvy k prvnímu vydání prvního dílu.[50] F. Klein v něm komentuje, komu je tato kniha zejména určena, tedy učitelům vyšších středních škol a studentům. V závěru úryvku specifikuje svůj zamýšlený záměr, tj. vyložit v knize obsah a základy matematiky s ohledem na skutečné potřeby výuky, a to z hlediska moderní vědy, ale zároveň co nejjednodušším, nejpodnětnějším a nejpřesvědčivějším způsobem.

> *Die neue Autographie, welche ich hiermit dem mathematischen Publikum und ganz besonders den Lehrern der Mathematik an unseren höheren Schulen unterbreite, ist als eine erste Fortsetzung jener Vorträge „über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen", speziell über „die Organisation des mathematischen Unterrichts" gedacht, die ich im vorigen Jahre mit Herrn Schimmack zusammmen im Teubnerschen Verlag habe erscheinen lassen. An die damals gegebene Übersicht über die verschiedenen Formen der Unterrichtsaufgabe, die dem Mathematiker gestellt sein kann, sollen sich jetzt, allgemein zu reden, Entwicklungen über den Unterrichtsstoff selbst schließen, in denen ich bemüht bin, dem Lehrer – oder auch dem reiferen Studenten – Inhalt und Grundlegung der im Unterricht zu behandelnden Gebiete, unter Bezugnahme auf den tatsächlichen Unterrichtsbetrieb, vom Standpunkte der heutigen Wissenschaft in möglichst einfacher und anregender Weise überzeugend darzulegen.*

[50] Viz Klein F., *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Teil I: *Arithmetik, Algebra, Analysis*, Vorlesungen gehalten im Wintersemester 1907–08 von F. Klein, Ausgearbeitet von E. Hellinger, B. G. Teubner, Leipzig, 1908; citace z první strany nestránkované předmluvy.

Ve druhém dílu jsou mimo jiné obsaženy základní myšlenky Erlangenského programu. V jeho první části F. Klein nejprve zkoumá geometrické prostory a jejich základní vlastnosti. Ve druhé se podrobně věnuje jednotlivým typům geometrických transformací a jejich analytickým vyjádřením.[51] Poslední, třetí část představuje systematické pojednání o geometrii a jejích základech a zahrnuje základní myšlenky klasifikace geometrií pomocí geometrických transformací.

F. Klein zde nejprve uvažuje „speciální lineární substituce“ – posunutí, otáčení, středovou a osovou souměrnost a podobná zobrazení. Geometrii poté definuje jako teorii invariantů těchto lineárních substitucí. Uvádí některé geometrické vlastnosti, které se při těchto transformacích nemění, jejich souhrn nazývá metrickou geometrií. Poté odvozuje další „druhy“ geometrie. Začíná afinními transformacemi, které jsou zobecněním výše uvedených lineárních substitucí, a dochází k afinní geometrii, jakožto teorii invariantů afinních transformací. Poté uvažuje projektivní transformace, jež afinní transformace zahrnují jako speciální případ. Geometrické vlastnosti, které se při projektivních transformacích nemění, se zřejmě zachovávají také při transformacích afinních. Tím lze z afinní geometrie vyčlenit geometrii projektivní, jako teorii invariantů projektivních transformací.[52]

Pomocí stejného principu odvozuje F. Klein geometrii reciprokých poloměrů a topologii, kterou nazývá *die Analysis situs*. Tento přístup dále precizuje na základě pojmu grupa a formuluje obecný princip umožňující charakterizovat jednotlivé geometrie.

4.7 Pokračovatelé Felixe Kleina

V první polovině 20. století na Kleinovu práci v oblasti klasifikace geometrií navázali, pouze s částečným úspěchem, Američan Oswald Veblen (1880–1960) a Francouz Élie Cartan (1869–1951), kteří se zabývali rozšířením a zobecněním Kleinovy definice tak, aby zahrnovala i ty geometrie, které Kleinův Erlangenský program neobsáhl.

É. Cartan v roce 1922 vypracoval teorii zobecněných prostorů, roku 1926 popsal teorii symetrických prostorů. Úvahy o prostorech ho přivedly na myšlenku grupové koncepce geometrie, která zahrnovala nejen všechny geometrie obsažené v Erlangenském programu, ale rovněž geometrii Riemannovu a některé další příbuzné teorie. Cartanův vědecký program v geometrii navíc zahrnoval teorii Lieových grup mnohem důkladněji než geometrie ve smyslu Kleinovy definice. É. Cartan rovněž prohloubil Kleinovu definici ekvivalence geometrií; ukázal, že ekvivalentní geometrie odpovídají právě takovým grupám, které mají stejnou strukturu.[53]

[51] F. Klein zde studuje zejména afinní a projektivní transformace, transformaci reciprokými poloměry, stereografickou a Mercatorovu projekci, duální, kontaktní a imaginární transformace.

[52] F. Klein tento svůj postup, vyčlenění afinní a projektivní geometrie z geometrie metrické, přirovnává k postupu chemika, který pomocí stále silnějších činidel izoluje ze své sloučeniny stále hodnotnější složky. V jeho případě byly činidlem nejprve afinní, a poté projektivní transformace.

[53] S. Lie v roce 1888 dokázal, že dvě grupy mají stejnou strukturu právě tehdy, když jejich parametrické grupy lze ztotožnit vhodnou transformací parametrů. Viz Lie S., *Theorie der Transformationsgruppen*, erster Abschnitt, unter Mitwirkung von Friedrich Engel, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1888, 632 stran.

Podrobně o Cartanových výsledcích pojednává kniha [Sh], z níž ocitujme v anglickém překladu Cartanova slova z roku 1939:

> *In the wake of the movement of ideas which followed the general theory of relativity, I was led to introduce the notion of new geometries, more general than Riemannian geometry, and playing with respect to the different Klein geometries the same role as the Riemannian geometries play with respect to Euclidean space. The vast synthesis that I realized in this way depends of course on the ideas of Klein formulated in his celebrated Erlangen programmme while at the same time going far beyond it since it includes Riemannian geometry, which had formed a completely isolated branch of geometry, within the compass of a very general scheme in which the notion of group still plays a fundamental role.* ([Sh], str. 171)

I na začátku 21. století se někteří matematici ke Kleinovým úvahám o klasifikaci geometrií na základě teorie grup stále vracejí a dále je rozvádějí a zobecňují. V této souvislosti uveďme alespoň krátký článek *An extension of Erlangen Program*, jehož autorem je rumunský matematik Sorin Lugojan.[54] Grupy transformací uvažované v Kleinově Erlangenském programu rozšířil na „pseudogrupy“ transformací, které s každou transformací obsahují i transformaci k ní inverzní a navíc z definice splňují ještě dalších pět podmínek. Pseudogrupy transformací se dnes úspěšně využívají v teorii parciálních diferenciálních rovnic.

Charakter přímého zobecnění Erlangenského programu má v dnešní době tzv. teorie kategorií. Tato problematika však již výrazně překračuje zaměření této monografie.

4.8 Fyzikální souvislosti

Výchozí myšlenka Kleinova Erlangenského programu, tj. důraz na invarianty při geometrických transformacích, se z geometrie brzy rozšířila i do mechaniky a matematické fyziky a vedla až ke speciální teorii relativity. Souvisí totiž s problematikou vyjádření fyzikálních zákonů nezávisle na souřadném systému.

Základem klasické mechaniky je tzv. *Galileiho princip relativity* zformulovaný v 17. století, který uvádí, že všechny inerciální vztažné soustavy[55] jsou pro popis mechanických dějů rovnocenné, ve všech platí stejné zákony mechaniky a rovnice, které je popisují, mají ve všech takových soustavách stejný tvar. To znamená, že ve všech vztažných soustavách, které jsou vzhledem k povrchu Země v rovnoměrném přímočarém pohybu, probíhají všechny mechanické děje úplně stejně jako v soustavě spojené s povrchem Země. Pozorovatel jedoucí vlakem stálou rychlostí po přímé vodorovné trati, pokud nemá možnost pozorovat okolí, žádným mechanickým pokusem nezjistí, zda se vztažná soustava spojená s vlakem

[54] Viz Analele Universităţii Bucureşti, Matematică 52(2003), 49–54.

[55] Inerciální vztažné soustavy (lat. *inertia* = setrvačnost) jsou vztažné soustavy, v nichž izolovaná tělesa zůstávají v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu. V inerciálních vztažných soustavách platí Newtonovy pohybové zákony.

pohybuje, jak velkou rychlostí a kterým směrem. Pozorovatel uvnitř soustavy konající rovnoměrný přímočarý pohyb svůj pohybový stav nerozliší od klidu.

Galileiho princip relativity z pohledu transformací vlastně uvádí, že všechny fyzikální vlastnosti se zachovávají při těch transformacích fyzikálního systému, které mu udělují konstantní rychlost. Takové transformace se nazývají *Galileiho transformace*. Galileiho transformaci mezi prostorovými souřadnicemi x, y, z a časem t naměřenými v soustavě, která je v klidu, a jim odpovídajícími souřadnicemi x', y', z' a časem t' naměřenými v soustavě, která se pohybuje ve směru osy x rovnoměrně přímočaře rychlostí v, lze popsat vztahy

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Jinými slovy, fyzikální vlastnosti těles můžeme charakterizovat jako právě ty vlastnosti těles, které se zachovávají při Galileiho transformacích. Lze přitom dokázat, že Galileiho transformace tvoří grupu. Galileiho princip relativity tedy lze vyjádřit v geometrické řeči, která je v podstatě ekvivalentní Kleinově definici geometrie. Galileiho princip relativity tak vlastně říká, že fyzika, přesněji klasická mechanika, jako věda zkoumá takové fyzikální vlastnosti trojrozměrného prostoru, které jsou invariantní vzhledem ke grupě Galileiho transformací. Ukazuje se tedy, že klasickou mechaniku lze ztotožnit s jistou geometrií trojrozměrného prostoru vhodnou volbou grupy transformací.

Moderní fyzika počátku 20. století Galileiho princip relativity nahradila obecnějším, tzv. *Einsteinovým principem relativity*, který se stal základem speciální teorie relativity.[56] Je rozšířením Galileiho (mechanického) principu relativity i na jevy elektrické, magnetické nebo optické. Přitom je potřeba nahradit Galileiho transformace komplikovanějšími, tzv. *Lorentzovými transformacemi*, které rovněž tvoří grupu. Lorentzovu transformaci mezi prostorovými souřadnicemi x, y, z a časem t naměřenými v soustavě, která je v klidu, a jim odpovídajícími souřadnicemi x', y', z' a časem t' naměřenými v soustavě, která se pohybuje ve směru osy x rovnoměrně přímočaře rychlostí v, lze vyjádřit vztahy

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}\,x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

kde c je rychlost světla ve vakuu.

Pokud tedy přecházíme od klasické mechaniky, jejímiž hlavními představiteli jsou Galileo Galilei a Isaac Newton, k Einsteinově speciální teorii relativity, mění se tím vlastně náš geometrický pohled na okolní svět; příslušný geometrický systém je v souladu s Kleinovými myšlenkami určen volbou grupy transformací, které zachovávají fyzikální zákony platné v rámci uvažované fyziky. Při Lorentzových transformacích jsou invariantní tzv. Maxwellovy rovnice elektrodynamiky, které popisují základní vlastnosti elektromagnetického pole.[57]

[56] Albert Einstein (1879–1955) speciální teorii relativity poprvé představil v článku *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 322(1905), 891–921. Více informací viz *Albert Einstein: Teorie relativity*, úvodní slovo Jan Novotný, edice Quantum, svazek 3, Vysoké učení technické v Brně, Nakladatelství VUTIUM, Brno, 2005, 210 stran.

[57] O teorii elektromagnetického pole a Maxwellových rovnicích podrobně viz Sedlák B., Štoll I., *Elektřina a magnetismus*, Academia, Praha, 2002, 632 stran; 2. vydání, Karolinum, Praha, 2012, 595 stran; 3. vydání, Karolinum, Praha, 2013, 600 stran.