Funkcionální rovnice

Úlohy k procvičení

In: Ljubomir Davidov (author); Zlata Kufnerová (translator); Alois Kufner (translator): Funkcionální rovnice. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1984. pp. 88–92.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404106

ÚLOHY K PROCVIČENÍ

1. Určete všechny funkce $f(x)$ definované na celé číselné ose a vyhovující funkcionální rovnici

$$f(x+y) - 2f(xy) - 3f(x) + (2x^2 - 1)\,f(y) = \\ = 2x(xy - 1) - 5.$$

Odpověď: $f(x) = x^2 + x + 1$.

2. Určete všechny funkce definované na intervalu $(0, \infty)$, jež jsou řešeními funkcionální rovnice

$$f(x^y) = yf(x).$$

Odpověď: $f(x) = C \log_a x$.

3. Určete všechny funkce $f(x)$, které vyhovují následujícím podmínkám:

a) je-li funkce $f(x)$ definována a spojitá v jistém bodě α, pak existuje okolí Δ bodu α tak, že $f(x)$ je definována a spojitá pro všechna $x \in \Delta$;

b) není-li funkce $f(x)$ v bodě α definována, pak existuje okolí Δ bodu α tak, že funkce $f(x)$ je definována a spojitá pro všechna $x \in \Delta$, $x \neq \alpha$, a platí $\lim\limits_{x \to \alpha} |f(x)| = \infty$;

c) funkce $f(x)$ je řešením funkcionální rovnice

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)\,f(y)}\,.$$

Návod: Nejprve dokažte, že pokud funkce $f(x)$ splňuje uvedené tři požadavky, je už nutně definována v bodě 0. Poté dokažte, že existují čísla $a > 0$ a c, $0 < c < \frac{\pi}{2}$, tak, že platí $f(a) = \operatorname{tg} c$. Nakonec dokažte indukcí, že platí $f(x) = \operatorname{tg} \frac{c}{a} x$ pro každé x tvaru $x = \frac{na}{2^m}$, kde n a $m \geqq 0$ jsou celá čísla.

Odpověď: $f(x) = \operatorname{tg} Ax$, kde A je libovolné reálné číslo.

4. Určete všechny funkce $f(x)$, které vyhovují následujícím podmínkám:

a) je-li funkce $f(x)$ definována a spojitá v jistém bodě α, pak existuje okolí Δ bodu α tak, že funkce $f(x)$ je definována a spojitá pro všechna $x \in \Delta$;

b) není-li funkce $f(x)$ v bodě α definována, pak existuje okolí Δ bodu α tak, že funkce $f(x)$ je definována a spojitá pro všechna $x \in \Delta$, $x \neq \alpha$, a platí $\lim_{x \to \alpha} |f(x)| = \infty$;

c) funkce $f(x)$ je řešením funkcionální rovnice

$$f(x + y) = \frac{f(x)\, f(y) - 1}{f(x) + f(y)} .$$

Odpověď: $f(x) = \operatorname{cotg} Ax$, kde A je libovolné reálné číslo.

5. Určete všechny funkce $f(x)$, které vyhovují podmínkám a) a b) z obou předcházejících úloh a jsou řešeními funkcionální rovnice

$$f(x + y) = \frac{f(x) + f(y) - 2f(x)\, f(y)}{1 - 2\, f(x)\, f(y)} .$$

Návod: Ukažte, že funkce $g(x) = \frac{1}{f(x)} - 1$ je řešením funkcionální rovnice

$$g(x + y) = \frac{g(x)\,g(y) - 1}{g(x) + g(y)}\,.$$

Odpověď: $f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg} Ax}$, kde A je reálné číslo.

6. Určete všechny funkce $f(x)$, které vyhovují podmínkám a) a b) z úlohy 4 a jsou řešeními funkcionální rovnice

$$f(x + y) = \frac{f(x) + f(y) - 1}{2f(x) + 2f(y) - 2f(x)f(y) - 1}\,.$$

Odpověď: $f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} Ax}$, kde A je reálné číslo.

7. Určete všechny funkce $f(x)$, které vyhovují podmínkám a) a b) z úlohy 4 a jsou řešeními funkcionální rovnice

$$f(x + y) = \frac{f(x) + f(y) + 2f(x)f(y)}{1 - f(x)f(y)}\,.$$

Návod: Dokažte nejprve, že funkce $f(x)$ je definována v bodě 0, a pak definujte $f(x)$ pro racionální hodnoty proměnné x.

Odpověď: $f(x) = \frac{cx}{1 - c(x - 1)}\,.$

8. Za stejných podmínek jako v předcházející úloze určete všechna řešení funkcionální rovnice

$$f(x + y) = \frac{f(x) + f(y) - 2f(x)f(y)}{1 - f(x)f(y)}\,.$$

Odpověď: $f(x) = \dfrac{cx}{1 + c(x - 1)}$.

9. Určete všechny funkce $f(x)$, které jsou definovány a spojité na celé číselné ose a řeší funkcionální rovnici

$$f(x + y) = f(x)f(y) - \sqrt{1 - f^2(x)} \cdot \sqrt{1 - f^2(y)}.$$

Návod: Metodou, jíž jsme řešili d'Alembertovu rovnici, dokažte, že všechna řešení uvedené funkcionální rovnice jsou tvořena funkcemi $f(x) = \cos Ax$, kde A je libovolné reálné číslo.

10. Dokažte, že všechny funkce $f(x)$, které jsou definovány a spojité pro všechna x, řeší funkcionální rovnici

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$$

a splňují podmínku $f(x) \geqq 1$ pro všechna x, mají tvar

$$f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2},$$

kde a je kladné reálné číslo.

Návod: Využijte metody, kterou jsme řešili d'Alembertovou rovnici. Dokažte nejprve, že pokud je $a > 0$, $a \neq 1$ libovolné reálné číslo, existují kladná reálná čísla c a b tak, že platí

$$f(b) = \frac{a^c + a^{-c}}{2}.$$

11. Dokažte, že všechny funkce $f(x)$, které jsou definovány a spojité pro všechna x a vyhovují funkcionální rovnici

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y) + \sqrt{f^2(x) - 1} \cdot \sqrt{f^2(y) - 1},$$

mají tvar

$$f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2},$$

kde a je kladné reálné číslo.

12. Dokažte, že všechny funkce, které jsou definovány a spojité v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ a řeší funkcionální rovnici

$$f(xy - \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - y^2}) = f(x) + f(y),$$

jsou tvaru $f(x) = C \arccos x$, kde C je libovolné reálné číslo.

13. Určete všechny funkce $f(x)$, jež jsou řešeními funkcionální rovnice

$$f(x + y + axy) = f(x)f(y),$$

kde a je pevné reálné číslo.

Odpověď: $f(x) = (1 + ax)^c$.

14. Určete všechny funkce, které řeší funkcionální rovnici

$$f(\sqrt[n]{x^n + y^n}) = f(x) + f(y).$$

Odpověď: $f(x) = cx^n$; c je libovolné reálné číslo.

15. Určete všechna řešení funkcionální rovnice

$$f\left(\frac{x - y}{\ln \frac{x}{y}}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Odpověď: $f(x) = \text{const.}$