8. kapitola. Případ nekonečných množin

8. kapitola

PŘÍPAD NEKONEČNÝCH MNOŽIN

Zatím jsme metodu dynamického programování aplikovali pouze v případě funkcí s konečným definičním oborem. V tomto případě se nevyskytovaly žádné potíže s existencí extrémů, neboť každá funkce definovaná na konečné neprázdné množině má maximum i minimum. V případě funkce definované na nekonečné množině však již existenci extrémů obecně zaručit nelze (vezměme např. funkci f definovanou na množině $\{x \in \mathbf{R} | 0 < x < 1\}$ předpisem $f(x) = x$; tato funkce nemá ani minimum ani maximum). Otázky existence extrémů funkcí definovaných na nekonečných množinách se vyšetřují metodami matematické analýzy. Za příklad nám může sloužit fakt, že každý polynom, tj. funkce tvaru $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ ($a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou reálné konstanty) nabývá na každém intervalu tvaru $\{x \in \mathbf{R} | a \leqq x \leqq b\}$, kde $a \leqq b$ jsou daná reálná čísla, své minimální i maximální hodnoty. S posledním tvrzením i s mnoha jinými tohoto typu se čtenář seznámí již na počátku vysokoškolského studia matematiky. My se obecnými existenčními otázkami pro extrémy funkcí nebudeme zabývat, tím spíše, že zpravidla z nich nevyplývají žádné metody pro skutečné nalezení extrémů.

V řadě konkrétních i důležitých případů lze však extrémy funkcí definovaných na nekonečných množinách nalézt přímo s použitím různých elementárnějších metod. V této kapitole uvádíme dva příklady použití metody dynamického programování.

Příklad 7: Je dáno reálné číslo a a přirozené číslo n. Máme zjistit, zdali funkce n proměnných

$$y = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \tag{11}$$

nabývá na množině

$$\left\{(x_1, \ldots, x_n) \middle| \begin{matrix} x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R} \\ x_1 + \ldots + x_n = a \end{matrix}\right\} \tag{12}$$

své minimální hodnoty.

Ukážeme nejen, že funkce (11) nabývá na množině (12) minima, ale nalezneme toto minimum a nalezneme příslušnou n-tici, pro kterou se toto minimum nabývá. Dokážeme následující tvrzení:

Funkce (11) nabývá minimální hodnoty a^2n^{-1}, a sice v jediné n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (an^{-1}, an^{-1}, \ldots, an^{-1})$.

Důkaz: Větu dokážeme metodou matematické indukce podle n. (Hlavní myšlenkou důkazu je opět použití dynamického programování.)

(i) V případě $n = 1$ je tvrzení zřejmé.

(ii) Předpokládejme, že tvrzení platí pro přirozené číslo n a dokažme je pro $n + 1$: Nechť $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ je $(n + 1)$-tice reálných čísel, splňující vztah

$x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} = a$, odkud vyplývá $x_1 + \ldots + x_n = a - x_{n+1}$.

Na základě indukčního předpokladu nyní dostáváme, že platí

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq (a - x_{n+1})^2\, n^{-1}, \text{ a tedy}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 \geqq \frac{(a - x_{n+1})^2}{n} + x_{n+1}^2 = \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \left[\left(x_{n+1} - \frac{a}{n+1}\right)^2 + \frac{a^2 n}{(n+1)^2}\right] \geqq \\
&\geqq \frac{n+1}{n} \; \frac{a^2 n}{(n+1)^2} = \frac{a^2}{n+1}
\end{aligned}
\right\} \qquad (13)
$$

Platí tedy nerovnost $x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 \geqq a^2 (n+1)^{-1}$ pro všechny $(n+1)$-tice $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ reálných čísel, splňující vztah $x_1 + \ldots + x_{n+1} = a$.

Dosazením $(x_1, \ldots, x_{n+1}) = [a(n+1)^{-1}, \ldots, a(n+1)^{-1}]$ se snadno přesvědčíme, že $a^2(n+1)^{-1}$ je skutečně minimum funkce (11) na množině (12). K zakončení důkazu zbývá nalézt všechny $(n+1)$-tice, pro které funkce (11) nabývá svého minima na množině (12). Nechť tedy pro $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ platí $x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = a^2(n+1)^{-1}$ a $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} = a$. Odtud a z řetězce vztahů (13) dostáváme jednak

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = (a - x_{n+1})^2 \, n^{-1} \qquad (14)$$

jednak

$$\left(x_{n+1} - \frac{a}{n+1}\right)^2 = 0 \qquad (15)$$

Ze (14) a ze vztahu $x_1 + \ldots + x_n = a - x_{n+1}$ vyplývá na základě indukčního předpokladu $x_1 = \ldots = x_n = (a - x_{n+1}) \, n^{-1}$ a z (15) dostáváme $x_{n+1} = a(n+1)^{-1}$. Z posledních dvou vztahů dostáváme nakonec $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1} = a(n+1)^{-1}$, což dokončuje důkaz.

Použití principu dynamického programování záleželo v tomto případě podobně jako v předchozích kapitolách v převedení extremálního problému pro funkci více proměnných na několik extremálních problémů pro funkce jedné proměnné.

Příklad 8: Uvažujme funkci

$$y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \tag{16}$$

definovanou na množině

$$\left\{(x_1, \ldots, x_n) \,\middle|\, \begin{matrix} x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R} \\ x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r^2 \end{matrix}\right\} \tag{17}$$

kde r je dané nezáporné číslo. Dokažte, že funkce (16) nabývá na množině (17) maximální hodnoty $r\sqrt{n}$, a sice v jediné n-tici

$$(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{r}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{r}{\sqrt{n}}\right)$$

Důkaz: Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že je tvrzení dokázáno pro přirozené číslo n a uvažujme libovolnou $(n + 1)$-tici $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ reálných čísel, splňující vztah

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = r^2$$

Potom platí $r^2 - x_{n+1}^2 \geqq 0$, $r\sqrt{n + 1} - x_{n+1} \geqq 0$ a $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = (\sqrt{r^2 - x_{n+1}^2})^2$. Odtud dostáváme $x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} \leqq \sqrt{r^2 - x_{n+1}^2}\sqrt{n} + x_{n+1} = \sqrt{-(x_{n+1}\sqrt{n + 1} - r)^2 + (r\sqrt{n + 1} - x_{n+1})^2} + x_{n+1} \leqq \sqrt{(r\sqrt{n + 1} - x_{n+1})^2} + x_{n+1} = |r\sqrt{n + 1} - x_{n+1}| + x_{n+1} = r\sqrt{n + 1}$, což dokazuje první část věty.

Z posledního řetězce nerovností je dále zřejmé, že vztah $x_1 + \ldots + x_{n+1} = r\sqrt{n + 1}$ platí právě tehdy, jestliže $x_1 + \ldots + x_n = \sqrt{r^2 - x_{n+1}^2}\sqrt{n}$ (tj., na základě indukčního předpokladu, jestliže $x_1 = \ldots = x_n = \sqrt{r^2 - x_{n+1}^2} : \sqrt{n}$) a

$$(x_{n+1}\sqrt{n+1} - r)^2 = 0, \text{ tj. } x_{n+1} = \frac{r}{\sqrt{n+1}}$$

Indukční důkaz je dokončen.