06. ročník matematické olympiády

IV. Řešení úloh ze soutěže

In: Rudolf Zelinka (editor): 06. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1956-1957. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1958. pp. 29–214.

IV. ŘEŠENÍ ÚLOH ZE SOUTĚŽE

1. Úlohy I. kola kategorie A

1. Koľkými rôznymi spôsobmi možno vyplatiť čiastku Kčs 2000 päťkorunovými, desaťkorunovými a dvadsaťpäťkorunovými bankovkami?

Riešenie. Číslom v tomto riešení rozumieme celé nezáporné číslo. Ak označíme po rade x, y, z počet bankoviek po 5 Kčs, 10 Kčs, 25 Kčs, má platiť $5x + 10y + 25z = 2000$, čiže

$$x + 2y + 5z = 400. \tag{1}$$

Tým sme úlohu previedli na problém určiť počet trojíc čísel x, y, z, vyhovujúcich rovnici (1).

Najprv odpovedzme na túto otázku: Nech trojica x_0, y_0, z_0 vyhovuje rovnici (1). Koľko dvojíc vyhovuje rovnici

$$x + 2y = 400 - 5z_0 .$$

Budeme tu rozlišovať dva prípady:

Prípad [1]. Ak je z_0 párne, je $400 - 5z_0$ párne. Hľadaný počet dvojíc x, y sa potom rovná počtu spôsobov, ktorými možno (párne) číslo $400 - 5z_0$ napísať ako súčet dvoch párnych sčítancov x a $2y$. Tento počet je

$$\frac{400 - 5z_0}{2} + 1 = 201 - \frac{5}{2} z_0 .$$

Prípad [2]. Ak je z_0 nepárne, je $400 - 5z_0$ nepárne. Hľadaný počet dvojíc x, y sa potom rovná počtu spôsobov, ktorými možno (nepárne) číslo $400 - 5z_0$ napísať ako súčet nepárneho a párneho čísla. Tento počet je

$$\frac{1}{2}(400 - 5z_0 + 1) = 200 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} z_0 .$$

Tým sme pomocnú otázku zodpovedali.

Ak x, y, z vyhovuje rovnici (1), je $z \leqq 80$ a obrátene, ku každému nezápornému celému číslu z splňujúcemu vzťah $z \leqq 80$ možno udať trojicu x, y, z, vyhovujúcu rovnici (1), napr. $x = 400 - 5z$, $y = 0$, z.

Celkový počet trojíc teda bude

$$\left(201 - \frac{5}{2}\cdot 0\right) + \left(201 - \frac{5}{2}\cdot 2\right) + \left(201 - \frac{5}{2}\cdot 4\right) + \ldots +$$
$$+ \left(201 - \frac{5}{2}\cdot 80\right) + \left(200 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\cdot 1\right) +$$
$$+ \left(200 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\cdot 3\right) + \left(200 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\cdot 5\right) + \ldots +$$
$$+ \left(200 + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\cdot 79\right) = 41\cdot 201 + 40\cdot\left(200 + \frac{1}{2}\right) -$$
$$- \frac{5}{2}(0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 80) =$$
$$= 201 + 40\left(201 + 200 + \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2}\,\frac{81\cdot 80}{2} =$$
$$= 201 + 40\cdot\left(401 + \frac{1}{2}\right) - 5\cdot 81\cdot 20 =$$
$$= 201 + 16\,060 - 8100 = 8161.$$

Tým je riešenie ukončené.

2. Řešte rovnici

$$\frac{2\sqrt{a^2+x}-a}{\sqrt{a^2+x}+1} = \frac{\sqrt{a^2+x}-1}{a}, \tag{1}$$

kde dané reálné číslo $a \neq 0$. Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k danému číslu a.

Řešení. Nechť je reálné číslo x řešením rovnice (1). Tu musí platit

$$a^2 + x \geqq 0; \tag{2}$$

jinak by neměl výraz $\sqrt{a^2+x}$ smysl. Dále musí být

$$a \neq 0; \tag{3}$$

jinak by neměl zlomek na pravé straně rovnice (1) význam. Protože podle (2) je $\sqrt{a^2+x} \geqq 0$, platí

$$\sqrt{a^2+x} + 1 > 0, \tag{4}$$

takže za předpokladu (2) má zlomek na levé straně rovnice (1) význam.

Nyní přistupme k vlastnímu řešení rovnice (1). Znásobme obě její strany číslem $a\left(\sqrt{a^2+x}+1\right)$; to je podle (3), (4) různé od nuly; dostaneme

$$2a\sqrt{a^2+x} = x - (1 - 2a^2).$$

Nyní umocněme obě strany této rovnice na druhou; dostaneme rovnici

$$x^2 - 2x + (1 - 4a^2) = 0. \tag{5}$$

Diskriminant této rovnice je $\Delta = 4 \cdot (1 - 1 + 4\,a^2)$ neboli $\Delta = 16\,a^2$, což je vzhledem k předpokladu (3) číslo kladné;

platí $\sqrt{\Delta} = 4 \cdot | a |$. Kořeny $x = x_1$, $x = x_2$ rovnice (5) jsou reálná čísla $1 + 2 \cdot | a |$, $1 - 2 \cdot | a |$; můžeme položit

$$x_1 = 1 + 2a, \quad x_2 = 1 - 2a. \tag{6}$$

Protože je $\Delta > 0$, je $x_1 \neq x_2$. Platí (znaménko plus přísluší k x_1, znaménko minus k x_2)

$$a^2 + x = a^2 + 1 \pm 2a = (a \pm 1)^2 \geqq 0, \tag{7}$$

takže pro každé reálné a platí požadavek (2).

Jestliže má rovnice (1) kořeny, pak jsou to nutně čísla (6), přičemž musí platit požadavek (3).

Proveďme ještě zkoušku, že čísla (6) skutečně vyhovují rovnici (1); vzhledem ke vztahu (7) po dosazení do levé strany rovnice (1) dostaneme výraz L a po dosazení do pravé strany rovnice (1) dostaneme výraz P:

$$L = \frac{2\sqrt{(a \pm 1)^2} - a}{\sqrt{(a \pm 1)^2} + 1} = \frac{2 \cdot | a \pm 1 | - a}{| a \pm 1 | + 1};$$

$$P = \frac{\sqrt{(a \pm 1)^2} - 1}{a} = \frac{| a \pm 1 | - 1}{a}.$$

Nyní rozlišme oba kořeny x_1, x_2:

Případ [1] kořene x_1. Jsou dvě možnosti:

α) Nechť je $a + 1 \geqq 0$ neboli $a \geqq -1$ (a zároveň $a \neq 0$). Pak je:

$$L = \frac{2a + 2 - a}{a + 1 + 1} = \frac{a + 2}{a + 2},$$

kde je $a \neq -2$; proto je $L = 1$.

$$P = \frac{a + 1 - 1}{a} = \frac{a}{a} = 1.$$

Je tedy $L = P$; číslo x_1 je kořenem rovnice (1).

β) Nechť je $a + 1 < 0$ neboli $a < -1$. Pak je:

$$L = \frac{-2(a+1) - a}{-(a+1)+1} = \frac{-3a-2}{-a} = \frac{3a+2}{a};$$

$$P = \frac{-(a+1)-1}{a} = -\frac{a+2}{a}.$$

Pro $a < -1$ se snadno přesvědčíme, že je $L \neq P$, takže číslo x_1 není kořenem rovnice (1).

Případ [2] kořene x_2. Jsou dvě možnosti:

α) Nechť je $a - 1 \geqq 0$ neboli $a \geqq 1$. Pak je:

$$L = \frac{2(a-1) - a}{(a-1)+1} = \frac{a-2}{a};$$

$$P = \frac{a-1-1}{a} = \frac{a-2}{a}.$$

Protože je $a \geqq 1$, mají výrazy L, P smysl a platí $L = P$; číslo x_2 je kořenem rovnice (1).

β) Nechť je $a - 1 < 0$ neboli $a < 1$ (a zároveň $a \neq 0$). Pak je:

$$L = \frac{-2(a-1) - a}{-(a-1)+1} = \frac{3a-2}{a-2}$$

(tu je jistě $a - 2 \neq 0$);

$$P = \frac{-(a-1)-1}{a} = \frac{-a}{a} = -1.$$

Rovnost $\dfrac{3a-2}{a-2} = -1$ platí pouze pro $a = 1$, což není náš případ. Je tedy pro $a < 1$ vždy $L \neq P$ a číslo x_2 není kořenem rovnice (1).

Záver. Shrňme výsledky pro reálné číslo $a \neq 0$. Jestliže je:

a) $a \geqq 1$, potom rovnice (1) má kořeny x_1, x_2 dané vztahy (6).

b) $1 > a \geqq -1$ a zároveň $a \neq 0$, potom rovnice (1) má jediný kořen x_1 daný vztahem (6).

c) Pro $a < -1$ nemá rovnice řešení.

Přehled těchto výsledků snadno uvidíme z tabulky:

Parametr $a \neq 0$	Řešení
$a < -1$	žádné
$-1 \leqq a < 1$	$1 + 2a$
$a \geqq 1$	$1 + 2a$, $1 - 2a$

3. Nech štvorsten $ABCD$ má všetky steny pravouhlé trojuholníky.

Dokážte, že:

a) tento štvorsten má jedinú najväčšiu hranu;

b) stred guľovej plochy opísanej štvorstenu leží v strede jeho najväčšej hrany;

c) možno zostrojiť taký kváder, že štyri z jeho vrcholov splývajú s vrcholmi uvažovaného štvorstena.

Riešenie. Ak existuje štvorsten $ABCD$, ktorého všetky štyri steny sú pravouhlé trojuholníky, potom tento štvorsten musí mať práve jednu z týchto troch vlastností:

[1] Existuje jeden vrchol (nech je to vrchol D) štvorstena $ABCD$ taký, že každé dve hrany vychádzajúce z tohto vrchola sú navzájom kolmé (pozri obr. 1).

[2] Neexistuje ani jeden vrchol štvorstena $ABCD$, ktorý by mal vlastnosť [1], ale existuje taký vrchol (nech je to vrchol D), že práve dve dvojice hrán, z tohto vrchola vychádzajúci,

sú na seba kolmé (nech teda platí $DB \perp DA$, $DC \perp DA$), kdežto tretia dvojica hrán (t. j. hrany DB, DC) sú navzájom kosé. (Potom je uhol $\sphericalangle BDC$ nevyhnutne ostrý, lebo v trojuholníku BCD je podľa požiadavky úlohy jeden uhol pravý a ostatné uhly musia byť ostré.) Pozri obr. 5.

[3] Štvorsten $ABCD$ nemá žiadnu z vlastností [1], [2], to znamená, že pri každom z jeho vrcholov je nanajvýš jeden uhol pravý. Pretože sa však musia vyskytnúť 4 pravouhlé trojuholníky a tým aj 4 pravé uhly, je pri každom vrchole práve jeden uhol pravý. Pozri obr. 3, 4.

Žiadnej inej možnosti, než uvedené tri, niet. Dokážeme, že štvorsten s vlastnosťami [1] alebo [3] neexistuje; ďalej dokážeme, že existuje štvorsten s vlastnosťou [2]. Každý prípad preberieme zvlášť.

Prípad [1]. Nech štvorsten $ABCD$ má vlastnosť [1] (pozri obr. 1). Potom v trojuholníku ABC musí byť jeden uhol pravý; nech je to napr. uhol $\sphericalangle BCA$. Dokážeme, že taký štvorsten neexistuje.

Zvoľme polpriamky DA, DM, DC tak, že každé dve sú navzájom kolmé. Na polpriamke DM máme určiť bod B tak, aby platilo $\sphericalangle BCA = 90°$ alebo aby o priamke $p \equiv BC$ platilo $p \perp AC$.

Predpokladajme, že taká priamka p v rovine CDM existuje (dokážeme, že to nie je možné). Zrejme je $DA \perp CDM$ (lebo je $DA \perp DC$, $DA \perp DM$) a teda $p \perp DA$. Zo vzťahov $p \perp DA$, $p \perp AC$ vyplýva, že je tiež

$$p \perp ACD. \tag{1}$$

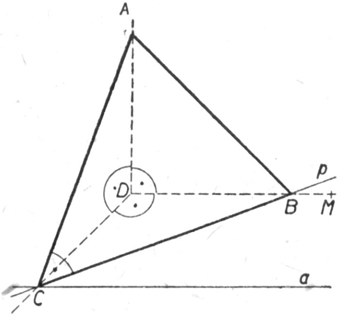
Pretože podľa predpokladu je $DM \perp DA$, $DM \perp DC$, je tiež

$$DM \perp ACD. \tag{2}$$

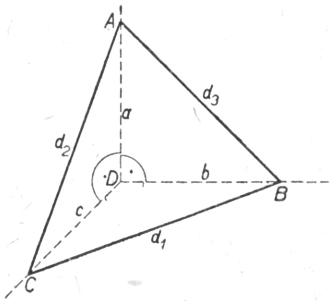
Zo vzťahov (1), (2) vyplýva $p \parallel DM$ a pretože je $p \not\equiv DM$, bod B neexistuje a preto neexistuje ani štvorsten s vlastnosťou [1].

Poznámka. Dôkaz, že neexistuje štvorsten s vlastnosťou [1], možno urobiť aj takto (obr. 2): V štvorstene $ABCD$, v ktorom sú každé dve hrany vychádzajúce z bodu D navzájom kolmé, označme $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$, $BC = d_1$, $CA = d_2$, $AB = d_3$, pričom možno predpokladať, že platí

$$0 < a \leqq b \leqq c. \tag{3}$$



Obr. 1.



Obr. 2.

Potom použime Pythagorovu vetu na pravouhlé trojuholníky BCD, CAD, ABD; dostaneme

$$d_1^2 = b^2 + c^2, \tag{4}$$
$$d_2^2 = c^2 + a^2, \tag{5}$$
$$d_3^2 = a^2 + b^2. \tag{6}$$

Vzhľadom na (3) zrejme platí

$$d_3^2 \leqq d_2^2 \leqq d_1^2$$

alebo

$$d_3 \leqq d_2 \leqq d_1.$$

Pretože trojuholník ABC je tiež pravouhlý, musí v ňom byť strana d_1 preponou a podľa Pythagorovej vety musí platiť

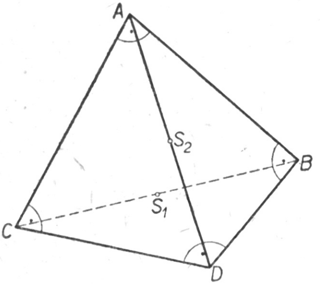
$$d_1^2 - (d_2^2 + d_3^2) = 0. \tag{7}$$

Dosaďme sem z (4), (5), (6); dostaneme na ľavej strane

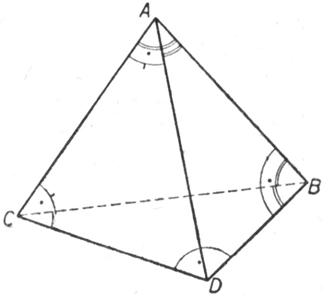
$$b^2 + c^2 - (c^2 + a^2 + a^2 + b^2) = -2a^2 \neq 0.$$

To je spor s požiadavkou (7). Tým je dôkaz ukončený.

P r í p a d [3]. Nech štvorsten má vlastnosť [3]. Nech v trojuholníku BCD je $\sphericalangle D = \mathrm{R}$ (pozri obr. 3 a 4); to možno vhodnou zámenou označenia dosiahnuť. Potom v trojuholníku ABC môže byť pravý buď uhol $\sphericalangle BAC$, buď jeden z uhlov $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$. V druhom prípade sa pre určitosť rozhodnime, že je $\sphericalangle BCA = \mathrm{R}$ (inak by sme u štvorstena vymenili označenie vrcholov B, C). Každý prípad preberieme zvlášť.



Obr. 3.



Obr. 4.

α) Nech je $\sphericalangle BAC = \mathrm{R}$ (pozri obr. 3). Označme $S_1 \neq S_2$ po rade stredy hrán BC, DA a zostrojme guľové plochy $\varkappa_1 \equiv (S_1, S_1B)$, $\varkappa_2 \equiv (S_2, S_2A)$. Dokážeme, že plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ prechádzajú všetkými vrcholmi štvorstena $ABCD$. Dôkaz urobíme pre plochu $\varkappa_1$: Plocha $\varkappa_1$ podľa konštrukcie obsahuje body B, C. Rovina BCA pretne plochu $\varkappa_1$ v hlavnej kružnici k, pričom je úsečka BC priemerom tejto kružnice. Podľa Thaletovej vety leží vrchol A pravého uhla $\sphericalangle CAB$ na kružnici k. Rovnako sa dokáže, že aj bod D leží na ploche $\varkappa_1$.

Z našej úvahy vyplýva, že štvorstenu $ABCD$ možno opísať dve rôzne guľové plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$; to je spor so známou vetou, že štvorstenu možno opísať práve jednu guľovú plochu. Tým sme prípad α) vylúčili.

β) Nech je $\sphericalangle BCA = \mathrm{R}$ (pozri obr. 4). Potom sú nevyhnutne v pravouhlých trojuholníkoch BCD, BAC oba uhly pri vrchole B ostré. Pretože pri vrchole B musí jedna dvojica hrán určovať pravý uhol, je to nevyhnutne uhol $\sphericalangle ABD$. Teraz sa už ľahko usúdi, že musí byť $\sphericalangle CAD = \mathrm{R}$.

Vieme, že odvesna pravouhlého trojuholníka je menšia než jeho prepona; preto platí postupne

$$\begin{aligned} CD &< BC \text{ (pozri } \triangle BCD),\\ BC &< AB \text{ (pozri } \triangle ABC),\\ AB &< AD \text{ (pozri } \triangle ABD),\\ AD &< CD \text{ (pozri } \triangle ACD). \end{aligned}$$

Z týchto nerovností dostaneme $CD < CD$, čo je spor. Preto je prípad β) vylúčený.

Neexistuje teda štvorsten s vlastnosťou [3].

P r í p a d [2]. Nech štvorsten $ABCD$ má vlastnosť [2] (pozri obr. 5). Pre určitosť nech je

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC = \mathrm{R}, \quad \sphericalangle BDC < \mathrm{R}. \tag{8}$$

V trojuholníku BCD musí byť podľa požiadavky úlohy jeden uhol pravý. Vzhľadom na posledný vzťah (8) musí byť jeden z uhlov $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CBD$ pravý; nech pre určitosť je

$$\sphericalangle BCD = \mathrm{R} \tag{9}$$

(inak stačí vymeniť označenia vrcholov B, C). V trojuholníku BCD sú teda uhly pri vrcholoch B, D ostré.

Z prvých dvoch vzťahov (8) vyplýva

$$AD \perp BCD,$$

t. j.

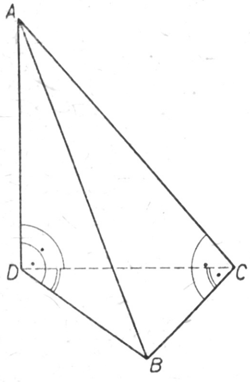
$$AD \perp BC. \tag{10}$$

Pretože platí (9), t. j. $DC \perp BC$, je vzhľadom na (10)

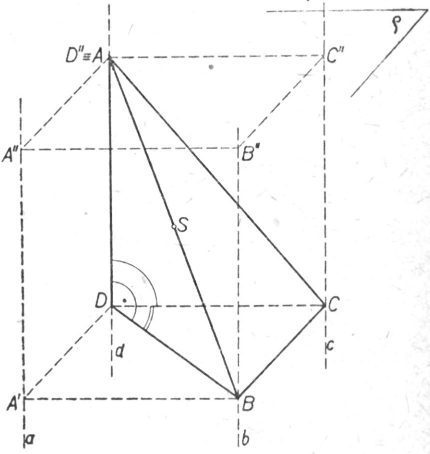
$$BC \perp ADC \tag{11}$$

(priamka BC je kolmá k rôznobežkám AD, DC roviny ADC). Zo vzťahu (11) vyplýva

$$BC \perp AC,$$



Obr. 5.



Obr. 6.

lebo AC je priamka roviny ADC. Je teda v trojuholníku ABC uhol $\sphericalangle BCA = R$. Tým je daná konštrukcia (a tým aj existencia) požadovaného štvorstena.

Konštrukcia štvorstena $ABCD$ (obr. 5). Zvolíme pravouhlý trojuholník BDC s preponou BD. K rovine BCD zostrojme v bode D kolmicu a na nej zvolíme bod $A \neq D$. Potom je zrejme $ABCD$ štvorsten s vlastnosťou [2]. Dôkaz vyplýva z predošlého. Takto zostrojený štvorsten $ABCD$ teraz použijeme.

Zostrojme v predošlej konštrukcii obdĺžnik $A'BCD$ (obr. 6);

v jeho vrcholoch zostrojme po rade kolmice a, b, c, d k rovine $A'BCD$. Bodom A veďme rovinu $\varrho \parallel A'BCD$; označme A'', B'', C'', $D'' \equiv A$ po rade priesečníky priamok a, b, c, d s rovinou ϱ. Potom je $A'BCDA''B''C''D''$ kváder tej vlastnosti, že štyri z jeho vrcholov (totiž B, C, D, $D'' \equiv A$) splývajú s vrcholmi štvorstena $ABCD$. Tým sme rozriešili úlohu c).

Úsečka AB je v tomto kvádri telesovou uhlopriečkou. Platí:

$$AB > BD, \ AB > AD \tag{12}$$

(AB je prepona, BD, AD sú odvesny v trojuholníku ABD);

$$AB > BC, \ AB > AC \tag{13}$$

(AB je prepona, BC, AC sú odvesny v trojuholníku ABC);

$$AB > DC, \tag{14}$$

lebo podľa (12) je $AB > BD$ a ďalej je $BD > DC$ (BD je prepona, DC je odvesna v trojuholníku BCD). Spojením oboch posledných nerovností dostaneme (14). Tým sme rozriešili úlohu a).

Označme S stred úsečky AB v uvažovanom kvádri $A'BCDA''B''C''D''$. Podľa známych vlastností kvádra prechádza guľová plocha $\varkappa \equiv (S, SA)$ všetkými vrcholmi tohto kvádra, t. j. $\varkappa$ je guľovou plochou opísanou uvažovanému štvorstenu $ABCD$. Pretože štvorstenu možno opísať len jedinú guľovú plochu, je ňou práve plocha $\varkappa$, zostrojená nad hranou AB (štvorstena $ABCD$) ako priemerom. Tým sme rozriešili úlohu b).

4. V rovině buď dán svou polohou trojúhelník ABC tak, že AB je jeho nejmenší strana.

Uvnitř strany AC sestrojte bod M a uvnitř strany BC sestrojte bod N tak, aby platilo $AM = MN = NB$.

Proveďte diskusi řešitelnosti úlohy.

Řešení (viz obr. 7 až 10). O stranách

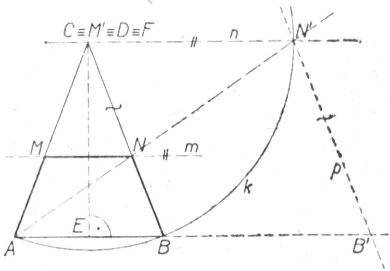
$$a = BC,\ b = CA,\ c = AB \tag{1}$$

trojúhelníka ABC můžeme předpokládat

$$c < b \leqq a. \tag{2}$$

Strana c je totiž ze stran nejmenší; kdyby platilo $b > a$, vyměnili bychom názvy vrcholů A, B a tím i stran a, b. Odtud plyne, že je úhel $\sphericalangle ABC$ ostrý a proto pata E výšky vedené vrcholem C trojúhelníka ABC padne dovnitř polopřímky BA.

Nejprve vyslovíme p o m o c n o u větu **V**: „Buď dán pravý úhel $\sphericalangle CFD$. Platí-li vztah $b > CD$, potom se dá na prodloužení úsečky FD za bod D sestrojit právě jeden bod N' takový, že platí $CN' = b$."



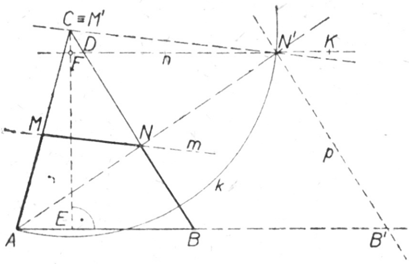
Obr. 7.

Důkaz (viz obr. 9). V pravoúhlém trojúhelníku CDF je CD přepona a proto je $CF < CD$, dále je $CD < b$, tj. $CF < b$. Ale CF udává vzdálenost bodu C od přímky FD; proto je přímka FD sečnou kružnice $k \equiv (C, b)$, přičemž bod D leží uvnitř této kružnice. Na polopřímce FD pak leží právě jeden bod N' kružnice k (druhý bod leží na polopřímce opačné k polopřímce FD, jak vyplývá ze souměrnosti přímky FD a kružnice k podle přímky CF). Tím je důkaz proveden.

Nyní provedeme ř e š e n í dané úlohy (obr. 7—10). Předpokládejme, že jsme řešení našli; tu bod M leží uvnitř úsečky AC a bod N uvnitř úsečky BC. Uvažujme stejnolehlost **A** o středu A stejnolehlosti, ve které bodu M přísluší bod

$M' \equiv C$; protože je $AM < AM'$, je koeficient $\lambda = \dfrac{AM'}{AM} > 1$. Označme B', N' body, které ve stejnolehlosti $\mathbf{A}$ příslušejí pořadě bodům B, N; tu bod B' leží na prodloužení úsečky AB za bod B a bod N leží uvnitř úsečky AN'. O bodech A, M, N, B podle požadavku úlohy platí

$$AM = MN = NB; \tag{3}$$



Obr. 8.

proto o bodech A, $M' \equiv C$, N', B', které k předchozím bodům příslušejí ve stejnolehlosti $\mathbf{A}$, pořadě platí

$$b = AC = CN' = N'B', \quad NB \parallel N'B', MN \parallel CN' \tag{4}$$

(přímky sobě příslušné ve stejnolehlosti $\mathbf{A}$). — Všimněme si některých vlastností čtyřúhelníka $ACN'B'$. Veďme bodem N' přímku $n \parallel AB$ a označme D průsečík přímek BC, n (ten jistě existuje); protože je $BB'N'D$ rovnoběžník, je $BD = B'N' = b$. Z druhého vztahu (2) plyne, že bod D buď padne dovnitř úsečky $BC = a$ anebo je $D \equiv C$. Toho užijeme ke konstrukci bodu N'.

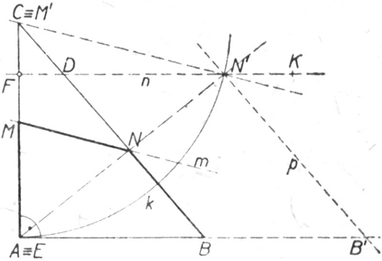
Konstrukce. Předpokládejme platnost vztahů (2). Na polopřímce BC sestrojme úsečku $BD = b$. Bodem D sestrojme přímku $n \parallel AB$ a dále opišme kružnici $k \equiv (C, b)$; označme N' společný bod přímky n a kružnice k, a to ten, který padne dovnitř poloroviny ϱ opačné k polorovině BCA. Dále sestrojme bodem N' přímku $p \parallel BC$ a označme B' průsečík různoběžek AB, p a konečně $C \equiv M'$. Uvažujme nyní stejnolehlost $\mathbf{A}'$ o středu A, v níž bodu N' přísluší průsečík N přímek AN',

BC. Označme M bod příslušný bodu $M' \equiv C$ ve stejnolehlosti $\mathbf{A}'$; bodu B' zřejmě příluší bod B. Potom jsou M, N body požadované v textu úlohy.

Důkaz. Podle konstrukce je $CN' = b$. Jestliže bod N' je od bodu A oddělen přímkou BC (to dokážeme v diskusi), existuje rovnoběžník $BB'N'D$, takže je $N'B' = BD = b$; podle konstrukce je $BD = b$ a tedy $N'B' = b$. Platí tedy vztahy (4). Ze stejnolehlosti $\mathbf{A}'$ plyne, že platí i vztahy (3). Důkaz, že body M, N leží pořadě uvnitř úseček AC, BC, provedeme v diskusi.

Diskuse. Dokážeme, že úloha má právě jedno řešení.

Správnost tohoto tvrzení je zřejmá z obr. 7 v případě, že $a = b$; to plyne z existence kosočtverce $BB'N'C$ v polorovině ϱ, jehož strana je b.



Obr. 9.

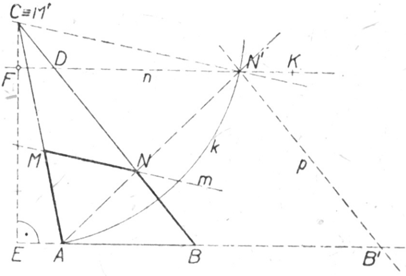
Nechť nadále je $b < a$ (obr. 8—10). O stranách daného trojúhelníka ABC platí

$a < b + c$ (trojúhelníková nerovnost),

$b + c < 2b$ [viz (2)].

Odtud dostáváme $a < 2b$ neboli

$$a - b < b. \qquad (5)$$



Obr. 10.

Podle konstrukce bodu D vzhledem k (2) padne tento bod dovnitř úsečky BC; proto je $CD = a - b$. Ze vztahu (5) pak plyne

$$CD < b.$$

Označme E patu kolmice vedené bodem C k přímce AB; protože podle (2) je $AC < BC$, je úhel $\sphericalangle ABC$ ostrý a bod E leží uvnitř polopřímky BA (viz obr. 8—10 pro různé případy dutého úhlu $\sphericalangle CAB$). Označme F průsečík přímek CE, n. Protože bod D leží uvnitř úsečky BC, leží bod F uvnitř úsečky CE, neboť pravoúhlý trojúhelník BCE o přeponě BC vždy existuje. Podle pomocné věty **V**, užité na pravý úhel $\sphericalangle CFD$, leží na prodloužení úsečky FD za bod D jediný bod N' takový, že $CN' = b$. Odtud se snadno usoudí, že přímka BC odděluje body A, N', takže $ABN'D$ je lichoběžník nebo rovnoběžník ($AB \parallel N'D$); jeho úhlopříčky AN', BD mají společný bod N, který leží uvnitř úsečky BD a tedy i uvnitř úsečky BC. Protože bod N leží uvnitř úsečky AN', je kladný koeficient λ' stejnolehlosti $\mathbf{A}'$ menší než číslo 1, a proto bod M padne dovnitř úsečky AC.

Úloha má tedy v obou případech ($a = b$, $a > b$) právě jedno řešení, které je tím provedeno.

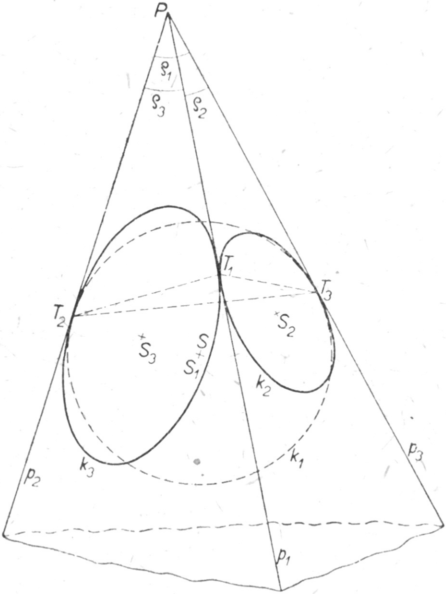
5. V prostoru buďte dány tři kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$, $k_2 \equiv (S_2, r_2)$, $k_3 \equiv (S_3, r_3)$, které leží pořadě v rovinách ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, majících jediný společný bod P, přičemž každá z kružnic se dotýká obou kružnic zbývajících.

Potom existuje jediná kulová plocha $\varkappa \equiv (S, r)$, na níž tyto kružnice leží. Dokažte a udejte konstrukci této plochy $\varkappa$.

Poznámka. Říkáme, že se kružnice k_1, k_2, které leží v různých rovinách ϱ_1, ϱ_2, navzájem dotýkají, jestliže průsečnice p_3 obou rovin ϱ_1, ϱ_2 je tečnou každé z těchto kružnic v jejich společném bodě T_3.

Řešení (viz obr. 11). Poznámka. Průběhem úvah dokážeme, že existuje jediná kulová plocha, která splňuje požadavky úlohy.

Rozbor. Dané roviny ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ve kterých pořadě leží dané kružnice k_1, k_2, k_3, mají podle textu úlohy jediný společný bod P. Každé dvě z těchto rovin jsou různoběžné; jejich průsečnice označme pořadě $p_1 \equiv (\varrho_2, \varrho_3)$, $p_2 \equiv (\varrho_3, \varrho_1)$, $p_3 \equiv$ $\equiv (\varrho_1, \varrho_2)$. Přímky p_1, p_2, p_3 mají tedy společný právě bod P a neleží v téže rovině (tvoří hrany trojbokého jehlanového prostoru o vrcholu P).



Obr. 11.

Označme pořadě T_1, T_2, T_3 dotykové body dvojic (k_2, k_3), (k_3, k_1), (k_1, k_2) daných kružnic; tyto body jsou nutně různé od bodu P a úhly T_2PT_3, T_3PT_1, T_1PT_2, ve kterých kružnice k_1, k_2, k_3 pořadě leží, jsou duté, což plyne z definice jehlanové plochy. Z vlastnosti délek PT_1, PT_2, PT_3 tečen vedených z bodu P k daným kružnicím plyne, že je $PT_2 = PT_3$, $PT_3 = PT_1$, $PT_1 = PT_2$, tj.

$$PT_1 = PT_2 = PT_3. \qquad (1)$$

Protože přímky p_1, p_2, p_3 neleží v téže rovině, existuje trojúhelník $T_1T_2T_3$, jehož rovina τ neprochází bodem P.

Různoběžky T_1S_2, T_1S_3 stojí kolmo k přímce p_1 (jsou to kolmice ke společné tečně p_1 kružnic k_2, k_3 ve společném dotykovém bodě T_1); je tedy rovina $\sigma_1 \equiv (T_1, S_2, S_3)$ kolmá k přímce p_1. Podobně je $\sigma_2 \perp p_2$, kde $\sigma_2 \equiv (T_2, S_3, S_1)$, $\sigma_3 \equiv (T_3, S_1, S_2)$. Každé dvě z rovin σ_1, σ_2, σ_3 jsou různoběžné; kdyby totiž např. platilo $\sigma_1 \parallel \sigma_2$, potom by o přímkách $p_1 \perp \sigma_1$, $p_2 \perp \sigma_2$ platilo $p_1 \parallel p_2$, což je spor s předpokladem úlohy. Přitom tyto roviny nemohou obsahovat touž přímku x; jinak by totiž byly přímky p_1, p_2, p_3 vesměs rovnoběžné s jistou rovinou $\xi \perp x$, a to je spor s textem úlohy. Proto mají roviny σ_1, σ_2, σ_3 společný jediný bod, který označíme S.

Jestliže existuje plocha kulová, o které se mluví v textu úlohy, jsou přímky p_1, p_2, p_3 tečnami této plochy a roviny $\sigma_1 \perp p_1$, $\sigma_2 \perp p_2$, $\sigma_3 \perp p_3$, sestrojené pořadě v bodech T_1, T_2, T_3, nutně procházejí středem této plochy; podle předchozího je to právě bod S. Tím je dána konstrukce.

Konstrukce. Sestrojme roviny $\sigma_1 \perp p_1$, $\sigma_2 \perp p_2$, $\sigma_3 \perp p_3$ pořadě v bodech T_1, T_2, T_3 a označme S společný bod těchto rovin. Potom je $\varkappa \equiv (S, r = ST_1)$ kulová plocha, o níž mluví text úlohy.

Důkaz. Označme pořadě $s_1 \equiv (\sigma_2, \sigma_3)$, $s_2 = (\sigma_3, \sigma_1)$, $s_3 \equiv (\sigma_1, \sigma_2)$, kde přímky s_1, s_2, s_3 procházejí pořadě body S_1, S_2, S_3 a přitom dále všechny tři procházejí bodem S. Protože je $\sigma_2 \perp p_2$, $\sigma_3 \perp p_3$, $\varrho_1 \equiv (p_2, p_3)$, je $s_1 \perp \varrho_1$. Buď nyní X_1 libovolným bodem kružnice k_1; protože bod S leží na přímce $s_1 \perp \varrho_1$, přičemž s_1 prochází bodem S_1, je

$$SX_1 = ST_2 = ST_3 \qquad (2)$$

pro každou polohu bodu X_1. Buďte X_2, X_3 pořadě body kružnic k_2, k_3; podobně jako výše se dokáže, že platí

$$SX_2 = ST_3 = ST_1, \tag{3}$$

$$SX_3 = ST_1 = ST_2. \tag{4}$$

Ze (2) až (4) plyne

$$SX_1 = SX_2 = SX_3 = r,$$

takže všechny body kružnic k_1, k_2, k_3 leží na sestrojené kulové ploše $\varkappa \equiv (S, r)$. Protože bod S existuje a je jediný (viz rozbor), přičemž zřejmě je $S \not\equiv T_1$, existuje i plocha $\varkappa$, a to jediná.

Tím je řešení úlohy provedeno.

6. Pro žádné celé číslo x neplatí vztah

$$x^2 = 12n + 5, \tag{1}$$

kde n je celé číslo. Dokažte.

Řešení. Nechť existuje celé číslo x, o němž platí vztah (1). (Dokážeme, že to není možné.)

Ze vztahu (1) plyne

$$x^2 - 5 = 12n. \tag{2}$$

Přitom číslo $12\,n$ je zřejmě dělitelné třemi; ze vztahu (2) pak plyne, že i číslo $x^2 - 5$ je nutně dělitelné třemi, tj. má platit

$$x^2 - 5 = 3k, \tag{3}$$

kde k je vhodné celé číslo. Ze vztahu (3) plyne

$$x^2 = 3\,(k + 1) + 2. \tag{4}$$

To značí, že při dělení čísla x^2 číslem 3 má být zbytek roven číslu 2.

Dokážeme, že to není možné, neboť platí věta **P**: „Druhá mocnina y^2 celého čísla y má při dělení třemi za zbytek právě jedno z čísel 0, 1.“

Provedením důkazu této věty bude prokázáno, že vztah (4) nemůže platit, tj., že dospíváme ke sporu.

Důkaz věty **P**. Číslo y má při dělení číslem 3 jeden ze zbytků 0, 1, 2, takže platí právě jeden ze vztahů

$$y = 3m, \tag{5}$$
$$y = 3m + 1, \tag{6}$$
$$y = 3m + 2, \tag{7}$$

kde m je vhodné celé číslo. Umocněním obou stran těchto vztahů na druhou pořadě dostaneme

$$y^2 = 3(3m^2), \tag{5'}$$
$$y^2 = 3(3m^2 + 2m) + 1, \tag{6'}$$
$$y^2 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1. \tag{7'}$$

Ze vztahů (5′) až (7′) plyne, že číslo y^2 má při dělení třemi za zbytek buď číslo 0 nebo číslo 1. Tím jsme provedli důkaz věty **P**, takže vztah (4) je s dokázanou větou **P** ve sporu, čímž je důkaz tvrzení dané úlohy proveden.

Jiné řešení. Předpokládejme, že existuje celé číslo x, o němž platí vztah (1). Dokážeme, že tento předpoklad vede ke sporu.

Protože $12n + 5 = 2(6n + 2) + 1$, je toto číslo liché a podle (1) je i číslo x^2 liché. Proto musí být i číslo x liché. Platí totiž věta: „Druhá mocnina lichého čísla je číslo liché, druhá mocnina čísla sudého je číslo sudé.“

Důkaz. Sudé číslo lze psát ve tvaru $2p$, kde p je vhodné celé číslo. Tu platí $(2p)^2 = 2(2p^2)$, což je číslo sudé.

Liché číslo lze psát ve tvaru $2q + 1$, kde q je vhodné celé číslo. Tu platí $(2q + 1)^2 = 2(2q^2 + 2q) + 1$, a to je číslo liché.

Tím je věta dokázána.

Je tedy x číslo liché a lze je psát ve tvaru $x = 2k + 1$, kde k je celé číslo. Po dosazení do vztahu (1) dostaneme

$$(2k + 1)^2 = 12n + 5$$

neboli

$$4k^2 + 4k + 1 = 12n + 5$$

a po úpravě

$$4k(k + 1) = 4(3n + 1);$$

po znásobení obou stran této rovnosti číslem $\frac{1}{4}$ dostaneme

$$k(k + 1) = 3n + 1. \qquad (8)$$

Zbytek po dělení čísla $3n + 1$ číslem 3 je 1, tj. toto číslo není dělitelno třemi, a proto žádné z čísel k, $k + 1$ není dělitelné 3; musí tedy platit $k = 3m + 1$, kde m je celé číslo. Po dosazení do vztahu (8) obdržíme

$$(3m + 1)(3m + 2) = 3n + 1$$

neboli

$$9m^2 + 9m + 2 = 3n + 1;$$

odtud po snadné úpravě dostaneme

$$1 = 3(n - 3m^2 - 3m).$$

Na pravé straně poslední rovnosti je číslo dělitelné třemi, na levé číslo 1, což je spor.

Tím je úloha rozřešena.

Poznámka. Závěrečnou úvahu od vztahu (8) lze provést též takto:

Číslo k má po dělení číslem 3 právě jeden ze zbytků a) 0; b) 1; c) 2. Nechť v dalším m značí vhodné celé číslo.

Případ (a) nemůže nastat, neboť číslo $3n + 1$ ve vztahu (8) má zbytek 1.

Případ (b) nemůže nastat, neboť $k = 3m + 1$, $k + 1 = 3m + 2$ a tedy

$$k(k + 1) = 9m^2 + 9m + 2 = 3(3m^2 + 3m) + 2$$

a tudíž má tento součin po dělení třemi zbytek 2, kdežto číslo $3n + 1$ má zbytek 1.

Případ (c) nemůže nastat, neboť $k = 3m + 2$, $k + 1 = 3m + 3 = 3(m + 1)$, takže poslední číslo dělitelné třemi a tím současně je třemi dělitelné i číslo $k(k + 1)$, kdežto číslo $3n + 1$ ze vztahu (8) není třemi dělitelné.

Tím je závěrečná úvaha ke vztahu (8) provedena a dokázáno, že vztah (8) je sporný.

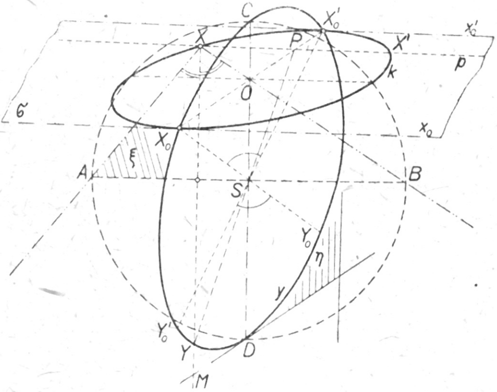
7. Nech je daná guľová plocha $\varkappa \equiv (S, r)$ a jej určitý priemer AB. Ďalej nech je daná rovina $\sigma \parallel AB$, ktorá pretína plochu $\varkappa$ v kružnici $k \equiv (O, \varrho)$, pričom je $O \not\equiv S$. Označme X ľubovoľný bod kružnice k a nech XM je os uhla $\sphericalangle AXB$; ďalej označme $Y \not\equiv X$ spoločný bod polpriamky XM s plochou $\varkappa$.

Čo vyplní bod Y, keď bod X prebieha všetky body kružnice k?

Riešenie (obr. 12). Časť I. Nech X je ľubovoľný bod vedľajšej kružnice $k \equiv (O, \varrho)$ plochy guľovej $\varkappa \equiv (S, r)$; pritom rovina σ kružnice k je rovnobežná s priamkou AB. Rovinu ABX označme ξ; rovina ξ pretne plochu $\varkappa$ v hlavnej kružnici $x \equiv (S, r)$, pričom je $\sphericalangle AXB = 90°$ (obvodový uhol nad priemerom AB kružnice x). Preto os XM uhla $\sphericalangle AXB$ delí uhol $\sphericalangle AXB$ na dva zhodné styčné uhly $\sphericalangle AXM$, $\sphericalangle MXB$ (pozri obr. 13) a každý z nich je 45°. Polpriamka XM má s kružnicou x spoločný bod $Y \not\equiv X$, lebo jej časť leží vnútri kružnice x. Ale k zhodným styčným obvodovým uhlom $\sphericalangle AXM \equiv \sphericalangle AXY$, $\sphericalangle MXB \equiv \sphericalangle YXB$ prislúchajú zhodné stredové uhly $\sphericalangle ASY$, $\sphericalangle YSB$, z ktorých každý je $45° \cdot 2 = 90°$; preto je $AS \perp SY$. Bod Y teda leží vnútri polroviny opačnej k polrovine ABX, a to na polpriamke $SY \perp AB$. To znamená, že Y leží v rovine $\eta \perp AB$, vedenej bodom S.

Rovina η pretne plochu $\varkappa$ v hlavnej kružnici $y \equiv (S, r)$ a pretože Y leží na ploche $\varkappa$, leží bod Y nutne na kružnici y.

Zostrojme ku kružnici k dotyčnice $x_0 \parallel AB$, $x_0' \parallel AB$ a označme X_0, X_0' príslušné dotykové body. Potom kružnica k leží celá v páse rovnobežiek $x_0 \parallel x_0'$. Uvažujme o priemeroch X_0SY_0, $X_0'SY_0'$ kružnice y. Ľahko usúdime, že všetky body Y, ktoré



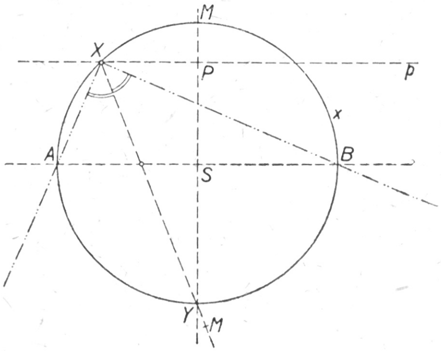
Obr. 12.

zostrojíme, musia ležať v uhle $\sphericalangle Y_0SY_0'$, ktorý je vrcholový k uhlu $\sphericalangle X_0SX_0'$; ležia teda všetky body Y na oblúku $\widehat{Y_0Y_0'}$ kružnice y, ktorého stredovým uhlom je uhol $\sphericalangle Y_0SY_0'$. Pritom body Y_0, Y_0' majú tú vlastnosť, že polpriamky X_0Y_0, $X_0'Y_0'$ sú po rade osami uhlov $\sphericalangle AX_0B$, $\sphericalangle AX_0'B$, lebo rovina η je kolmá na roviny trojuholníkov AX_0B, $AX_0'B$, ktoré sú rovnoramenné.

Časť II. Teraz musíme ešte dokázať: Ku každému bodu Y práve uvažovaného oblúka $\widehat{Y_0Y_0'}$ prislúcha určitý bod X kružnice k tak, že polpriamka XY je osou uhla $\sphericalangle AXB$.

O bodoch Y_0, Y'_0 je to zrejmé. Nech bod Y je rôzny od Y_0, Y'_0. Zostrojme rovinu $\xi \equiv ABY$ a označme p jej priesečnicu s rovinou σ. Dokážeme, že priamka p existuje.

Dôkaz. Polpriamka SY leží v uhle $\sphericalangle Y_0SY'_0$ a preto polpriamka SP, opačná k nej, leží v uhle $\sphericalangle X_0SX'_0$, ktorý je k predošlému vrcholový. Označme P spoločný bod polpriamky



Obr. 13.

SP s úsečkou $X_0X'_0$. Bodom P práve prechádza priamka $p \parallel AB$. Tým je dokázaná existencia priamky p.

Pretože P leží vnútri kružnice k, je priamka p sečnicou tejto kružnice; označme X, X' ich priesečníky. Dokážeme, že osou uhla $\sphericalangle ABX$, ležiaceho v rovine $\xi \equiv ABY$, je polpriamka XY. Podľa časti I tohto riešenia prechádza os XM uhla $\sphericalangle AXB$ spoločným bodom roviny $\xi \equiv ABX$ a oblúka $\widehat{Y_0Y'_0}$ kružnice y, ktorý leží v uhle $\sphericalangle Y_0SY'_0$; týmto bodom je však daný bod Y, od ktorého sme v tejto úvahe vyšli. Ten istý dôkaz môžeme urobiť aj pre bod X'. Tým je dôkaz ukončený.

Záver. Množinou všetkých hľadaných bodov je oblúk $\widehat{Y_0Y'_0}$, o ktorom sme uvažovali v časti I.

8. Množina všetkých komplexných čísel z, pre ktoré platí vzťah

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} < 2, \tag{1}$$

je totožná s množinou všetkých komplexných čísel z, pre ktoré platí

$$\left| z - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Dokážte to a potom preskúmajte, akú časť roviny vyplnia obrazy komplexných čísel z, pre ktoré platia súčasne oba vzťahy

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \leqq 2, \tag{3}$$

$$z + \bar{z} \leqq 2. \tag{4}$$

(Poznámka. Číslo $\bar{z}$ je komplexné číslo združené k číslu z.

Riešenie. Nerovnosti (1), (3), (4) majú pre $z \neq 0$ zmysel, pretože ľavé strany sú reálne čísla (súčet komplexných čísel združených). Najprv dokážeme, že zo vzťahu (2) vyplýva vzťah (1).

Platí postupne

$$\left| z - \frac{1}{2} \right|^2 = \left(z - \frac{1}{2} \right) \left(\bar{z} - \frac{1}{2} \right) = z\bar{z} - \frac{1}{2}(z + \bar{z}) + \frac{1}{4};$$

teda

$$\left| z - \frac{1}{2} \right|^2 = z\bar{z} - \frac{1}{2}(z + \bar{z}) + \frac{1}{4}. \tag{5}$$

Pre $\left| z - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2}$ je $\left| z - \frac{1}{2} \right|^2 > \frac{1}{4}$ a zo vzťahu (5) potom vyplýva

$$z\bar{z} - \frac{1}{2}(z + \bar{z}) > 0,$$

čiže

$$z + \bar{z} < 2\, z\bar{z}$$

a pretože je $z \neq 0$, vyplýva z posledného vzťahu po znásobení oboch jeho strán číslom $\frac{1}{z\bar{z}} > 0$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} < 2,$$

čo je vzťah (1).

Obrátene, ak platí vzťah (1), dokážeme platnosť vzťahu (2).

Zo vzťahu (1) vyplýva po znásobení oboch jeho strán číslom $z\bar{z} > 0$, že postupne platí

$$z + \bar{z} < 2\, z\bar{z},$$

$$z\bar{z} - \frac{1}{2}(z + \bar{z}) > 0,$$

$$z\bar{z} - \frac{1}{2}(z + \bar{z}) + \frac{1}{4} > \frac{1}{4},$$

$$\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\bar{z} - \frac{1}{2}\right) > \frac{1}{4}$$

a teda

$$\left|z - \frac{1}{2}\right|^2 > \frac{1}{4}$$

alebo

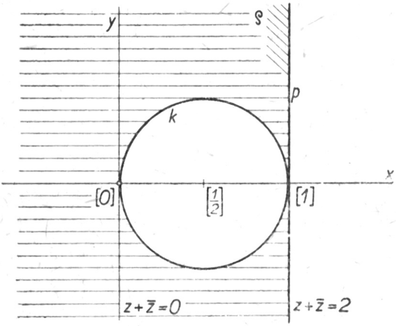
$$\left|z - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2},$$

čo je vzťah (2).

Tým sme dokázali ekvivalentnosť vzťahov (1), (2).

Ak nerovnosti (1), (2) nahradíme rovnosťami, dokážeme tým istým spôsobom, že za podmienky $z \neq 0$ sú oba vzťahy ekvivalentné. Označme $[z]$ obraz komplexného čísla z v Gaussovej rovine.

Je známe, že vzťah $\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$ značí, že obrazy $[z]$, $\left[\frac{1}{2}\right]$ čísel z, $\frac{1}{2}$ v Gaussovej rovine majú vzdialenosť $\frac{1}{2}$ alebo,



Obr. 14.

že body $[z]$ pre $z \neq 0$ vyplňujú kružnicu $k \equi \left(\left[\frac{1}{2}\right], \frac{1}{2}\right)$, a to s vylúčením počiatku $[0]$ súradníc.

Všetky body $[z]$ (pri $z \neq 0$), pre ktoré platí (3) vzhľadom na ekvivalentnosť so vzťahom $\left| z - \frac{1}{2} \right| \geqq 2$, ležia zrejme zvonku kružnice k, poprípade na kružnici k (s výnimkou bodu $[0]$). Body $[z]$, pre ktoré platí (4), ležia v polrovine $\varrho \equiv pO$, kde O je počiatok súradníc a $p \parallel y$ je priamka, ktorá prechádza bodom $[1]$. To vyplýva z toho, že číslo $z + \bar{z}$ má reálnu časť rovnajúcu sa dvojnásobku reálnej časti čísla z.

Spojením oboch výsledkov dostávame tento z á v e r : Všetky čísla z, pre ktoré platí (3) a (4), ležia v spoločnej časti polroviny ϱ na vonkajšku kružnice $k \equiv \left(\left[\frac{1}{2}\right], \frac{1}{2}\right)$, doplneného o body tejto kružnice s výnimkou bodu [0]. (Pozri vyšrafovanú časť v obr. 14.)

9. Nechť daná přirozená čísla A, B, C (zapsaná v dekadické soustavě) mají pořadě a, b, c cifer. Potom platí

$$10^{n(a+b-c-2)} < \left(\frac{AB}{C}\right)^n < 10^{n(a+b-c+1)},$$

kde n je dané přirozené číslo.

Dokažte a na základě toho rozhodněte, které vztahy platí o počtu cifer čísla $\left(\frac{AB}{C}\right)^n$, jestliže AB je dělitelné číslem C.

Řešení. Podle textu úlohy platí

$$10^{a-1} \leqq A < 10^a, \tag{1}$$
$$10^{b-1} \leqq B < 10^b, \tag{2}$$
$$10^{c-1} \leqq C < 10^c. \tag{3}$$

Po umocnění na n-tou jednotlivých stran v nerovnostech (1), (2) a (3) dostaneme

$$10^{n(a-1)} \leqq A^n < 10^{na}, \tag{4}$$
$$10^{n(b-1)} \leqq B^n < 10^{nb}, \tag{5}$$
$$10^{n(c-1)} \leqq C^n < 10^{nc}. \tag{6}$$

Znásobením příslušných stran ze (4) a (5) dostaneme

$$10^{n(a+b-2)} \leqq A^nB^n < 10^{n(a+b)}. \tag{7}$$

Ze vztahu (6) dostaneme

$$\frac{1}{10^{nc}} < \frac{1}{C^n} \leqq \frac{1}{10^{n(c-1)}}. \tag{8}$$

Znásobením příslušných stran v (7) a (8) dostaneme dále

$$\frac{10^{n(a+b-2)}}{10^{nc}} < \frac{A^n B^n}{C^n} < \frac{10^{n(a+b)}}{10^{n(c-1)}}$$

neboli

$$10^{n(a+b-c-2)} < \left(\frac{AB}{C}\right)^n < 10^{n(a+b-c+1)}. \tag{9}$$

Jestliže $\frac{AB}{C}$ je přirozené číslo, je též $Q = \left(\frac{AB}{C}\right)^n$ přirozené číslo. Čísla

$$m = 10^{n(a+b-c-2)}, \qquad M = 10^{n(a+b-c+1)}$$

mají po řadě tyto počty cifer:

$$x = n(a+b-c-2)+1,$$
$$y = n(a+b-c+1)+1.$$

Označme q počet cifer čísla Q. Ze vztahu (9) plyne, že pro q platí

$$x \leqq q < y; \tag{10}$$

vztah (9) připouští, aby čísla m, Q měla týž počet cifer, naproti tomu z něho plyne, že Q má alespoň o jednu cifru méně než číslo M.

Vztahy (9) a (10) je řešení úlohy provedeno.

10. Nech sú dané dve mimobežky AMB, CND, pričom MN je najkratšia priečka týchto mimobežiek; ďalej nech platí $MA = MB = NC = ND = x$, kde $x > 0$ je dané číslo.

a) Potom platí $AD = BC$, $AC = BD$; dokážte to.

b) Preskúmajte množinu stredov úsečiek AD, BC, AC, BD, keď x prebieha všetky kladné čísla.

c) Vypočítajte objem štvorstena $ABCD$, ak sú dané čísla x, $y = MN$ a ω, kde je ω odchýlka mimobežiek AMB, CND.

Řešení (obr. 15). O příčce MN, jak známo, platí

$$MN \perp AB,\ MN \perp CD. \tag{1}$$

Sestrojme v rovině MCD obdélník $CDD'C'$, který má úsečku MN za střední příčku, takže je

$$x = MC' = MD' = NC = ND,\ C'D' \parallel CD, \tag{2}$$

$$CC' \parallel MN \parallel DD'. \tag{3}$$

Dále v rovině NAB sestrojme obdélník $ABB'A'$, který má úsečku MN za střední příčku, takže je

$$x = NA' = NB' = MA = MB,\ A'B' \parallel AB, \tag{2'}$$

$$AA' \parallel MN \parallel BB'. \tag{3'}$$

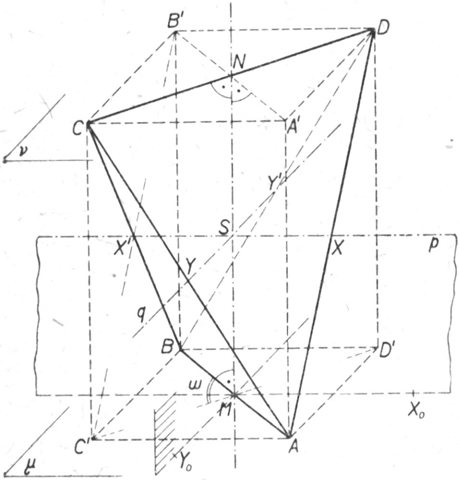
Dokážeme, že $AC'BD'A'CB'D$ je kvádr: Podle vztahu (2) je $AC'BD'$ obdélník, neboť je to rovnoběžník [úhlopříčky se podle (2) navzájem půlí] a jeho úhlopříčky jsou shodné (viz Geometrie 8, str. 176, příklad 6).

Dále podle (3), (3') jsou úsečky AA', $C'C$, BB', $D'D$ rovnoběžné a shodné s úsečkou MN; protože platí (1), je $MN \perp MAC'$ (je totiž $C'D' \parallel CD$). Jsou tedy úsečky AA', $C'C$, BB', $D'D$ kolmé k rovině obdélníka $AC'BD'$. Tím je proveden důkaz vysloveného tvrzení, že $AC'BD'A'CB'D$ je kvádr.

a) Protější hrany daného čtyřstěnu $ABCD$ jsou stěnovými úhlopříčkami v protějších stěnách právě sestrojeného kvádru; tyto úhlopříčky v kvádru jsou shodné. Tím je dokázáno tvrzení úlohy a), že totiž platí

$$AD = BC,\ AC = BD.$$

b) Označme pořadě X, X' středy protějších hran AD, BC daného čtyřstěnu $ABCD$; podobně označme pořadě Y, Y' středy protějších hran AC, BD téhož čtyřstěnu. Body X, X', Y, Y' jsou však středy stěn sestrojeného kvádru. Přímky MN, $p \equiv XX'$, $q \equiv YY'$ procházejí středem S kvádru a jsou k sobě kolmé. Je známo, že platí $p \parallel MX_0$, $q \parallel MY_0$, kde $MX_0 \parallel AC'$



Obr. 15.

a $MY_0 \parallel AD'$ jsou střední příčky obdélníka $AC'BD'$. Ale MX_0, MY_0 jsou přímky, které půlí duté úhly, v něž rovinu MAC' rozdělují obě různoběžky AMB, $C'MD'$; první z různoběžek je dána, druhá $C'D'$ je rovnoběžná s danou přímkou CD, tj. je rovněž dána. Proto přímky MX_0, MY_0 lze sestrojit s jediným výsledkem, nezávisle na čísle x, při konstrukci zmíněného pomocného kvádru. Leží tedy středy X, X' na přímce p a středy Y, Y' na přímce q. Proto i přímky p, q mají polohu zcela určitou, nezávislou na čísle x.

Obráceně kterýkoli bod $X \neq S$ přímky p spolu s kterýmkoli bodem $Y \neq S$ přímky q určují jediný kvádr, který má tyto vlastnosti:

1. Dvě stěny μ, ν kvádru procházejí pořadě přímkami AB, CD, přičemž je $\mu \parallel CD$, $\nu \parallel AB$.
2. Bod S je středem kvádru.
3. Rovina ξ jedné stěny prochází bodem X a platí $\xi \parallel qM$.
4. Rovina η jedné stěny prochází bodem Y a platí $\eta \parallel pM$.

Tomuto kvádru lze vepsat čtyřstěn typu námi uvažovaného čtyřstěnu $ABCD$; přitom M, N, X, Y jsou středy hran tohoto čtyřstěnu, přičemž jeho střední příčky jsou k sobě kolmé a navzájem se půlí v bodě S.

Závěr. Množinou všech středů v úloze b) jmenovaných úseček jsou dvě kolmice p, q výše popsané, přičemž musíme vyloučit jejich společný bod S.

c) Daný čtyřstěn dostaneme z pomocného kvádru $AC'BD'A'CB'D$, když od kvádru oddělíme čtyři čtyřstěny

$$ABCC', \; BCDB', \; ABDD', \; ACDA'.$$

Je-li P obsah podstavné stěny $AC'BD'$ pomocného kvádru, je objem každého z těchto čtyřstěnů roven $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} Py$ neboli

$$\frac{1}{6} Py.$$

Objem O všech čtyř čtyřstěnů pak je

$$O = \frac{2}{3} Py.$$

Objem pomocného kvádru je Py a tedy objem V daného čtyřstěnu $ABCD$ je

$$V = \frac{1}{3} Py. \qquad (4)$$

Podle známého vzorce je obsah P obdélníka s úhlopříčkami velikosti $2x$ a s odchylkou ω úhlopříček roven

$$P = \tfrac{1}{2} \cdot (2x)^2 \sin \omega = 2x^2 \sin \omega.$$

Dosaďme za P do vztahu (4); dostaneme

$$V = \frac{2}{3}\, x^2 y \sin \omega,$$

což jsme měli vypočítat.

11. Nájdite všetky reálne čísla x, pre ktoré platí

$$| \operatorname{tg} 2x | = \operatorname{tg} | x |. \tag{1}$$

Riešenie. Ak pre nejaké číslo x_0 platí $| \operatorname{tg} 2\, x_0 | = \operatorname{tg} | x_0 |$, platí aj $| \operatorname{tg} 2 (-x_0) | = \operatorname{tg} | -x_0 |$. Ak je teda x_0 riešením rovnice (1), je aj číslo $-x_0$ jej riešením. Ak vyhľadáme teda všetky nezáporné riešenia, budú tým známe aj vôbec všetky reálne riešenia danej rovnice.

I. Vyhľadajme teraz všetky riešenia rovnice (1), ktoré spĺňajú nerovnosť

$$0 \leqq x < \pi. \tag{2}$$

a) Pre $x = \frac{1}{2}\pi$ nie je pravá strana rovnice definovaná. Preto $x = \frac{1}{2}\pi$ nie je riešením tejto rovnice.

b) Pre $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$ platí

$$\operatorname{tg} | x | = \operatorname{tg} x < 0,$$

avšak ľavá strana rovnice (1) je nezáporné číslo. Teda ani medzi práve uvedenými číslami x nenájdeme riešenie danej rovnice.

c) Zostáva nám preskúmať tie čísla x, pre ktoré je

$$0 \leqq x < \tfrac{1}{2}\pi. \tag{2'}$$

Ak rovnica (1) má nejaké riešenie x, platí podľa známeho vzorca

$$\left|\frac{2\,\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}\right| = \mathrm{tg}x. \tag{3}$$

Budeme teraz riešiť rovnicu (3). Rozoznávajme dva prípady.

Prípad [1]. Hľadajme také riešenia x, pre ktoré je

$$\frac{2\,\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x} \geqq 0.$$

Potom rovnica (3) znie

$$\frac{2\,\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x} = \mathrm{tg}x. \tag{4}$$

Rovnici zrejme vyhovuje $\mathrm{tg}x = 0$ a vzhľadom na predpoklad (2′) dostávame

$$x = 0,$$

čo zrejme vyhovuje rovnici (1).

Ak rovnica (4) má ďalšie riešenie $x \neq 0$ z intervalu (2′), pre toto číslo x je $\mathrm{tg}x \neq 0$. Deľme obe strany rovnice (4) číslom $\mathrm{tg}x$; dostaneme

$$\frac{2}{1-\mathrm{tg}^2x} = 1$$

a stade $2 = 1 - \mathrm{tg}^2x$ alebo

$$\mathrm{tg}^2x = -1,$$

čo nemožno splniť pre žiadne uvažované číslo x.

Prípad [2]. Hľadajme ďalej také riešenia x z intervalu (2′), pre ktoré je

$$\frac{2\,\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x} < 0. \tag{5}$$

Potom rovnica (3) znie

$$-\frac{2\,\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2x}=\mathrm{tg}x. \tag{6}$$

Tu nemôže byť $\mathrm{tg}x = 0$, lebo by neplatila nerovnosť (5). Deľme preto obidve strany rovnice (6) číslom $\mathrm{tg}x \neq 0$, čím dostaneme

$$-\frac{2}{1-\mathrm{tg}^2x}=1.$$

Z tejto rovnice vyplýva $-2 = 1 - \mathrm{tg}^2x$ alebo $\mathrm{tg}^2x = 3$ a teda musí byť buď

$$\mathrm{tg}x = \sqrt{3}, \tag{7}$$

buď

$$\mathrm{tg}x = -\sqrt{3}. \tag{7'}$$

Zo vzťahu (7) dostávame vzhľadom na predpoklad (2')

$$x = \tfrac{1}{2}\pi,$$

kdežto vzťah (7') nemá za predpokladu (2') riešenie. Skúškou sa ľahko presvedčíme, že číslo $x = \frac{1}{3}\pi$ je riešením rovnice (1).

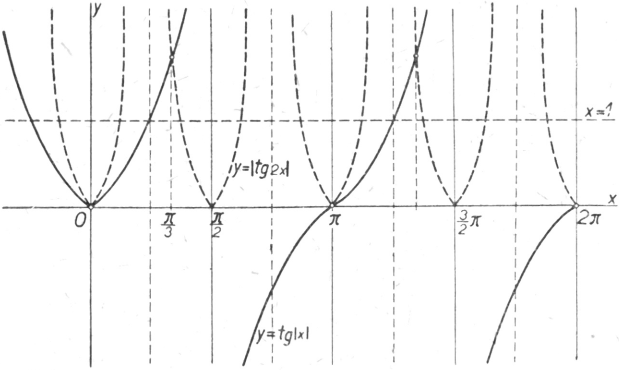
II. Zatiaľ sme skúmali čísla intervalu $0 \leq x < \pi$ [pozri (2)]. Pretože funkcia tangens je periodická s periódou π, t. j. platí $\mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}x$ pre každé číslo x z oboru definície funkcie tangens, možno každé kladné riešenie rovnice (1) vypočítať tak, že k číslam 0, $\frac{1}{3}\pi$ pripočítame vhodný (prirodzený) násobok čísla π.

Záver. Riešením rovnice (1) je každé číslo x, ktoré splňuje vzťah

$$x = \xi + k\pi,$$

kde k je ľubovoľné nezáporné celé číslo a ξ je niektoré z čísel 0, $\frac{1}{3}\pi$ a ďalej každé číslo x, ktoré je opačné k niektorému z uvedených čísel (t. j. každé číslo x tvaru $x = -\xi - k\pi$, kde ξ má význam ako vyššie a k je ľubovoľné nezáporné celé číslo).

Pozri tiež obrázok 16, kde je znázornené grafické riešenie rovnice (1) pre nezáporné x.



Obr. 16.

12. Elektromotorická síla baterie je E voltů, její vnitřní odpor R_i ohmů.

a) Jak velký musí být odpor spotřebiče, aby jeho výkon byl P wattů? Proveďte diskusi.

b) Jaký může být maximální výkon spotřebiče?

Řešení. Z fysiky je známo, že pro výkon P spotřebiče platí $P = R_x I^2$, kde R_x značí odpor spotřebiče a I proud, který jím protéká. Dále víme, že uvažovaná baterie protlačí spotřebičem proud $I = \dfrac{E}{R_i + R_x}$, takže pro výkon platí

$$P = \frac{E^2 R_x}{(R_i + R_x)^2}. \qquad (1)$$

Fysikální smysl mají jen ty případy, ve kterých $E > 0$, $R_i > 0$, $P > 0$ a zejména $R_x > 0$.

Možno tedy matematicky formulovat danou úlohu takto: K předepsaným číslům E, R_i, P máme určit kladné číslo R_x tak, aby platil vztah (1).

Řešíme-li (1) podle R_x, dostaneme:

$$PR_x^2 + (2\,PR_i - E^2)\,R_x + PR_i = 0, \tag{2}$$

takže

$$(R_x)_{1,2} = \frac{E^2 - 2\,PR_i \pm \sqrt{(2\,PR_i - E^2)^2 - 4\,P^2R_i^2}}{2\,P}. \tag{2a}$$

I. Aby k předepsaným hodnotám E, R_i, P existovalo reálné číslo R_x, musí nutně platit

$$(2\,PR_i - E^2)^2 \geqq 4\,P^2R_i^2,$$

tj.

$$|\,2\,PR_i - E^2\,| \geqq 2\,PR_i. \tag{3}$$

Snadno nahlédneme, že musí být

$$2\,PR_i - E^2 < 0. \tag{4}$$

Vidíme, že kdyby bylo $2\,PR_i - E^2 \geqq 0$, plynulo by ze (3), že

$$2\,PR_i - E^2 \geqq 2\,PR_i,$$

tj.

$$-\,E^2 \geqq 0,$$

což je spor s předpokladem $E > 0$. Možno tedy nerovnost (3) psát pomocí (4) takto: $E^2 - 2\,PR_i \geqq 2\,PR_i$,
tj.

$$E^2 \geqq 4\,PR_i. \tag{5}$$

II. Přesvědčíme se, že nerovnost (5) je zároveň postačující podmínkou pro to, aby obě řešení $(R_x)_{1,2}$ rovnice (2) byla kladná, jak to žádá fysikální podstata úlohy.

Vskutku, z (5) plyne (odečteme-li na obou stranách $2\,PR_i$)

$$E^2 - 2\,PR_i \geqq 2\,PR_i > 0,$$

a ježto při platnosti (5) je diskriminant

$$(2\,PR_i - E^2)^2 - 4\,P^2R_i^2 \geqq 0,$$

bude

$$E^2 - 2\,PR_i + \sqrt{(2\,PR_i - E^2)^2 - 4\,P^2R_i^2} > 0$$

a tedy též

$$(R_x)_1 > 0.$$

Podobně ukážeme, že je $(R_x)_2 > 0$. K tomu cíli si všimněme, že zřejmě platí

$$(E^2 - 2\,PR_i)^2 > (2\,PR_i - E^2)^2 - 4\,P^2R_i^2.$$

Při platnosti (5) je pravá strana této nerovnosti nezáporná a zároveň $E^2 - 2\,PR_i > 0$, takže platí

$$E^2 - 2\,PR_i > \sqrt{(2\,PR_i - E^2)^2 - 4\,P^2R_i^2},$$

tj.

$$E^2 - 2\,PR_i - \sqrt{(2\,PR_i - E^2)^2 - 4\,P^2R_i^2} > 0,$$

takže platí též $(R_x)_2 > 0$.

Závěr. Úloha má řešení vždy, platí-li $E^2 \geqq 4\,PR_i$. Existují dvě různá řešení, je-li $E^2 > 4\,PR_i$ a jediné, je-li $E^2 = 4\,PR_i$.

Určení maximálního výkonu. Z předešlého vyplývá: Aby existovala pro dané hodnoty E, R_i, P řešení, musí být $E^2 \geqq 4\,PR_i$, tj. $P \leqq \dfrac{E^2}{4\,R_i}$.

Jinými slovy, při pevných E, R_i může být výkon P nejvýše roven číslu $P_{\max} = \dfrac{E^2}{4\,R_i}$.

Prostým dosazením do vzorce (2a) zjistíme, že tohoto maximálního výkonu bude dosaženo pro odpor spotřebiče $R_x = R_i$.

Závěr. Maximální výkon, který může baterie dodat do spotřebiče, je tedy

$$P_{\max} = \frac{E^2}{4\,R_i}.$$

2. Úlohy II. kola kategorie A

1. Určte všetky reálne riešenia rovnice

$$\sqrt{x^2 - p} = x - p, \tag{1}$$

kde p je dané reálne číslo.

(Urobte diskusiu vzhľadom na číslo p.)

Riešenie. Ak (reálne) číslo x je riešením rovnice (1), je ľavá strana tejto rovnice nezáporné číslo a teda pravá strana je tiež nezáporné číslo, t. j. platí nevyhnutne $x - p \geqq 0$, t. j.

$$x \geqq p. \tag{2}$$

Po umocnení oboch strán rovnice (1) na druhú dostaneme rovnicu

$$x^2 - p = x^2 - 2\,px + p^2$$

alebo

$$2\,px = p\,(p + 1). \tag{3}$$

Sú dve možnosti:

Prípad [1]. Nech je $p = 0$, potom rovnica (1) má tvar

$$\sqrt{x^2} = x$$

alebo

$$|\,x\,| = x,$$

čo splňuje každé nezáporné číslo x.

Prípad [2]. Nech je $p \neq 0$. Po vynásobení oboch strán rovnice (3) číslom $\frac{1}{2p}$ dostaneme

$$x = \frac{1}{2}(p + 1). \tag{4}$$

Podľa (2) môže byť takto vypočítané číslo x koreňom rovnice (1) len vtedy, keď platí

$$\frac{1}{2}(p + 1) \geqq p,$$

čiže

$$1 \geqq p. \tag{5}$$

Teraz sa presvedčíme o tom, že číslo x dané vzťahom (4), pričom platí (5), je riešením rovnice (1); dosaďme (4) do (1) [označme znakom L ľavú a znakom P pravú stranu rovnice (1) po dosadení]:

$$L = \sqrt{x^2 - p} = \sqrt{\frac{1}{4}(p^2 + 2p + 1) - p} = \frac{1}{2}\sqrt{(1 - p)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}|1 - p|;$$

pretože platí (5), je $1 - p \geqq 0$ a teda $1 - p = |1 - p|$ a preto je

$$L = \frac{1}{2}(1 - p). \tag{6}$$

Ďalej je

$$P = \frac{1}{2}(p + 1) - p = \frac{1}{2}(1 - p), \tag{7}$$

čo je podľa (5) skutočne nezáporné číslo. Vzhľadom na (6) a (7) platí $L = P$ a číslo x dané vzťahom (4) za podmienky (5) je pre $p \neq 0$ riešením danej rovnice (1). Pre $p > 1$ nemá rovnica riešenie.

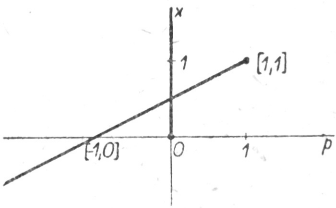
Záver. Rovnica (1)

[1] má nekonečne mnoho riešení pre $p = 0$ (každé nezáporné číslo je riešením);

[2] má pre $0 \neq p \leqq 1$ jediné riešenie (4);

[3] nemá pre $p > 1$ žiadne riešenie.

Výsledok diskuse môžeme znázorniť grafom v obr. 17.



Obr. 17.

Jiné řešení. Především si musíme uvědomit, že reálnou odmocninu máme definovánu pouze pro nezáporný základ. Musí tedy platit soustava:

$$\left.\begin{aligned} x^2 - p &\geqq 0, \\ x - p &\geqq 0. \end{aligned}\right\} \quad (2')$$

K této soustavě se vrátíme po rozřešení rovnice (1). Nyní řešíme rovnici (1).

Nejprve obě strany umocníme na druhou; obdržíme

$$x^2 - p = x^2 - 2\,px + p^2.$$

Kvadratické členy se ruší a máme lineární rovnici

$$-p = -2\,px + p^2.$$

Případ [1]. Je-li $p = 0$, je zřejmé, že této rovnici vyhovuje jako x každé číslo, které splňuje soustavu (2′), tj. reálné nezáporné.

Případ [2]. Je-li $p \neq 0$, je

$$x = \frac{1 + p}{2}.$$

Získaný výraz dosadíme za x do soustavy (2'). Obdržíme

$$\left(\frac{1+p}{2}\right)^2 - p \geqq 0,$$

$$\frac{1+p}{2} - p \geqq 0.$$

Ekvivalentními úpravami prvního vztahu dojdeme ke vztahu:

$$(p-1)^2 \geqq 0,$$

který zřejmě platí pro každé reálné p.

Ekvivalentními úpravami druhého vztahu dojdeme ke vztahu

$$p \leqq 1.$$

Tento vztah musí tedy platit, má-li mít rovnice řešení.

O správnosti řešení bychom se přesvědčili zkouškou, kterou neuvádíme.

Podle řešení s. Bohdana Zelinky,
11.b tř., 1. jsš, Liberec.

2. Buď dán trojúhelník OAC a dále bod M uvnitř úsečky AC tak, že platí $MA > MC$.

Sestrojte lichoběžník $ABCD$ o základnách $AB \parallel CD$ tak, aby bod B padl dovnitř polopřímky OC, bod D dovnitř polopřímky OA a aby bod M byl průsečíkem úhlopříček AC, BD hledaného lichoběžníka.

Proč je $AB > CD$?

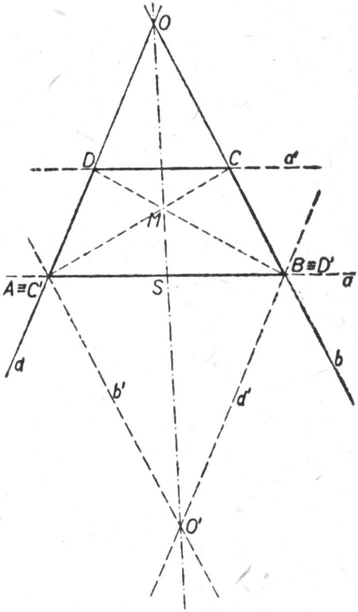
(Při řešení lze použít stejnolehlosti.)

Řešení (obr. 18). *Rozbor.* Předpokládejme, že úloha má řešení, takže existuje lichoběžník $ABCD$, který má úlohou požadované vlastnosti. Uvažujme stejnolehlost (M) o středu M, ve které bodu C přísluší bod $C' \equiv A$. Koeficient této stejnolehlosti je

$$\lambda = -\frac{MA}{MC};$$

podle textu úlohy je $MA > MC > 0$ a tedy $|\lambda| > 1$. V této stejnolehlosti přímkám $b \equiv CB$, $d \equiv AD$, CD pořadě příslušejí přímky $b' \parallel CB$, $d' \parallel AD$, $AB \parallel CD$. Přitom přímka b' prochází body A, O', kde O' je obrazem bodu O ve stejnolehlosti (M), přičemž bod O' leží na polopřímce opačné k polopřímce MO; přímka d' prochází obrazy bodů O, D, tj. body O', B. Je tedy $BOAO'$ rovnoběžník. Pomocí těchto výsledků provedeme *konstrukci*:

Bodem A veďme přímku $b' \parallel OC$ a označme O' její společný bod s polopřímkou OM; bodem O' pak sestrojme přímku $d' \parallel OA$ a označme B společný bod přímek OC, d'. Bod D je pak společný bod přímek OA, MB a $ABCD$ je hledaný lichoběžník.



Obr. 18.

Dokážeme, že úloha má jediné řešení: Z konstrukce plyne, že rovnoběžník $OAO'B$ existuje, a to jediný; proto existuje právě jeden bod B uvnitř polopřímky OC; střed S tohoto rovnoběžníka půlí obě úsečky OO', AB. Ze stejnolehlosti (M), kterou jsme zavedli, plyne, že je $MO' > MO$, a protože je $SO' = SO$, padne bod M nutně dovnitř úsečky SO; je tedy M uvnitř trojúhelníka OAB a proto je C uvnitř úsečky OB. Ve stejnolehlosti (M'), obrácené ke stejnolehlosti (M), příslušejí přímkám $d' \equiv O'B$, $a \equiv AB$ pořadě přímky $d \parallel d'$ (d prochází bodem O), $a' \parallel a$ (a' prochází bodem C) a jejich průsečík D je obrazem bodu B, takže leží na polopřímce opačné k polopřímce MB. Je tedy D vskutku průsečíkem přímek OA, MB, jak bylo provedeno v konstrukci. Bod M leží tedy uvnitř úseček AC, BD a platí $AB \parallel CD$, takže $ABCD$ je lichoběžník. Protože bod C leží uvnitř úsečky OB, leží bod D uvnitř úsečky OA. Dokázali jsme, že lichoběžník $ABCD$ vždy existuje, a to jediný. Ze stejnolehlosti (M') plyne, že je

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MA}{MC} > 1$$

a tedy

$$AB > CD,$$

což jsme právě měli dokázat.

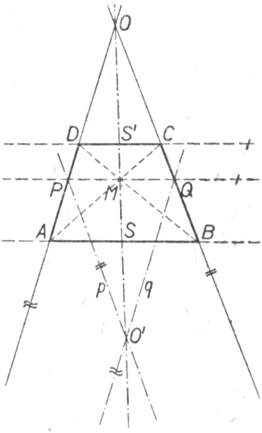
Jiné řešení (jen náčrtek). *Rozbor.* Bodem M veďme rovnoběžku se základnou AB hledaného lichoběžníka $ABCD$ a označme pořadě P, Q její průsečíky s přímkami AD, BC. Nyní dokážeme, **že** bod M je středem úsečky PQ (obr. 19):

Označme pořadě S, S' středy úseček AB, CD, kde $AB > CD$. Ve stejnolehlosti o středu O, která převádí bod A v bod D, přechází úsečka AB v úsečku DC a bod S v bod S'; leží tedy body O, S', S (v právě napsaném pořádku) na přímce SS'. Ve stejnolehlosti o středu M, která převádí bod A v bod C, přejde úsečka AB v úsečku CD a bod S v bod S'. Leží tedy body S, M, S' v právě napsaném pořádku na přímce SS'. Z obou úvah plyne, že body O, S', M, S leží v právě napsaném pořádku na přímce SS'. Stejnolehlost o středu O, která převádí bod A v bod P, převádí úsečku AB v úsečku PQ a střed S úsečky AB ve střed M úsečky PQ. Tím je tvrzení dokázáno.

Sestrojme nyní rovnoběžník $POQO'$; v něm je bod M středem jeho úhlopříčky PQ a tím středem tohoto rovnoběžníka.

Odtud *konstrukce*: Na prodloužení úsečky OM za bod M sestrojme bod O' tak, aby $MO' = MO$. Bodem O' vedeme přímky $p \parallel OC$, $q \parallel OA$; označme P průsečík přímek OA, p a dále označme Q průsečík přímek OC, q. Potom jsou hledané základny AB, CD rovnoběžné s přímkou PQ; tím je konstrukce provedena.

Důkaz správnosti konstrukce i důkaz tvrzení, že úloha má jediné řešení, přenecháváme čtenáři.



Obr. 19.

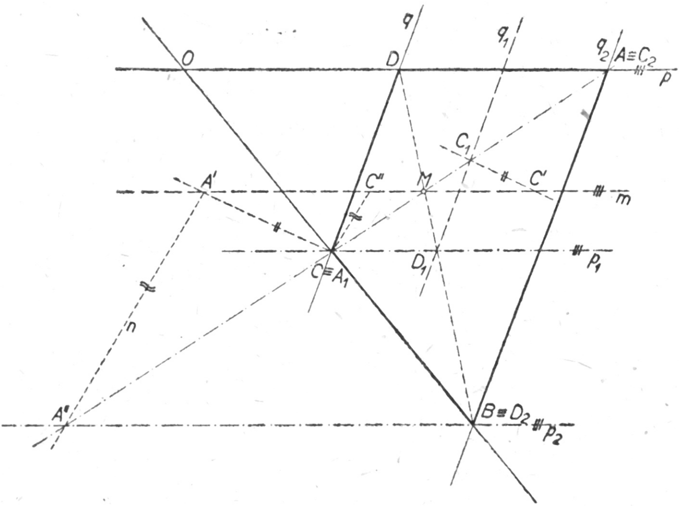
Jiné řešení. *Rozbor* (obr. 20). Označme (M_1) stejnolehlost o středu M, která převádí bod A v bod $C \equiv A_1$; o koeficientu k_1 této stejnolehlosti platí $0 > k_1 > -1$. V dané stejnolehlosti přísluší přímce $q \equiv CD$ přímka $q_1 \equiv C_1D_1$, kde C_1, D_1 jsou pořadě obrazy bodů C, D ve stejnolehlosti (M_1) a platí

$$q_1 \parallel q. \qquad (1)$$

Přímce $p \equiv AD$ přísluší v této stejnolehlosti přímka $p_1 \equiv A_1D_1$, kde $A_1 \equiv C$. Přímku p_1 dovedeme sestrojit podle údajů dané úlohy.

Dále uvažujme stejnolehlost (M_2) o středu M, která převádí bod C_1 v bod $C_2 \equiv A$; její koeficient je kladný. Ta převádí přímku $q_1 \equiv C_1D_1$ v přímku $q_2 \equiv C_2D_2$. Nutně je $q_2 \parallel q_1$ a vzhledem ke vztahu (1) je $q_2 \parallel AB$; avšak přímka $q_2 \parallel AB$ prochází bodem $C_2 \equiv A$ a tudíž je $q_2 \equiv AB$. Obraz D_2 bodu D_1, ležícího na přímce MD, leží proto na přímce MD i na přímce q_2 a proto je $D_2 \equiv B$. Přímka $p_1 \equiv A_1D_1$ přejde v uvažované stejnolehlosti v přímku $p_2 \parallel p_1$ a tedy $p_2 \parallel p$; je tedy bod $D_2 \equiv B$ společným bodem přímky p_2 a polopřímky OC (přímky OD, OC a tím i přímky $p_2 \parallel OD$, OC jsou různoběžné).

Konstrukce. Bodem C veďme přímku $p_1 \parallel OA$. Bod C_1 sestrojíme např. takto: Bodem M veďme přímku $m \parallel p$ a se-



Obr. 20.

strojme na ní body A', C', oddělené bodem M, a to tak, že $MA' = MA$, $MC' = MC$; bodem C' veďme rovnoběžku k přímce $A'C$ a označme C_1 její společný bod s přímkou MC (správnost konstrukce bodu C_1 je zřejmá podle rozboru).

Dále na polopřímce MA' sestrojme úsečku $MC'' = MC_1$; bodem A' veďme přímku $n \parallel CC''$ a označme A'' společný bod přímky n s polopřímkou MC. Bodem A'' [který je obrazem bodu $A_1 \equiv C$ ve stejnolehlosti (M_2)] veďme přímku $p_2 \parallel p$. Pak p_2 je hledaná přímka a její společný bod s polopřímkou OC je hledaný bod $B \equiv D_2$. Další konstrukce je zřejmá.

Důkaz plyne z předchozího a přenecháme jej čtenáři. Rovněž diskusi. Platnost vztahu $CD < AB$ plyne ze stejnolehlosti (M_1).

Podle řešení s. Fr. Koblihy,
11.b tř., jsš, Praha 1, Hellichova ul.

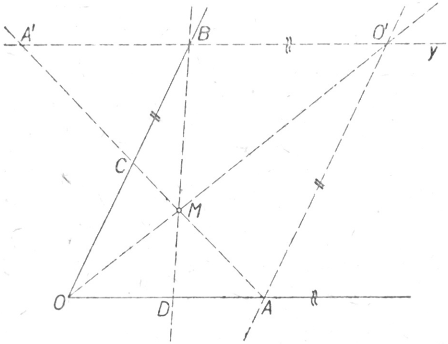
Jiné řešení (viz obr. 21). Danou úlohu můžeme formulovat též takto: Buď dán dutý úhel $\sphericalangle AOC$ a uvnitř úsečky AC bod M, o němž platí $MA > MC$.

Uvnitř úsečky OA určete bod D a na prodloužení úsečky OC za bod C bod B tak, aby bod M padl dovnitř úsečky BD a aby platilo $\dfrac{MD}{MB} = \dfrac{MC}{MA}$ (toto kladné číslo menší než číslo 1 označme k, takže je $\dfrac{1}{k} > 1$).

Rozbor. Předpokládejme, že úloha má řešení. Potom ve stejnolehlosti o středu M a o koeficientu $-\dfrac{1}{k}$ příslušejí bodům D, O pořadě body B, O', přičemž bod M leží uvnitř úsečky OO' a platí $MO' = \dfrac{1}{k} \cdot MO$. Přímce OD neboli přímce OA přísluší přímka $y \parallel OA$, která prochází body O', B. Podle toho provedeme konstrukci.

Konstrukce. Sestrojme obraz O' bodu O ve stejnolehlosti (M) o středu M a koeficientu $-\dfrac{1}{k}$ (viz obrázek 21). Bodem O' veďme přímku $y \parallel OA$ a označme B společný bod přímek y, OC. Konečně sestrojme společný bod D přímek MB, OA. Potom BD je hledaná úsečka a $ABCD$ lichoběžník požadovaný v dané úloze.

Důkaz. Stejnolehlost (M) o středu M a koeficientu $-k$ převádí body $A \neq B$ pořadě v body C, D. O bodu C je to zřejmé. Bod O' přechází v bod O a tedy přímka y v přímku OA a bod B ve společný bod přímek OA, MB, tj. v bod D. Proto je $AB \parallel CD$ a protože stejnolehlost (M) má záporný koeficient, padne bod M dovnitř úseček AC, BD, takže $ABCD$ je lichoběžník.



Obr. 21.

Diskuse. Dokážeme, že právě sestrojený bod B padne na prodloužení úsečky OC za bod C a bod D dovnitř úsečky OA.

Označme A' obraz bodu A ve stejnolehlosti o středu M a koeficientu $-\frac{1}{k}$. Tu podle úvahy provedené v rozboru leží bod A' na přímce y a platí $MA' = \frac{1}{k} \cdot MA > MA > MC$ (podle textu úlohy), tj. $MA' > MC$; proto bod C leží uvnitř úsečky MA' a tedy uvnitř pásu rovnoběžek OA, y a tím uvnitř úsečky OB. Ve stejnolehlosti (M) bodům B, A příslušejí pořadě body C, D, takže přímce AB přísluší přímka CD; protože bod C leží uvnitř úsečky OB, plyne ze vztahu $DC \parallel AB$, že bod D padne dovnitř úsečky OA.

Tím je řešení úlohy provedeno.

Podle řešení s. J. Vokase,
11. tř., jsš, Česká Třebová.

3. Určte všetky čísla x, pre ktoré platí

$$0 \leqq x \leqq 360^\circ \tag{1}$$

a ktoré splňujú vzťah

$$\cos x + |\sin 2x| \geqq 0. \tag{2}$$

Pre ktoré čísla x nastane v tomto vzťahu rovnosť?

Riešenie. Predpokladajme, že číslo x vyhovujúce vzťahu (1) je riešením nerovnosti (2). Potom z (2) vyplýva, že musí platiť postupne

$$\cos x + |2 \sin x \cdot \cos x| \geqq 0, \tag{3}$$

$$\cos x + 2 |\sin x| \cdot |\cos x| \geqq 0.$$

Rozoznávajme prípady:

Prípad [1]. Nech je

$$0 \leqq x \leqq 90^\circ, \tag{4}$$

takže je $\sin x \geqq 0$, $\cos x \geqq 0$ a teda $|\sin x| = \sin x$, $|\cos x| = \cos x$. Z (3) vyplýva

$$\cos x (1 + 2 \sin x) \geqq 0. \tag{4'}$$

Táto nerovnosť je pre každé číslo x uvažovaného intervalu splnená, lebo sa na ľavej strane vyskytujú len nezáporné čísla.

Pretože je $1 + 2 \sin x > 0$, rovnosť v (4′) nastane pre

$$\cos x = 0,$$

t. j. pre $$x = 90°,$$

čo skutočne vyhovuje vzťahu (2).

Obrátene, z nerovnosti (4′) vyplýva postupne vzťah (2) pre čísla x dané vzťahom (4).

Prípad [2]. Nech je

$$90° < x \leqq 180°,$$

takže je

$$|\sin x| = \sin x, \quad |\cos x| = -\cos x > 0. \tag{5''}$$

Z (3) vyplýva

$$\cos x \cdot (1 - 2\sin x) \geqq 0. \tag{5'}$$

Pretože je $\cos x < 0$, musí byť $1 - 2\sin x \leqq 0$, čiže

$$\sin x \geqq \frac{1}{2}$$

a teda

$$90° < x \leqq 150°. \tag{5}$$

Vzťahy (5′), (5″) platia pre všetky čísla x z intervalu (5). Ľahko sa usúdi, že potom pre tieto čísla platí aj (3) a tým aj (2). Pritom rovnosť vo vzťahu (2) nastane práve pre $x = 150°$.

Prípad [3]. Nech je

$$180° < x < 270°,$$

takže je

$$|\sin x| = -\sin x, \quad |\cos x| = -\cos x.$$

Z (3) vyplýva

$$\cos x \cdot (1 + 2\sin x) \geqq 0$$

a pretože je $\cos x < 0$, musí byť $1 + \sin x \leqq 0$, t. j.

$$\sin x \leqq -\frac{1}{2}$$

a teda $$210^\circ \leqq x < 270^\circ.$$

Ľahko usúdime, že tieto čísla splňujú (2) a že pritom rovnosť nastane práve pre $x = 210^\circ$.

Prípad [4]. Nech je

$$270^\circ \leqq x \leqq 360^\circ, \tag{7'}$$

takže je

$$|\sin x| = -\sin x, \quad |\cos x| = \cos x \geqq 0.$$

Z (3) vyplýva

$$\cos x \cdot (1 - 2\sin x) \geqq 0 \tag{7}$$

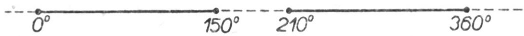
a pretože je $\cos x \geqq 0$ a $\sin x \leqq 0$, je vzťah (7) splnený pre všetky čísla x intervalu (7').

Ľahko usúdime, že vzťah (2) je pre čísla x z intervalu (7') splnený. Pritom rovnosť nastane práve pre $x = 270^\circ$ (keď totiž je $\cos x = 0$).

Záver. Vzťah (2) platí za podmienky (1) pre všetky čísla x, o ktorých platí:

$$\text{buď } 0 \leqq x \leqq 150^\circ, \quad \text{buď } 210^\circ \leqq x \leqq 360^\circ.$$

Výsledok možno znázorniť grafom (obr. 22).



Obr. 22.

Rovnosť vo vzťahu (2) nastáva práve pre tieto čísla x:

$$90^\circ;\ 150^\circ;\ 210^\circ;\ 270^\circ.$$

Tým sme úlohu rozriešili.

4. Buď dán kvádr $ABCDA'B'C'D'$ (kde $ABCD$ je podstava a platí $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) o rozměrech $a = AB$, $b = AD$, $c = AA'$, přičemž a, b, c jsou daná kladná čísla.

Dokažte, že osa (nejkratší příčka) mimoběžek AA', BD' protíná úsečky AA', BD' v jejich vnitřních bodech; označíme-li tyto body pořadě X, Y, vypočtěte velikost úsečky XY (tj. velikost nejkratší příčky) pomocí daných čísel a, b, c.

Řešení (obr. 23). Je známo, že osa dvou mimoběžek stojí kolmo ke každé z obou mimoběžek a dále, že ke každé dvojici mimoběžek existuje jediná jejich osa (nejkratší příčka).

O hledané ose XY mimoběžek AA', BD' tedy platí $XY \perp AA'$, $XY \perp BD'$ a tedy též

$$XY \perp BD'D, \tag{1}$$

neboť je $AA' \parallel DD'$ a tím i $XY \perp DD'$; z tohoto vztahu plyne

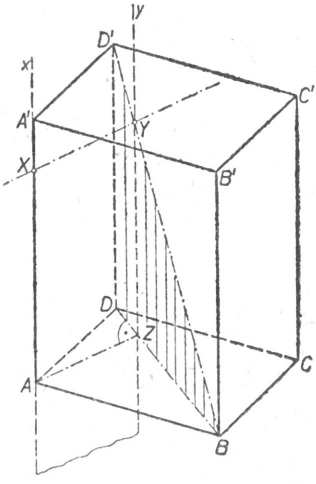
$$XY \parallel ABD. \tag{2}$$

Označme $x \equiv AA'$, y kolmice vedené pořadě body X, Y k rovině ABD a A, $Z \neq Y$ jejich paty; protože je $DD' \perp ABD$, $BDD' \perp ABD$, leží přímka y v rovině BDD' a bod Z leží na přímce BD. Přímky AZ, XY leží v rovině obou přímek $x \parallel y$ a protože platí vztah (2), je nutně

$$AZ \parallel XY \tag{3}$$

a $AZYX$ je obdélník. Ze vztahů (1) a (3) plyne $AZ \perp BD'D$ a tedy zvláště

$$AZ \perp BD.$$



Obr. 23.

Z posledního vztahu plyne, že AZ je výška v pravoúhlém trojúhelníku ABD (o přeponě BD).

Bod Z je tedy patou výšky v pravoúhlém trojúhelníku ABD o přeponě BD; proto tato pata padne dovnitř přepony. Protože je dále $ZY \parallel DD'$, leží celá úsečka ZY v pravoúhlém trojúhelníku BDD' a bod Y padne tedy dovnitř přepony BD' tohoto trojúhelníka. Je tedy $ZY < DD'$ a protože je $ZY = AX$ (vždyť $AZYX$ je obdélník), je též $AX < DD'$; leží tedy bod X uvnitř úsečky AA'.

Protože je $AZYX$ obdélník, je

$$XY = AZ. \tag{4}$$

Velikost úsečky $AZ = p$ vypočteme z pravoúhlého trojúhelníka ABD, v němž je $AB = a$, $AD = b$, $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$. O obsahu P tohoto trojúhelníka platí

$$P = \frac{1}{2} p \sqrt{a^2 + b^2}, \quad P = \frac{1}{2} ab.$$

Porovnáním obou výsledků dostaneme

$$\frac{1}{2} p \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} ab$$

neboli

$$p = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Je tedy

$$XY = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Tím je úloha řešena.

Podle řešení s. Jiřího Turka,
11.c tř., jsš, Praha 8—Libeň,
a dalších řešitelů.

3. Úlohy III. kola kategorie A

1. Určte všetky reálne čísla p tak, aby rovnica

$$\sqrt{x^2 - 5p^2} = px - 1 \tag{1}$$

mala koreň $x = 3$. Potom pre tieto čísla p danú rovnicu riešte.

Riešenie. Ak má rovnica (1) koreň $x = 3$, platí

$$\sqrt{9 - 5p^2} = 3p - 1.$$

Stade postupne dostaneme

$$\begin{aligned} 9 - 5p^2 &= 9p^2 - 6p + 1, \\ 14p^2 - 6p - 8 &= 0, \\ 7p^2 - 3p - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Diskriminant tejto rovnice je

$$D = 9 + 4 \cdot 4 \cdot 7 = 9 + 112 = 121 = 11^2.$$

Korene rovnice sú

$$p = \frac{3 \pm 11}{14} = \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{8}{14} = -\dfrac{4}{7}. \end{cases}$$

Skúška. [1]. Pre $p = 1$ má (1) tvar

$$\sqrt{x^2 - 5} = x - 1. \tag{2}$$

Rozriešme ju. Platí postupne

$$\begin{aligned} &x^2 - 5 = x^2 - 2x + 1, \\ &2x = 6, \\ &x = 3 \text{ (jediný koreň).} \end{aligned}$$

Označme L, P ľavú a pravú stranu rovnice (2) po dosadení čísla $x = 3$. Dostaneme

$$L = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2, \quad P = 3 - 1 = 2.$$

Číslo $p = 1$ vyhovuje teda požiadavkám úlohy.

[2]. Pre $p = -\frac{4}{7}$ má rovnica (1) pravú stranu tvaru $-\frac{4}{7}x - 1$, čo je pre $x = 3$ záporné číslo, pri čom ľavá strana je číslo nezáporné. Teda číslo $p = -\frac{4}{7}$ nevyhovuje úlohe.

Podľa riešenia s. Václava Panušku, 11.b. tr., jsš, České Budějovice, Nová ul.

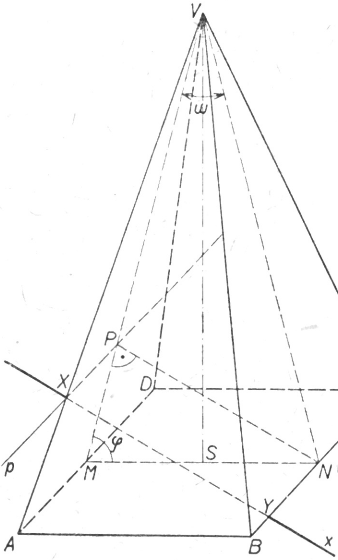
2. Je dán pravidelný čtyřboký jehlan o hlavním vrcholu V a o podstavě $ABCD$; označme $d = \frac{1}{2}AB$. Označme dále φ odchylku rovin VAD, ABC, takže je $0 < \varphi < 90°$.

a) Načrtněte konstrukci nejkratší příčky XY mimoběžek VA, BC, přičemž X je bodem přímky VA a Y bodem přímky BC. Vypočtěte velikost příčky XY pomocí daných čísel d, φ.

b) Vypočtěte vzdálenost v bodů V, X pomocí čísel d, φ (všimněte si, pro která φ padne bod X dovnitř úsečky VA a pro která φ padne na její prodloužení za bod V).

Řešení. Nejprve uveďme tuto pomocnou větu **P**: Buď dán úhel $\sphericalangle MVN = \omega$. Označme P patu kolmice vedené bodem N k přímce MV. Jestliže je $\omega < 90°$, padne bod P dovnitř polopřímky VM; jestliže je $\omega > 90°$, padne bod P dovnitř polopřímky opačné k polopřímce VM. Pro $\omega = 90°$ je $P \equiv V$. (Viz učebnici Geometrie pro 7. tř. středních škol, str. 112, příklad 17.)

Řešení úlohy (obr. 24). Je známo, že dvě mimoběžky mají jedinou nejkratší příčku, která stojí kolmo k oběma daným mimoběžkám. Protože je $AD \parallel BC$, je $XY \perp AD$; vedle toho je $XY \perp VA$. Je tedy $XY \perp VAD$. Proto příčka XY leží v rovině $\varrho \perp VAD$, kde rovina ϱ obsahuje přímku BC.



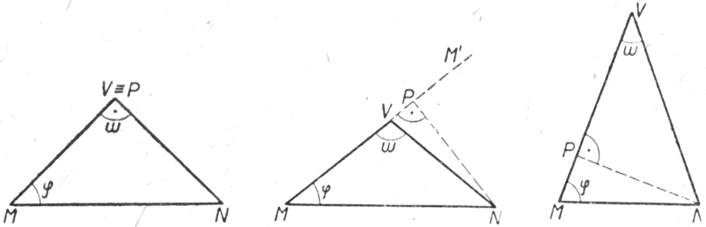
Obr. 24.

Odtud *konstrukce*: Středem N hrany BC sestrojme kolmici NP k rovině VAD, kde P je pata této kolmice. Avšak rovina VMN (kde M je střed úsečky AD), jak známo, stojí kolmo k rovině VAD; proto rovina VMN obsahuje přímku NP. Je tedy $NP \perp AD$; podle konstrukce bodu P je $NP \perp VM$. Proto je $NP \perp VAD$, takže XY je nutně rovnoběžka k přímce NP. Přímka XY leží proto v rovině BNP, která protíná rovinu

VAD v přímce p, která nutně prochází bodem P; protože je $BN \parallel AD$, je průsečnice p rovin BNP, ADV rovnoběžná s přímkou AD. Průsečík přímek p, VA je hledaný bod X; bod Y je průsečíkem přímek $x \parallel NP$, BN. Tím je konstrukce provedena.

Jestliže je $X \equiv P$, pak je nutně $Y \equiv N$. Jestliže je $X \not\equiv P$, je $XYNP$ rovnoběžník. V obou případech je tedy $XY = NP$. Stačí tedy vypočítat velikost úsečky NP, a to z trojúhelníka MNP, kde $\sphericalangle P = 90°$ a $\sphericalangle NMP = \varphi$. Pak je

$$NP = MN \cdot \sin \sphericalangle VMN$$



Obr. 25 a, b, c.

neboli

$$PN = 2d \cdot \sin\varphi = XY.$$

Pro výpočet vzdálenosti v bodů V, X bude účelné určit velikost ω úhlu $\sphericalangle MVN$ v rovnoramenném trojúhelníku VMN o hlavním vrcholu V. Platí

$$\omega = 2\,(\mathrm{R} - \varphi).$$

Případ [1]. Pro $\varphi = 45°$ je $\omega = 90°$ a pak je $P \equiv V$, takže $v = 0$ (obr. 25a).

Případ [2]. Pro $\varphi < 45°$ je $\omega > 2 \cdot 45°$, tj. $\omega > 90°$ (viz obr. 25b). V trojúhelníku VMN je úhel $\sphericalangle M = \varphi$ ostrý, proto podle věty **P** padne bod P dovnitř polopřímky MV; úhel $\sphericalangle V = \omega$ je tupý, proto bod P padne dovnitř polopřímky

VM' opačné k polopřímce VM. Padne tedy bod P na prodloužení úsečky MV za bod V. Platí

$$VP = MP - VM. \tag{1}$$

Potom (obr. 24)

$$VM = \frac{d}{\cos\varphi} \tag{2}$$

(z trojúhelníka VMS, kde S je středem čtverce $ABCD$ a úhel $\sphericalangle\, MSV = 90°$); dále je $MP = MN \cdot \cos\varphi$ neboli

$$MP = 2d\cos\varphi. \tag{3}$$

Po dosazení ze (2), (3) do (1) dostaneme

$$VP = \frac{d}{\cos\varphi} \cdot (2\cos^2\varphi - 1)$$

neboli

$$VP = \frac{d\cos 2\varphi}{\cos\varphi}. \tag{4}$$

Ze stejnolehlých trojúhelníků VXP, VAM plyne (viz obr. 26a)

$$\frac{VX}{VA} = \frac{VP}{VM} \tag{5}$$

neboli

$$VX = VP \cdot \frac{VA}{VM}, \tag{6}$$

kde

$$VA = \sqrt{AM^2 + VM^2} = \sqrt{d^2 + \frac{d^2}{\cos^2\varphi}}$$

neboli

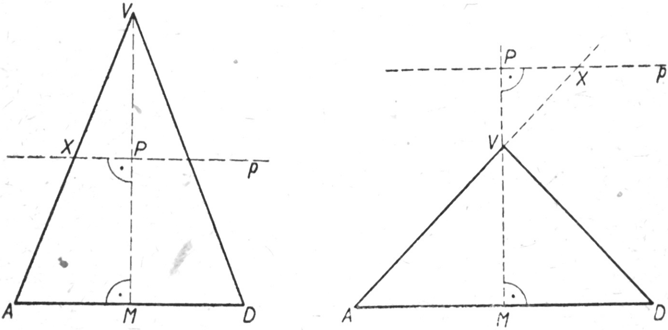
$$VA = \frac{d}{\cos\varphi}\sqrt{1 + \cos^2\varphi}. \tag{7}$$

Dosaďme do (6) ze (4), (7), (2); obdržíme

$$VX = \frac{d \cos 2\varphi}{\cos\varphi} \sqrt{1 + \cos^2\varphi}. \tag{8}$$

Případ [3]. Pro $90^\circ > \varphi > 45^\circ$ je $\omega < 90^\circ$; bod P podle věty **P** padne zřejmě dovnitř úsečky VP. Tu platí (obr. 25c)

$$VP = VM - MP.$$



Obr. 26 a, b.

Platí zřejmě i zde vztahy (2), (3), takže

$$VP = \frac{d}{\cos\varphi} (1 - 2 \cos^2\varphi) \tag{4'}$$

neboli

$$VP = \frac{d \mid \cos 2\varphi \mid}{\cos\varphi}$$

[pro uvažované φ je totiž

$$-(2 \cos^2\varphi - 1) = - \cos 2\varphi = \mid \cos 2\varphi \mid > 0].$$

Protože platí též (6), dostaneme (viz obr. 26b) po dosazení do (6) ze (4′), (7) a (2)

$$VX = \frac{d\,|\cos 2\varphi\,|}{\cos\varphi} \sqrt{1 + \cos^2\varphi}\,. \tag{8'}$$

Dosadíme-li $\varphi = 45°$ do pravé strany (8), (8′), dostaneme nulu, což se shoduje s výsledkem případu [1].

Závěr. Je tedy

$$v = \frac{d\,|\cos 2\varphi\,|}{\cos\varphi} \sqrt{1 + \cos^2\varphi}$$

pro všechna φ, pro něž je

$$0 < \varphi < 90°.$$

Tím je úloha řešena.

Podle řešení s. Karla Najzara,
11.b tř., jsš, Ostrava-Vítkovice.

3. Určete všechny úhly α, pro něž jak $\operatorname{cotg}\alpha$, tak $\operatorname{cotg} 2\alpha$ jsou čísla celá.

Řešení. Při řešení užijeme této věty: Jsou-li celá čísla a, $a + b$ dělitelná prvočíslem p, je i číslo b dělitelné prvočíslem p.

Vyjdeme ze vzorce

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha}, \tag{1}$$

který platí pro $\alpha \neq m \cdot R$, kde m je celé číslo.

Položme $\operatorname{cotg}\alpha = q$; po dosazení do pravé strany (1) obdržíme

$$\frac{q^2 - 1}{2q}. \tag{2}$$

Ptáme se tedy, pro která celá čísla q je zlomek (2) rovněž celé číslo.

Zřejmě pro $|q| = 1$ je $\frac{q^2 - 1}{2q} = 0$.

Pro $|q| > 1$ je zlomek (2) různý od nuly. Nechť p je prvočíslo, které dělí číslo q; potom musí být i $q^2 - 1$ dělitelné číslem p. Musí tedy p dělit alespoň jedno z čísel $q - 1$, $q + 1$.

Jestliže p je dělitelem čísla $q - 1$, pak p musí dělit číslo -1 (číslo q totiž je číslem p dělitelné); to však je spor, neboť prvočíslo p číslo -1 nedělí.

Stejně se dokáže, že není možné, aby p bylo dělitelem čísla $q + 1$.

Proto předpoklad $|q| > 1$ není možný, takže zbývá jedině možnost $|q| = 1$, tj.

$$\text{buď } q = 1 \text{ nebo } q = -1.$$

Číslo α musí tedy být buď

$$\alpha = 45° + k \cdot 2\,\mathrm{R} \tag{3}$$

nebo

$$\alpha = 135° + k \cdot 2\,\mathrm{R}, \tag{4}$$

kde k je celé číslo.

Dosazením do (1) se snadno přesvědčíme, že oba úhly (3), (4) vyhovují vztahu (1). Tím jsou určeny všechny úhly α, které splňují požadavky úlohy.

Výsledky (3) a (4) lze shrnout do jediného zápisu

$$\alpha = 45° + n \cdot \mathrm{R},$$

kde n je celé číslo.

Jiné řešení. Pro $|q| > 1$, kde q je celé číslo, není zlomek (2) číslo celé; to dokážeme takto: Dělme čitatele i jmenovatele zlomku (2) číslem q (které je nutně různé od nuly); dostaneme

$$\frac{1}{2}\left(q - \frac{1}{q}\right).$$

Avšak číslo $q - \dfrac{1}{q}$ není celé pro žádné celé q, o němž platí $|q| > 1$. Proto není (2) pro $|q| > 1$ celé číslo atd.

Podle řešení s. Bohdana Zelinky,
11.b. tř., 1. jsš, Liberec.

Jiné řešení. Nechť

$$\operatorname{cotg} \alpha = m, \quad \operatorname{cotg} 2\alpha = n \tag{3'}$$

jsou obě celá čísla. Potom místo (1) lze psát

$$\frac{m^2 - 1}{2m} = n$$

a tedy

$$m^2 - 1 = 2mn$$

neboli

$$m\,(m - 2n) = 1,$$

kde m, $m - 2\,n$ jsou celá čísla; zřejmě musí platit
buď

$$\begin{aligned} m &= 1, \\ m - 2n &= 1 \end{aligned} \qquad \text{anebo} \qquad \begin{aligned} m &= -1, \\ m - 2n &= -1. \end{aligned}$$

Musí tedy platit
buď

$$m = 1,\ n = 0 \quad \text{anebo} \quad m = -1,\ n = 0.$$

Ze vztahů (3') dostáváme $\operatorname{cotg} \alpha = \pm 1$, $\operatorname{cotg} 2\alpha = 0$; musí tedy být $\alpha = 45° + k\mathrm{R}$, kde k je celé číslo. Toto číslo skutečně vztahu (1) vyhovuje.

Podle řešení s. Jindřicha Bůchy,
11.tř., 21.jsš, Praha XVI,
U Santošky 1.

4. Je daný dutý uhol $\sphericalangle POQ$ a vnútri tohto uhla bod M; ďalej nech je dané kladné číslo m. Zostrojte lichobežník $ABCD$, ktorý má tieto tri vlastnosti:

1. Vrcholy A, D ležia na polpriamke OP a vrcholy B, C ležia na polpriamke OQ.
2. Bod M je priesečníkom uhlopriečok AB, BD.
3. Platí $AB = m$.

Dokážte správnosť urobenej konštrukcie a urobte diskusiu riešiteľnosti úlohy.

Riešenie. Najprv dokážeme pomocnú vetu **P** (pozri obr. 27): Označme M spoločný bod uhlopriečok AC, BD v lichobežníku $ABCD$, v ktorom je $AB \parallel CD$. Ďalej označme O spoločný bod priamok AD, BC a S, S' po rade stredy základní AB, CD lichobežníka.

Potom body M, O, S, S' ležia v tejže priamke.

Dôkaz. Rovnoľahlosť (O) o strede O, ktorá prevádza úsečku AB v $DC \parallel AB$, prevádza body A, B v body D, C (v tomto poradí). Pretože v rovnoľahlosti sa zachováva deliaci pomer, prislúcha v rovnoľahlosti (O) stredu S úsečky AB stred S' úsečky CD. Teda bod O leží na priamke SS'.

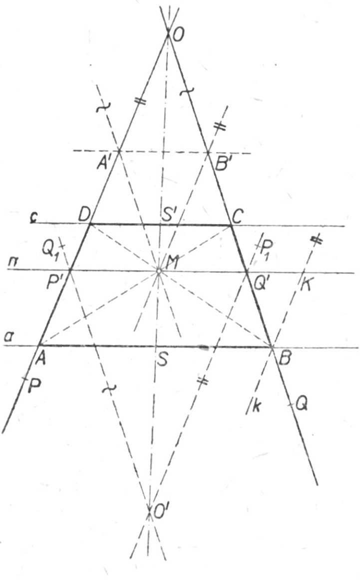
Rovnoľahlosť (M) o strede M, ktorá prevádza úsečku AB v úsečku $CD \parallel AB$, prevádza body A, B v body C, D (v tomto poradí). Z toho istého dôvodu, ako v predošlom prípade, prislúcha v rovnoľahlosti (M) stredu S úsečky AB stred S' úsečky CD. Leží teda bod M na priamke SS'.

Z oboch výsledkov vyplýva, že body O, M ležia na priamke SS', takže všetky štyri body M, O, S, S' ležia v tej istej priamke. Tým sme vetu **P** dokázali.

Dodatok k vete **P**. Označme $n \parallel AB$ priamku vedenú bodom M; ďalej označme P', Q' (v tomto poradí) spoločné body priamky n s polpriamkami OP, OQ (zrejme je $P' \neq O$, $Q' \neq O$). Potom je bod M stredom úsečky $P'Q'$. To vyplýva z rovnoľahlosti úsečiek AB, $P'Q'$ a ich stredov S, M vzhľadom na bod O ako stred rovnoľahlosti.

Riešenie danej úlohy (pozri obr. 27). *Rozbor.* Ak budeme vedieť zostrojiť práve popísanú úsečku $P'Q'$ v hľadanom lichobežníku, potom v rovnobežníku $P'ABK$ je $BK \parallel AP'$ (alebo $BK \parallel OP$) a ďalej $P'K = AB$ alebo $P'K = m$. Avšak úsečku $P'Q'$, ktorá má bod M za stred (pozri obr. 27), vieme podľa známej konštrukcie zostrojiť. Stačí uvažovať o stredovej súmernosti so stredom M; tá prevádza priamky OP, OQ v priamky $O'P_1 \parallel OP$, $O'Q_1 \parallel OQ$, kde O' je obraz bodu O v uvažovanej súmernosti. Práve zmienené priamky obmedzujú rovnobežník, v ktorom je OO' jednou uhlopriečkou a hľadaná úsečka $P'Q'$ druhou uhlopriečkou, ktorá je bodom M pólená. Z konštrukcie vidieť, že polpriamky OP, OQ vytínajú na priamkach smeru $P'Q'$ (s výnimkou tej, ktorá prechádza bodom O) úsečky, ktorých stredy ležia na priamke OM; okrem priamok smeru $P'Q'$ žiadna iná priamka nemá túto vlastnosť.

Podľa toho urobíme konštrukciu hľadaného lichobežníka.



Obr. 27.

Konštrukcia (obr. 27). Zostrojme obraz O' bodu O v súmernosti so stredom M. Ďalej zostrojme priamky $O'Q_1 \parallel OQ$, $O'P_1 \parallel OP$ a označme P', Q' (v tomto poradí) priesečníky dvojíc priamok OP, $O'Q_1$ a OQ, $O'P_1$.

Potom je $P'Q'$ hľadaná pomocná priečka.

Na polpriamke $P'Q'$ zostrojme úsečku $P'K = m$ a bodom K veďme priamku $k \parallel OP$. Priesečník priamok OQ, k označme B a veďme ním priamku $a \parallel P'Q'$; ďalej označme A spoločný bod priamok a, OP. Konečne označme C spoločný bod polpriamky OQ a priamky MA a D spoločný bod priamok MB, $c \parallel AB$, kde c prechádza bodom C. Potom je $ABCD$ hľadaný lichobežník.

Dôkaz. Podľa konštrukcie úsečky AB je $AB = m$, pričom spoločný bod S priamok $a \equiv AB$, OM je stredom úsečky AB, ako vyplýva z rovnoľahlosti so stredom O, v ktorej bodom P', Q' (v tomto poradí) prislúchajú body A, B.

V rovnoľahlosti (M) so stredom M, v ktorej bodu A prislúcha bod C, prislúcha stredu S úsečky AB stred S' úsečky CD, kde D je obraz bodu B v tejto rovnoľahlosti; pritom bod S' leží na priamke CD. Je teda $S'C = S'D$; v tej istej rovnoľahlosti (M) je $CD \parallel AB$. Avšak v rovnoľahlosti (O) so stredom O, v ktorej bodu B prislúcha bod C, je obrazom bodu S tiež bod S'. Obrazom bodu A je taký bod D_0 priamky $S'C$, že bod S' je stredom úsečky CD_0. Takým bodom je však aj bod D a preto je nevyhnutne $D_0 \equiv D$, t. j. bod D predtým zostrojený je spoločným bodom priamok MB, $S'C$, OA.

Tým sme dokázali, že zostrojený štvoruholník $ABCD$ je lichobežník so základňami AB, CD, pričom body A, D ležia na polpriamke OP a body B, C na polpriamke OQ.

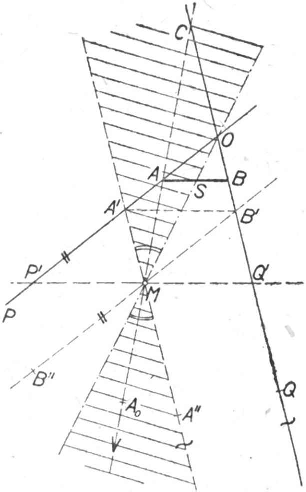
Diskusia (obr. 28). Z konštrukcie a predošlých úvah vyplýva, že v uhle $\sphericalangle POQ$ možno zostrojiť práve jednu úsečku $AB = m$ takú, že jej stred S leží vnútri polpriamky OM a body A, B (rôzne od bodu O) padnú po rade dovnútra polpriamok OP, OQ. Ak je $P'Q' = m$, nemá úloha zrejme riešenie. Ak je $P'Q' \neq m$, je $B \not\equiv Q'$ a rovnobežné úsečky AB, $P'Q'$ neležia v tejže priamke. Riešiteľnosť úlohy závisí od toho, či polpriamky AM, OQ majú spoločný bod C, ktorý je potom iste rôzny od bodu Q'. Aby sme túto otázku rozhodli, veďme priamky

$MA' \parallel OQ$, $MB' \parallel OP$, kde A', B' ležia po rade vnútri polpriamok OP, OQ, pričom je $A'B' \parallel P'Q'$, $A'B' = \frac{1}{2}P'Q'$. Pokiaľ úsečka AB náleží trojuholníku $OA'B'$ (včítane jeho strany $A'B'$), leží polpriamka MA v uhle OMA' a polpriamka MA_0, opačná k nej, leží v uhle $\sphericalangle A''MB''$, vrcholovom k uhlu $\sphericalangle A'MB'$; taká priamka MA nemá zrejme s polpriamkou OQ spoločný bod a úloha nemá riešenie. Pretože je $A'B' = \frac{1}{2}P'Q'$, nemá úloha riešenie v prípade, keď je $P'Q' \geqq 2 \cdot AB$, t. j.

$$P'Q' \geqq 2m.$$

Ak je však $P'Q' < 2m$ (pričom je $P'Q' \neq m$), má úloha jediné riešenie.

Záver. Úloha má jediné riešenie, ak súčasne platí $P'Q' < 2m$, $P'Q' \neq m$. Inak nemá riešenie.



Obr. 28.

4. Úlohy I. kola kategorie B

1. Stanovte počet všetkých trojíc (a, b, c) celých navzájom rôznych čísel a, b, c, z ktorých každé je v absolútnej hodnote menšie než číslo 10, ak o týchto číslach platí vzťah

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3. \tag{1}$$

Dve trojice rovnakých čísel s rôznym usporiadaním považujeme za rôzne; napr. trojice (7, 3, —3), (7, —3, 3) sú rôzne.

Pokyn. Daný vzťah najprv vhodne upravte.

Riešenie. Nech čísla a, b, c tvoria hľadanú trojicu (a, b, c), takže platí vzťah (1) alebo

$$(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 0. \tag{2}$$

Ľavú stranu L vzťahu (2) upravíme; platí

$$\begin{aligned}
L &= (a + b)^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b) c^2 + c^3 - \\
&\quad - (a^3 + b^3 + c^3) = \\
&= (a + b)^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b) c^2 - (a^3 + b^3) = \\
&= (a + b)^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b) c^2 - \\
&\quad - (a + b)(a^2 - ab + b^2) = \\
&= (a + b)[(a + b)^2 + 3(a + b) c + 3c^2 - \\
&\quad - (a^2 - ab + b^2)] = \\
&= (a + b)[a^2 + 2ab + b^2 + 3ac + 3bc + 3c^2 - \\
&\quad - a^2 + ab - b^2] = \\
&= 3(a + b)[bc + c^2 + ab + ac] = \\
&= 3(a + b)[c(b + c) + a(b + c)] = \\
&= 3(a + b)(b + c)(c + a).
\end{aligned}$$

Ak teda platí (1), potom nevyhnutne platí aj

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 0. \tag{3}$$

Vzťah (3) možno splniť jedným z týchto spôsobov:

$$a + b = 0, \; b + c = 0, \; c + a = 0,$$

t. j. jedným zo vzťahov

$$b = -a, \tag{4}$$

$$c = -b, \tag{5}$$

$$c = -a. \tag{6}$$

Dostaneme tak trojice, ktoré majú tvary:

$$(a, -a, c), \tag{7}$$

kde $a \neq 0$, $-a \neq c \neq a$ sú ľubovoľne volené čísla;

$$(a', b', -b'), \tag{8}$$

kde $b' \neq 0$, $-b' \neq a' \neq b'$ sú ľubovoľne volené čísla;

$$(-c'', b'', c''), \tag{9}$$

kde $c'' \neq 0$, $-c'' \neq b'' \neq c''$ sú ľubovoľne volené čísla.

Trojica (7) splňuje vzťah (1), lebo platí

$$(a + b + c)^3 = (a - a + c)^3 = c^3,$$
$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + (-a)^3 + c^3 = c^3.$$

Požiadavku $a \neq 0$ vo vzťahu (7) sme urobili preto, aby platilo $a \neq -a$; požiadavky $-a \neq c \neq a$ preto, aby trojica $(a, -a, c)$ sa skladala z troch rôznych čísel.

Každé z čísel hľadanej trojice (a, b, c) má mať absolutnú hodnotu menšiu než 10; sú to teda čísla vybrané z celých čísel

$$-9, -8, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 8, 9, \tag{10}$$

čo je 19 možností.

Trojicu (7) dostaneme takto: Z množiny čísel (10) vyberieme za a ľubovoľné číslo s výnimkou čísla 0 (lebo inak by bolo $a = -a$); to je 18 možností. Tým je určené aj číslo $-a$, takže z čísel (10) zostáva práve 17 čísel, z ktorých zvolíme číslo c. Vznikne tak $18 \cdot 17$ rôznych trojíc čísel, vyhovujúcich požiadavkám úlohy.

Rovnaký počet trojíc dostaneme pre typ (8) a ten istý počet pre typ (9).

Ak dokážeme ešte, že každá trojica typu (7) je rôzna od ktorejkoľvek trojice typu (8) alebo (9), bude dokázané, že hľadaných trojíc je $3 \cdot 18 \cdot 17$.

Dokážeme, že ľubovoľná trojica (7) je rôzna od ľubovoľnej trojice (8). Nech to neplatí. Potom platí

$$a = a', \quad -a = b', \quad c = -b'.$$

Avšak z posledných dvoch vzťahov dostaneme $a = c$, čo je spor s tým, že čísla a, c v trojici $(a, -a, c)$ sú rôzne. Rovnako sa dokáže, že ľubovoľná trojica (9) je rôzna od každej z trojíc (7) alebo (8). Tým je dôkaz ukončený a celkový počet požiadovaných trojíc je $3 \cdot 18 \cdot 17 = 918$.

Tým sme úlohu rozriešili.

2. V rovině buď dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a dále bod O, který leží vně této kružnice. Bodem O sestrojte sečnu OXX' kružnice k (přičemž X, X' jsou společné body sečny a kružnice k), a to tak, aby platilo

$$OX' = \lambda \cdot OX,$$

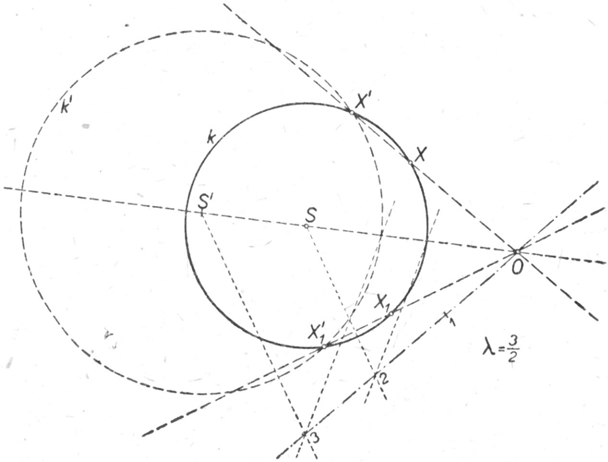
kde $\lambda > 1$ je dané reálné číslo.

Proveďte diskusi řešitelnosti úlohy vzhledem k daným číslům r, λ, $v = OS$. Potom v rovině kružnice k při daných číslech r, λ vyšetřte množinu všech bodů O, pro něž úloha: a) má jediné řešení, b) má dvě různá řešení, c) nemá žádné řešení.

Řešení. I. *Rozbor.* Předpokládejme, že jsme sestrojili přímku OXX' požadovaných vlastností. Potom stejnolehlost $[O, \lambda]$ o středu O s koeficientem λ stejnolehlosti převádí bod X v bod X'; přitom kružnice k přechází v kružnici k' a bod X kružnice k v bod X' kružnice k'. Ale bod X' leží podle požadavku úlohy na kružnici k; je tedy X' společným bodem kružnic k, k'. Odtud *konstrukce* (obr. 29):

Ve stejnolehlosti $[O; \lambda]$ sestrojíme obraz $k' \equiv (S', r')$ kružnice k. Označme X' jeden ze společných bodů kružnic k, k'. Dále sestrojme obraz X bodu X' v obrácené stejnolehlosti $[O, \frac{1}{\lambda}]$; potom je OX hledaná přímka, přičemž pořádek bodů na této přímce je O, X, X'.

Důkaz. Pořádek bodů na přímce OX je skutečně O, X, X'. Platí totiž: Bod O leží podle textu úlohy vně kružnice k a tedy též vně kružnice k'; proto je $X' \neq O$. Dále podle konstrukce bodu X platí $OX = \frac{1}{\lambda} \cdot OX'$, kde $0 < \frac{1}{\lambda} < 1$, takže skutečně



Obr. 29.

bod X leží uvnitř úsečky OX'. Je tedy $OX' = \lambda \cdot OX$, jak požaduje text dané úlohy. Tím je důkaz proveden.

Diskuse. Řešitelnost úlohy závisí na tom, zda kružnice k, k' mají společný bod X'. Označme $OS = v > r$ (což platí podle textu úlohy), dále $OS' = v'$; podle konstrukce kružnice k' platí $v' = \lambda v$, $r' = \lambda r$ a je tedy $v' > r'$, tj. bod O leží vně kružnice k'. Kružnice k, k' jsou zřejmě nesoustředné a podle známé věty z planimetrie mají společný bod právě tehdy, jestliže platí vztahy

$$r' - r \leqq SS' \leqq r' + r, \text{ kde je } SS' = v' - v. \qquad (1)$$

Po dosazení $r' = \lambda r$, $v' = \lambda v$ dostaneme

$$r(\lambda - 1) \leqq v(\lambda - 1) \leqq r(\lambda + 1);$$

protože je $\lambda - 1 > 0$, plyne odtud

$$1 \leqq \frac{v}{r} \leqq \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}. \tag{1'}$$

Protože je $v > r$, nenastane případ $\frac{v}{r} = 1$ a levá strana vztahů (1′) podle textu úlohy je splněna. Platí-li tedy vztah

$$\frac{v}{r} \leqq \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}, \tag{2}$$

potom mají kružnice k, k':

a) společné dva různé body $X' \mathrel{\not\equiv} X'_1$ tehdy, je-li

$$\frac{v}{r} < \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}, \tag{3}$$

b) společný jediný bod X', je-li

$$\frac{v}{r} = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}. \tag{4}$$

Závěr. Protože z předpokladu úlohy a z platnosti jednoho ze vztahů (3), (4) plyne platnost vztahů (1), následuje:

[1] Jestliže platí (3), má úloha dvě různá řešení.
[2] Jestliže platí (4), má úloha jediné řešení.
[3] Neplatí-li (2), nemá úloha řešení.

II. Buďte r, λ daná čísla a dále nechť je $v > r$ (jako v textu úlohy).

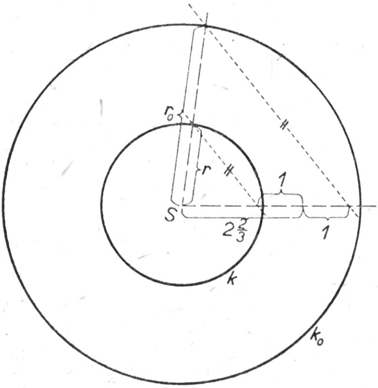
Každý bod O, jehož vzdálenost v od bodu S splňuje (viz obr. 30 pro $\lambda = \frac{8}{3}$):

a) vztah (3), vede ke dvěma řešením. Ze vztahu (3) plyne

$$v < r \cdot \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1},$$

neboli platí

$$r < v < \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \cdot r.$$



Obr. 30.

Tyto body O zřejmě vyplní vnitřek mezikruží omezeného kružnicemi

$$k \equiv (S, r),$$

$$k_0 \equiv \left(S, \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \cdot r\right).$$

b) vztah (4) vede k jedinému řešení. O čísle v platí

$$r < v = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \cdot r.$$

Tyto body O vyplní kružnici k_0.

c) vztah

$$\frac{v}{r} > \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1},$$

neboli

$$v > \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \cdot r$$

neposkytuje žádné řešení. Tyto body leží vně kružnice k_0.

3. Řešte nerovnost

$$(x + a)(x + b) \leqq (x + c)(x + d) \tag{1}$$

pro číslo x, přičemž a, b, c, d jsou daná kladná čísla. Stanovte též všechna x, pro něž nastává rovnost.

Řešení. Proveďme naznačené výkony na obou stranách nerovnosti (1) a převeďme neznámou x na levou stranu; dostaneme postupně

$$x(a + b) + ab \leqq x(c + d) + cd,$$
$$x[(a + b) - (c + d)] \leqq cd - ab. \tag{2}$$

Provedené úpravy jsou ekvivalentní a každé řešení nerovnosti (1) je nejen řešením nerovnosti (2), ale i obráceně.

Rozeznávejme případy:

Případ [1]. Nechť je

$$a + b - (c + d) = 0.$$

α) Nechť je $cd - ab \geqq 0$. Potom každé číslo x je řešením nerovnosti (2), neboť levá strana ve vztahu (2) je rovna nule a pravá je číslo nezáporné.

Rovnost zřejmě nastane pro každé x, jestliže je $cd - ab = 0$.

β) Nechť je $cd - ab < 0$. Potom neplatí

$$0 < cd - ab$$

a vztah (2) nemá řešení.

Případ [2]. Nechť je

$$a + b - (c + d) > 0.$$

Znásobme obě strany nerovnosti (2) číslem $\dfrac{1}{a + b - (c + d)} > 0$; dostaneme

$$x \leqq \frac{cd - ab}{a + b - (c + d)}. \tag{3}$$

Každé číslo x, o němž platí (3), je zřejmě řešením (2) a tím i (1).

Případ [3]. Nechť je

$$a + b - (c + d) < 0.$$

Znásobme obě strany nerovnosti (2) číslem

$$\frac{1}{a + b - (c + d)} < 0,$$

dostaneme

$$x \geqq \frac{cd - ab}{a + b - (c + d)}. \tag{4}$$

Každé číslo x, o němž platí (4), je zřejmě řešením vztahu (1).

V případech [2], [3] nastane zřejmě rovnost, jestliže x je rovno zlomku na pravé straně vztahu (3).

Závěr. Daná nerovnost (1) v případě, že:

a) je $a + b - (c + d) = 0$, má za řešení libovolné číslo x, jestliže je zároveň $cd - ab \geqq 0$; neplatí-li poslední vztah, nemá řešení.

b) je $a + b - (c + d) \neq 0$, pak řešení je dáno pořadě vztahy (3), (4) podle toho, je-li výraz $a + b - (c + d)$ kladný nebo záporný.

Přehledně nás o těchto výsledcích informuje tabulka na str. 103.

4. Řešte rovnici

$$\sqrt{\frac{a - 2x}{2 - 2x}} = \frac{2 - x}{1 - x} \tag{1}$$

Tabulka k úloze č. 3

Parametry	Řešení
$a + b - (c + d) > 0,$	$x \leqq \dfrac{cd - ab}{a + b - (c + d)}$
$a + b - (c + d) = 0,$ $ab \leqq cd$	každé reálné číslo x
$a + b - (c + d) = 0$ $ab > cd$	žádné
$a + b - (c + d) < 0$	$x \geqq \dfrac{cd - ab}{a + b - (c + d)}$

o neznámé x a proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k danému reálnému číslu a.

Řešení. Předpokládejme, že rovnice (1) má nějaké řešení; pak pro toto řešení musí platit také

$$\frac{a - 2x}{2(1 - x)} = \frac{(2 - x)^2}{(1 - x)^2}.$$

Obě strany této rovnice znásobme číslem $2(1 - x)^2$. Dostáváme (postupujeme jen jedním směrem — nevyšetřujeme ekvivalenci)

$$(a - 2x)(1 - x) = 2(2 - x)^2.$$

Upravujeme dále; postupně dostaneme

$$a - ax - 2x + 2x^2 = 8 - 8x + 2x^2,$$
$$6x - ax = 8 - a,$$
$$x(6 - a) = 8 - a. \qquad (2)$$

Nyní budeme rozlišovat dva případy: α) $a = 6$, β) $a \neq 6$.

α) Je-li $a = 6$, pak rovnice (2) zní $0 \cdot x = 2$ a nemá proto žádné řešení. Tedy ani výchozí rovnice (1) nemá žádné řešení.

β) Je-li $a \neq 6$, má rovnice (2) jediný kořen

$$x = \frac{a-8}{a-6}.$$

Toto číslo tedy může být řešením rovnice (1). Abychom zjistili, zda skutečně tímto řešením je, vykonáme zkoušku.

Dosazujeme tedy do rovnice (1) zlomek $\dfrac{a-8}{a-6}$ za neznámou x. Napíšeme-li uvedený zlomek ve tvaru $\dfrac{a-6}{a-6} + \dfrac{2}{a-6}$, vidíme, že platí $\dfrac{a-8}{a-6} \neq 1$ pro každé $a \neq 6$. Jmenovatelé zlomků, které se vyskytují v rovnici (1), jsou tedy čísla různá od nuly (zlomky mají smysl). Protože v rovnici (1) se vyskytuje odmocnina, uvědomíme si, že $\sqrt{y}$ je definována jen pro $y \geqq 0$. Označíme pro stručnost

$$L = \frac{a - 2 \cdot \dfrac{a-8}{a-6}}{2\left(1 - \dfrac{a-8}{a-6}\right)}.$$

Provedeme-li úpravu

$$L = \frac{\dfrac{a^2 - 8a + 16}{a-6}}{\dfrac{4}{a-6}} = \left(\frac{a-4}{2}\right)^2$$

(krátíme číslem různým od nuly), vidíme, že platí $L \geqq 0$.

Pro $x = \dfrac{a-8}{a-6}$ má tedy odmocnina na levé straně v rovnici (1) smysl. Položme ještě

$$P = \frac{2 - \dfrac{a-8}{a-6}}{1 - \dfrac{a-8}{a-6}};$$

snadno upravíme

$$P = \frac{\dfrac{a-4}{a-6}}{\dfrac{2}{a-6}} = \frac{a-4}{2}.$$

Zlomek $\dfrac{a-8}{a-6}$ je kořenem rovnice (1) právě tehdy, když platí $\sqrt{L} = P$, což lze napsat jako

$$\left|\frac{a-4}{2}\right| = \frac{a-4}{2};$$

to platí právě tehdy, když je $a \geqq 4$ (a ovšem $a \neq 6$). Pro $a < 4$ nemá tedy (1) žádné řešení.

Shrnutí. Provedenou diskusi můžeme opět shrnout do této přehledné tabulky:

Parametr	Řešení
$a = 6$	žádné
$a < 4$	žádné
$a \geqq 4,\ a \neq 6$	$\dfrac{a-8}{a-6}$

5. V rovine nech je daný štvorec $ABCD$ svojou polohou. Označme T stred úsečky AB. V polrovine ABD uvažujme o pravom uhle $\sphericalangle XTY$, kde X je vnútorný bod polpriamky AD a Y vnútorný bod polpriamky BC. Označme P pätu kolmice vedenej bodom T k priamke XY.

Preskúmajte, aký geometrický útvar vyplní bod P, keď bod X prebieha vnútro polpriamky AD.

Riešenie (pozri obr. 31). I. Vnútri polpriamky AD zvoľme bod X, takže polpriamka TX leží v polrovine $\varrho \equiv ABD$. Pretože v trojuholníku TXA je $\sphericalangle A = 90°$, je

$$\sphericalangle ATX < 90°. \tag{1}$$

V polrovine TXB (opačnej k polrovine TXA) zostrojme pravý uhol $\sphericalangle XTQ$. Vzhľadom na vzťah (1) platí o styčných uhloch $\sphericalangle ATX$, $\sphericalangle XTQ$

$$\sphericalangle ATX + \sphericalangle XTQ = \sphericalangle ATQ > 90°$$

a preto druhý z vedľajších uhlov $\sphericalangle ATQ$, $\sphericalangle QTB$ je ostrý, t. j.

$$\sphericalangle QTB < 90°. \tag{2}$$

Pretože je $\sphericalangle TBC = 90°$, platí

$$\sphericalangle QTB + \sphericalangle TBC < 180°,$$

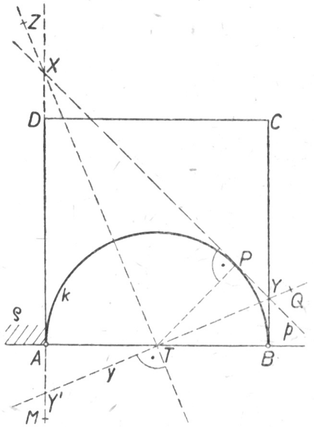
takže podľa Euklidovho postulátu majú polpriamky TQ, BC vnútri polroviny ϱ spoločný bod Y. Leží teda trojuholník XYT, kde $\sphericalangle T = 90°$, v polrovine ϱ; pritom sú jeho uhly $\sphericalangle TXY$, $\sphericalangle TYX$ ostré a päta P kolmice vedenej bodom T k priamke XY padne dovnútra úsečky XY a teda dovnútra polroviny ϱ.

Teraz dokážeme, že platí

$$TP = TA = \frac{1}{2} AB, \tag{3}$$

takže bod P leží vnútri polkružnice k opísanej v polrovine ϱ nad úsečkou AB ako priemerom.

Dôkaz. V súmernosti so stredom T je zrejme priamka AD obrazom priamky BC a preto obraz Y' bodu Y padne dovnútra polpriamky AM opačnej k polpriamke AD. Je teda T stredom úsečky YY', ďalej je $TX \perp YY'$ a preto je trojuholník XYY' rovnoramenný so základňou YY' a priamka TX je osou súmernosti tohto trojuholníka. V súmernosti s osou TX obrazom kolmice TP vedenej bodom T k priamke XY je zrejme kolmica TA vedená bodom T k priamke XAY'; z toho vyplýva, že päty P, A zmienených kolmíc TP, TA si v tejto súmernosti prislúchajú a úsečky TP, TA sú súmerne združené podľa osi TX, takže platí $TP = TA$, čím je vzťah (3) dokázaný. Leží teda každý bod P, zostrojený podľa textu úlohy, vnútri polkružnice k (t. j. bez krajných bodov A, B), čo sme mali dokázať. Všimnime si ešte, že priamka XPY je dotyčnicou polkružnice k v bode P, lebo je $XPY \perp TP$.



Obr. 31.

II. Teraz ešte máme dokázať, že ku každému bodu P polkružnice k (ktorý je rôzny od bodov A, B) možno zostrojiť vnútri polpriamok AD, BC po rade body X, Y také, že bod P je pätou kolmice vedenej bodom T k priamke XY.

Dôkaz. Označme TZ os dutého uhla $\sphericalangle ATP$, takže je zrejme $TZ \perp AP$ (pozri obr. 31). Polovica dutého uhla je uhol ostrý; pretože je $\sphericalangle ATZ = \frac{1}{2} \sphericalangle ATP$, je

$$\sphericalangle ATZ < 90°.$$

a podľa Euklidovho postulátu polpriamky AD, TZ majú vnútri polroviny ABD spoločný bod X. V súmernosti s osou TZ sú jednak body A, P, jednak uhly $\sphericalangle ATZ$, $\sphericalangle PTZ$ súmerne združené. Preto je v tejto súmernosti úsečka XP obrazom úsečky XA.

Označme teraz Y' priesečník priamky AD a kolmice y vedenej bodom T k priamke TZ. Bod A je pätou výšky TA trojuholníka $XY'T$ s preponou XY'; sú tedá $AY' \equiv AM$, AX opačné polpriamky. V súmernosti so stredom T je zrejme priamka BC obrazom priamky AD a teda obraz Y bodu Y' v tejto súmernosti padne dovnútra polpriamky BC. Avšak podľa konštrukcie bodu Y' je $y \equiv TY' \perp TZ$ a ďalej je $TY' = TY$; je teda bod Y obrazom bodu Y' v súmernosti podľa osi TZ. Pretože bod A leží vnútri úsečky XY', leží aj bod P vnútri úsečky XY, pričom je $\sphericalangle XTY = 90°$ a $TP \perp p$ (kde $p \equiv XY$). Ak zostrojíme teraz pätu kolmice vedenej bodom T k priamke XY, dospejeme práve k uvažovanému bodu P. Tým je ukončený dôkaz tvrdenia, vysloveného na začiatku odstavca II.

Záver. Z odstavcov I, II vyplýva, že bod P vyplní vnútro polkružnice k, ktorej krajnými bodmi sú body A, B a ktorá leží v polrovine $\varrho \equiv ABD$. Tým je úloha rozriešená.

6. Zostrojte trojuholník ABC (v základnom označení), ak je dané $a - b$, c, α.

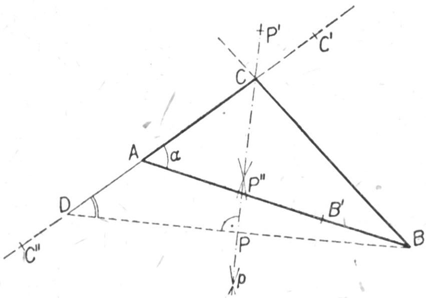
Dokážte, že podmienka riešiteľnosti úlohy je, aby o kladných číslach $a - b$, c, $\alpha < 2\,\mathrm{R}$ platil vzťah $c > a - b$, poprípade ešte vzťah $a - b > c \cdot \cos\,(180° - \alpha)$, ak uhol α je tupý.

Riešenie. Najprv dokážeme pomocnú vetu **P** (obr. 32): Nech p je os úsečky DB a A bod vnútri polroviny pD. Potom je vzdialenosť bodu A od bodu B väčšia než vzdialenosť bodu A od bodu D. Obrátene, ak p je os úsečky DB a ak vzdialenosť daného bodu A od bodu B je väčšia než vzdialenosť bodu A od bodu D, leží A v polrovine pD.

Dôkaz priamej vety **P**. Ak bod A leží na priamke DB, je tvrdenie vety zrejmé. Nech teda A neleží na priamke DB. Označme P'' spoločný bod priamky p a úsečky AB (bod P'' existuje, lebo body A, B sú priamkou p oddelené). Tu platí $BA = BP'' + P''A$ alebo

$$BA = DP'' + P''A \tag{1}$$

(bod P'' totiž leží na osi p úsečky DB a preto platí $BP'' = DP''$). Podľa trojuholníkovej nerovnosti použitej na trojuholník



Obr. 32.

ADP'' dostaneme $DP'' + P''A > DA$ alebo vzhľadom na (1) $BA > DA$. Tým je dôkaz priamej vety ukončený. Dôkaz obrátenej vety urobí sa napr. nepriamo (sporom).

Vlastné riešenie danej úlohy (obr. 32 až 34). Predpokladajme, že sme zostrojili trojuholník ABC, ktorý splňuje požiadavky vyslovené v texte úlohy. Zostrojme na polpriamke CA úsečku $CD = CB = a$. Pretože je $a > b$, padne bod D na predĺženie úsečky CA za bod A a platí $AD = a - b$, pričom je CDB rovnoramenný trojuholník. Preto bod C leží na osi p úsečky DB, ktorej stred označíme P. Na základe toho urobíme ***konštrukciu*** (obr. 32 až 34):

Najprv zostrojíme pomocný trojuholník ADB. Zostrojme uhol $\sphericalangle B'AC' = \alpha$. Na polpriamke AB' zostrojme úsečku $AB = c$ a na polpriamke AC'', opačnej k polpriamke AC', zostrojme úsečku $AD = a - b$. Ďalej zostrojme os p úsečky DB a označme C spoločný bod priamky p a polpriamky AC'. Potom je ABC hľadaný trojuholník.

Dôkaz. Podľa konštrukcie o trojuholníku ABC platí: $AB = c$, $\sphericalangle CAB = \alpha$. Pretože o bode C osi p úsečky DB platí $CD = CB$ a pretože bod A leží vnútri úsečky DC, je $AD = CD - CA$ alebo $AD = a - b$, kde $a = CB$, $b = CA$. Tým je dôkaz ukončený.

Diskusia. Riešiteľnosť úlohy závisí predovšetkým od požiadavku, aby daný uhol α bol dutý (iný uhol nemôže byť uhlom trojuholníka). Ďalej je nevyhnutné, aby bod C padol na predĺženie úsečky DA za bod A alebo dovnútra polroviny ABC'. Preskúmame nutné a postačujúce podmienky, za ktorých to nastane.

Trojuholník ABD možno pri dutom uhle α vždy zostrojiť. Označme P' bod priamky p, ktorý leží vnútri polroviny DBA a P stred úsečky DB.

Ak bod C leží vnútri polpriamky DA, potom je

$$\sphericalangle ADP + \sphericalangle DPP' < 180°. \tag{2}$$

Pretože je $\sphericalangle DPP' = 90°$, musí byť

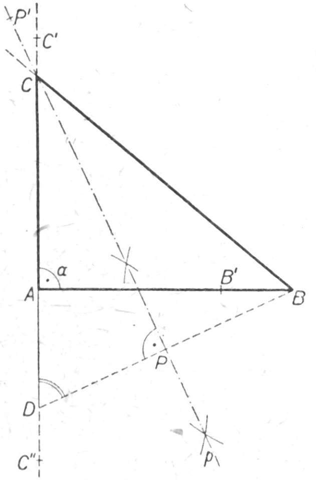
$$\sphericalangle ADP < 90°. \tag{2'}$$

Pre ďalšie úvahy treba rozlíšiť dve možnosti:

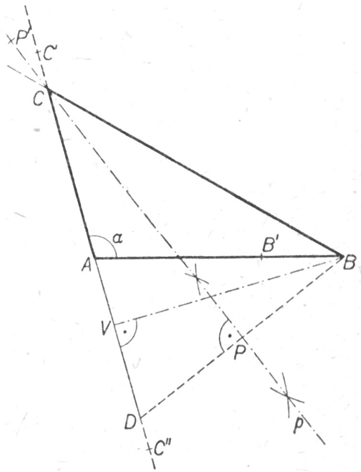
$$[1]\ 0 < \alpha \leqq 90°;\ [2]\ 90° < \alpha < 180°.$$

Prípad [1]. Nech je $0 < \alpha \leqq 90°$ (obr. 32, 33). Z vety o vonkajšom uhle trojuholníka ADB vyplýva, že $\sphericalangle ADB < \alpha$ alebo $\sphericalangle ADP < 90°$. Je teda splnený vzťah (2) a podľa Euklidovho postulátu majú polpriamky DA, PP' spoločný bod C

vnútri polroviny DBA. Ide o to, aby bod A padol dovnútra úsečky DC, t. j. aby padol bod A dovnútra polroviny pD, čo podľa prvej vety **P** vyžaduje, aby platilo $DA < BA$ alebo $a - b < c$. Podľa druhej vety **P**, ak o trojuholníku ADB platí



Obr. 33.



Obr. 34.

$a - b < c$, t. j. $DA < BA$, padne bod A dovnútra polroviny DBA, teda dovnútra úsečky DC.

Záver [1]. Ak teda o daných prvkoch platí $0 < \alpha \leqq 90°$, $a - b < c$, potom úloha má práve jedno riešenie.

Prípad [2]. Nech je

$$90° < \alpha < 180° \tag{3}$$

(obr. 34); potom je

$$\sphericalangle DAB < 90°. \tag{4}$$

Ak platí vzťah (2'), padne päta V výšky trojuholníka ADB, vedenej bodom B k strane AD, dovnútra úsečky AD (pozri učebnicu Geometria pre 7. triedu, str. 112), t. j. platí $AV < AD$ a pretože v tomto prípade je $AV = AB \cdot \cos(180° - \alpha)$, t. j. $AV = c \cdot \cos(180° - \alpha)$, dostávame tak nutnú podmienku

$$c \cdot \cos(180° - \alpha) < a - b. \tag{5}$$

Teraz obrátene, nech platia vzťahy (3), (5), potom platí vzťah (4), takže bod V padne dovnútra polpriamky AD a z (4) vyplýva $AV < AD$, takže bod V padne dovnútra úsečky AD, takže uhol $\sphericalangle ADB$ alebo $\sphericalangle ADP$ je ostrý. Platí teda vzťah (2) a podľa Euklidovho postulátu existuje spoločný bod priamky p a polpriamky DA a padne dovnútra polroviny DBA. Rovnako ako v prípade [1] sa usúdi, že bod A leží vnútri úsečky DC.

Záver [2]. Ak teda platí $90° < \alpha < 180°$, $c \cdot \cos(180° - \alpha) < a - b < c$, má úloha práve jedno riešenie.

Záver. Ak platia podmienky uvedené v závere [1] alebo podmienky uvedené v závere [2], má úloha práve jedno riešenie. Inak nemá úloha riešenie.

7. Určete všechna reálná řešení rovnice

$$\frac{1}{|x| + 1} + \frac{1}{x - 1} = 1.$$

Řešení. Úlohu si rozdělíme na dvě části.

a) Nejprve hledejme nezáporné kořeny dané rovnice. Pro $x \geqq 0$ je $|x| = x$ a danou rovnici můžeme psát i takto:

$$\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 1} = 1.$$

Má-li tato rovnice řešení, pak totéž řešení má také rovnice

$$\frac{2x}{x^2 - 1} = 1,$$

čili kvadratická rovnice

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Poslední rovnice má kořeny $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$, z nichž jen první je nezáporný. Zkouškou se přesvědčíme, že $1 + \sqrt{2}$ je skutečně kořenem dané rovnice. Je totiž

$$\frac{1}{(1 + \sqrt{2}) + 1} + \frac{1}{(1 + \sqrt{2}) - 1} =$$

$$= \frac{1}{(1 + \sqrt{2})\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + 1 + \sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2})\sqrt{2}} = 1\,.$$

b) Nyní hledejme záporné kořeny dané rovnice. Pro $x < 0$ je $|x| = -x$; danou rovnici lze tedy psát:

$$\frac{1}{-x + 1} + \frac{1}{x - 1} = 1.$$

Snadno nahlédneme, že tato rovnice nemá žádné řešení, neboť ji lze psát takto:

$$-\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 1} = 1;$$

levá strana rovnice je zřejmě rovna nule, kdežto pravá je rovna číslu 1.

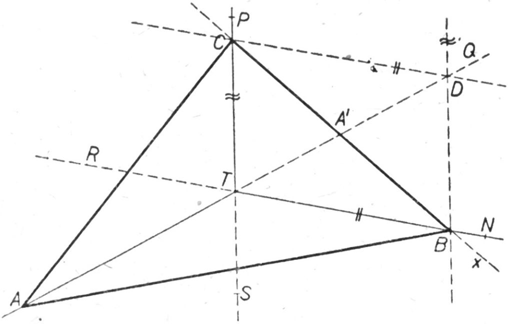
Daná rovnice nemá tedy žádný kořen záporný.

Výsledek. Jediný kořen $x = 1 + \sqrt{2}$.

8. V rovine nech sú dané tri rôzne polpriamky TA, TN, TP, z ktorých žiadne dve nie sú opačné.

Zostrojte trojuholník ABC, ktorý má ťažisko T, pričom jeho vrcholy B, C ležia (v tomto poradí) vnútri polpriamok TN, TP.

Urobte diskusiu riešiteľnosti úlohy.



Obr. 35.

Riešenie (obr. 35). *Rozbor.* Predpokladajme, že sme zostrojili trojuholník ABC, ktorý vyhovuje úlohe. Pretože ťažisko T leží vždy vnútri trojuholníka ABC, sú každé dva z dutých uhlov

$$\sphericalangle ATB, \ \sphericalangle BTC, \ \sphericalangle CTA$$

styčné a pokrývajú celú rovinu. (Uvidíme, že táto nutná podmienka je aj postačujúca k riešiteľnosti úlohy.)

Označme A' stred strany BC. Podľa známej vety o ťažisku platí $AT = 2 \cdot TA'$. Bod A' vieme teda zostrojiť. Potom sa úloha redukuje na známu úlohu: Bodom A' vnútri dutého uhla $\sphericalangle NTP$ veďte priamku x tak, aby polpriamky TN, TP preťala po rade v bodoch B, C a aby platilo $A'B = A'C$. Táto úloha, ako vieme, má práve jedno riešenie. Z toho vyplýva konštrukcia.

Konštrukcia (obr. 35). Nech TQ, TA sú opačné polpriamky, pričom Q leží vnútri uhla $\sphericalangle NTP$. Na polpriamke TQ zostrojme úsečku $TA' = \frac{1}{2} \cdot TA$. Ďalej zostrojme rovnobežník $TBDC$ so stredom A', pričom body B, C ležia (v tomto poradí) vnútri polpriamok TN, TP (teda je $A'D = A'T$, $DB \parallel TP$, $DC \parallel TN$). Potom je ABC hľadaný trojuholník.

Dôkaz. Pretože $TBDC$ je rovnobežník, je A' skutočne stredom strany BC a úsečka AA' ťažnicou. Podľa konštrukcie platí $TA = 2 \cdot TA'$ a preto je T ťažiskom trojuholníka ABC. Tým je dôkaz ukončený.

Diskusia. V ľubovoľnom trojuholníku ABC leží jeho ťažisko T vnútri tohto trojuholníka, pričom priamky TA, TB, TC určujú duté uhly $\sphericalangle ATB$, $\sphericalangle BTC$, $\sphericalangle CTA$, ktoré pokrývajú rovinu tak, že napr. polpriamka TQ, opačná k polpriamke TA, nutne prechádza vnútrajškom uhla $\sphericalangle BTC$, t. j. v našom prípade vnútrajškom uhla $\sphericalangle NTP$.

V danej úlohe je nevyhnutne jeden z uhlov s ramenami TN, TP dutý (lebo dané polpriamky sú rôzne a žiadne dve nie sú opačné). Podľa predošlého musí ešte polpriamka TQ, opačná k danej polpriamke TA, prechádzať vnútrajškom tohto dutého uhla $\sphericalangle NTP$. Ak je táto požiadavka splnená, má úloha jediné riešenie; inak nemá riešenie.

Dôkaz. Za uvedeného predpokladu padnú oba body A', D dovnútra uhla $\sphericalangle NTP$ a teda existuje rovnobežník $TBDC$, pričom body A, B, C neležia v priamke. Existuje teda trojuholník ABC. Podľa dôkazu konštrukcie, ktorý sme urobili, je v ňom bod T ťažiskom. Tým je dôkaz hotový.

Ak nie je uvedená požiadavka splnená, nemá zrejme úloha riešenie.

Tým je úloha rozriešená.

9. Dokážte, že výraz

$$V = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x}$$

je kladný pre všetky reálne čísla $x > y > z$.

Riešenie. Pre $x > y > z$ je

$$x - y > 0,\ y - z > 0,\ z - x < 0 \tag{1}$$

a daný výraz má vždy zmysel. Pre také trojice čísel x, y, z platí postupne

$$V = \frac{(y-z)(z-x) + (z-x)(x-y) + (x-y)(y-z)}{(x-y)(y-z)(z-x)} =$$

$$= \frac{yz - xy - z^2 + xz + xz - yz - x^2 + xy + xy - xz - y^2 + yz}{(x-y)(y-z)(z-x)} =$$

$$= \frac{xy + yz + xz - x^2 - y^2 - z^2}{(x-y)(y-z)(z-x)} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]}{(x-y)(y-z)(z-x)}. \tag{2}$$

Podľa predpokladu (1) je menovateľ posledného zlomku záporné číslo; čitateľ tohto zlomku je súčinom záporného a kladného čísla [pozri (2)]. Teda V je podielom dvoch záporných čísel a preto je $V > 0$. Tým je dôkaz tvrdenia úlohy ukončený.

Jiné řešení. Místo vztahů $x > y > z$ lze psát vztahy

$$x > y,\ x > z,\ y > z$$

neboli

$$x - y > 0,\ x - z > 0,\ y - z > 0. \tag{1}$$

Protože je $x > y$, je $x - z > y - z$ a vzhledem k poslednímu vztahu (1) tedy platí

$$x - z > y - z > 0.$$

Podle známé věty tedy platí

$$\frac{1}{y - z} > \frac{1}{x - z}$$

neboli

$$\frac{1}{y - z} + \frac{1}{z - x} > 0. \tag{2}$$

Dále z prvního vztahu (1) plyne, že

$$\frac{1}{x - y} > 0. \tag{3}$$

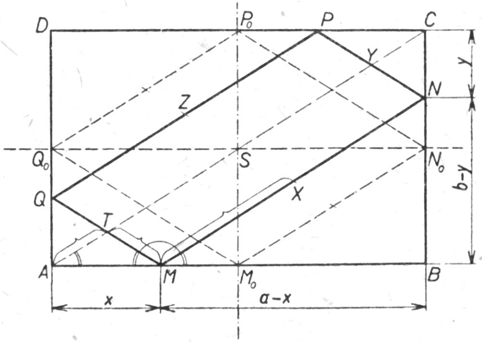
Sečtením levých a pravých stran vztahů (2) a (3) dostáváme, že je $V > 0$, což jsme měli právě dokázat.

Podle řešení s. Břetislava Fialy,
žáka 10.b tř., jsš, Česká Třebová.

10. Buď dán obdélník $ABCD$ o středu S, přičemž $a = AB$, $b = BC$ jsou daná kladná čísla. Uvnitř stran AB, BC zvolme pořadě body M, N tak, aby platilo $MN \parallel AC$. Sestrojme rovnoběžník $MNPQ$ o středu S.

a) Dokažte, že body P, Q leží pořadě uvnitř úseček CD, DA a že platí $MQ \parallel BD$.
b) Dokažte, že obvod rovnoběžníka $MNPQ$ je roven $2 \cdot AC$.
c) Sestrojte bod M tak, aby k němu příslušný rovnoběžník $MNPQ$ měl maximální obsah.

Řešení (obr. 36). a) Označme $AB = CD = a$, $BC = DA = b$. Obdélník $ABCD$ má bod S za střed souměrnosti; v této souměrnosti úsečkám AB, BC příslušejí pořadě souměrně sdružené úsečky CD, DA, takže bodu M uvnitř úsečky AB přísluší souměrně sdružený bod P uvnitř úsečky CD a bodu N přísluší bod Q uvnitř úsečky DA. Ze souměrnosti dvojic bodů M, P a N, Q plyne $SM = SP$, $SN = SQ$ a protože SM, SN jsou různé přímky, je $MNPQ$ požadovaný rovno-



Obr. 36.

běžník (úhlopříčky tohoto čtyřúhelníka se totiž navzájem půlí). Je tedy

$$MN \parallel AC,\ MN \parallel PQ \text{ neboli } AC \parallel PQ$$

a dále je

$$MQ \parallel PN. \tag{1}$$

Uvažujme stejnolehlost (B) o středu B, v níž přímce AC přísluší přímka MN; její koeficient λ splňuje vztah $0 < \lambda < 1$. Tu platí

$$BM = \lambda \cdot BA = \lambda a,\ BN = \lambda \cdot BC = \lambda b$$

a tedy

$$\begin{aligned} AM &= AB - BM = a\,(1 - \lambda), \\ CN &= BC - BN = b\,(1 - \lambda). \end{aligned} \tag{2}$$

Uvažujme nyní stejnolehlost (A) o středu A, v níž bodu B přísluší bod M; její koeficient $\lambda' = \dfrac{AM}{AB}$ a vzhledem ke (2) je $\lambda' = 1 - \lambda$. Ze souměrnosti podle středu S plyne $AQ = CN = b(1 - \lambda)$, takže $\dfrac{AQ}{AD} = 1 - \lambda = \lambda'$, tj. bodu D ve stejnolehlosti (A) přísluší bod Q; proto o příslušných přímkách BD, MQ v této stejnolehlosti platí

$$BD \parallel MQ.$$

Odtud také plyne, že v přímkách AC, BD leží střední příčky rovnoběžníka $MNPQ$.

Tím je důkaz tvrzení úlohy a) proveden.

b) Označme po řadě X, Y, Z, T středy úseček MN, NP, PQ, QM. Dokážeme, že

$$TM + MX = AS, \tag{3}$$

což je čtvrtina obvodu rovnoběžníka $MNPQ$; tím bude dokázáno, že obvod tohoto rovnoběžníka je $2 \cdot AC$.

Důkaz. Protože v obdélníku $ABCD$ je $SA = SB$, je trojúhelník SAB rovnoramenný a tudíž jeho úhly při základně AB jsou shodné, tj. platí:

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABD = \varepsilon.$$

Z rovnoběžnosti přímek MQ, BD plyne, že

$$\sphericalangle ABD = 180^\circ - \sphericalangle QMB \text{ (úhly přilehlé)}$$

a protože vedle toho platí, že

$$\sphericalangle AMQ = 180^\circ - \sphericalangle QMB \text{ (úhly vedlejší)},$$

dostaneme porovnáním obou posledních vztahů, že je

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle AMQ;$$

je tedy trojúhelník TAM rovnoramenný se základnou AM a tudíž platí

$$TM = AT.$$

O čtvrtině obvodu rovnoběžníka $MNPQ$ tedy platí $TM + MX = AT + TS = AS$, čímž je vztah (3) dokázán a tím i tvrzení úlohy b).

c) Označme $AM = x$, $CN = y$, takže je $MB = a - x$, $BN = b - y$. Označme p obsah rovnoběžníka $MNPQ$. Obsah p dostaneme, když od obsahu ab obdélníka $ABCD$ odečteme obsahy pravoúhlých trojúhelníků MQA, PNC a MNB, PQD, z nichž první dva a poslední dva jsou zřejmě shodné; součet obsahů prvních dvou trojúhelníků je xy, součet obsahů posledních dvou trojúhelníků je $(a - x) \cdot (b - y)$. Je tedy

$$p = ab - xy - (a - x)(b - y)$$

neboli

$$p = ay + bx - 2xy. \tag{4}$$

Ze stejnolehlosti (A) podle středu A pro trojúhelníky ABD, AMQ plyne, že

$$\frac{AQ}{AM} = \frac{AD}{AB}$$

neboli

$$y = \frac{bx}{a}. \tag{4'}$$

Dosaďme odtud do vztahu (4); po úpravě obdržíme

$$p = 2bx - \frac{2bx^2}{a}.$$

Výraz na pravé straně postupně upravíme

$$2bx - \frac{2bx^2}{a} = \frac{2b}{a}(ax - x^2) =$$

$$= \frac{2b}{a}\left[\frac{a^2}{4} - \left(x^2 - 2\cdot\frac{a}{2}x + (\tfrac{1}{2}a)^2\right)\right] =$$

$$= \frac{2b}{a}\left[\frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right].$$

Je tedy

$$p = \frac{2b}{a}\left[\frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right]. \tag{5}$$

Maximum čísla (5) závisí na maximu čísla uvedeného v lomené závorce; jedná se tu o rozdíl konstanty $\frac{a^2}{4}$ a čísla $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$, které je vždy nezáporné. Tento rozdíl je zřejmě největší, jestliže je menšitel nula. Tu platí $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = 0$ neboli $x - \frac{a}{2} = 0$ a tedy $x = \frac{a}{2}$.

Z (4′) dostaneme $y = \frac{b}{2}$, takže příslušný rovnoběžník *MNPQ* má vrcholy ve středech stran daného obdélníka *ABCD*. V souhlase s tímto výsledkem dostaneme ze vztahu (5), že obsah $p = p_0$ tohoto rovnoběžníka *MNPQ* je

$$p_0 = \frac{2b}{a}\cdot\frac{a^2}{4} = \frac{ab}{2}.$$

Závěr. Tím je úloha rozřešena. Maximální obsah má ten z rovnoběžníků *MNPQ*, jehož vrcholy jsou středy stran obdélníka *ABCD*.

11. V rovině buďte dány čtyři body A, B, C, D takové, že existují trojúhelníky ABC, BCD, CDA, DAB, z nichž žádný není tupoúhlý.

Dokažte, že potom platí:

a) Žádný z daných bodů A, B, C, D neleží uvnitř trojúhelníka, jehož vrcholy jsou tři zbývající z těchto bodů.

b) Body A, B, C, D jsou (v určitém pořadí) vrcholy vypuklého čtyřúhelníka, který je nutně obdélník.

Řešení (obr. 37). Žádné tři z bodů A, B, C, D neleží v téže přímce, jinak by neexistoval některý z trojúhelníků

$$ABC,\ BCD,\ CDA,\ DAB. \tag{1}$$

Dále podle textu úlohy není žádný z těchto trojúhelníků tupoúhlý, takže kterýkoli z jejich úhlů je menší nebo roven úhlu pravému; tohoto faktu několikrát užijeme.

Řešení úlohy a) rozdělíme na několik částí; dokážeme:

I. Bod D neleží na žádné z přímek

$$AB,\ BC,\ CA. \tag{2}$$

II. Bod D nepadne dovnitř žádného z úhlů, které jsou vrcholové k vnitřním úhlům trojúhelníka ABC.

III. Bod D nepadne dovnitř trojúhelníka ABC.

Podobná tvrzení pro ostatní body se dokáží stejně.

Důkazy jednotlivých tvrzení I až III provedeme jen pro jednu dvojici bodů, např. A, B; pro ostatní možnosti se důkaz provede zcela obdobně.

Část I. Nechť bod D padne na některou z přímek (2); padne-li např. na přímku AB, pak neexistuje trojúhelník ABD; tím je důkaz části I proveden.

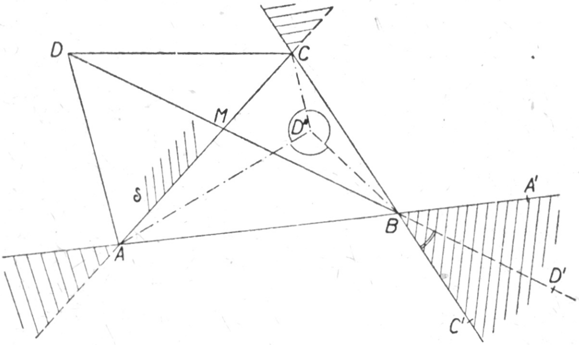
Část II. Nechť bod D padne např. dovnitř úhlu $\sphericalangle A'BC'$ kde BA', BC' jsou polopřímky opačné k polopřímkám BA,

BC; v tomto případě bod D označme D'. Potom jsou úhly $\sphericalangle ABC'$, $\sphericalangle C'BD'$ styčné, a protože je $\sphericalangle ABC \leqq$ R, je $\sphericalangle ABC' \geqq$ R a tedy

$$\sphericalangle ABD' = \sphericalangle ABC' + \sphericalangle C'BD' \geqq \mathrm{R} + \sphericalangle C'BD';$$

je tedy

$$\sphericalangle ABD' > \mathrm{R},$$



Obr. 37.

takže trojúhelník ABD' je tupoúhlý. Bod D tedy nepadne dovnitř úhlu $\sphericalangle A'BC'$, což právě jsme měli dokázat.

Část III. Nechť bod D leží uvnitř trojúhelníka ABC; bod D v tomto případě označme D''. Potom každé dva z úhlů

$$\sphericalangle AD''B, \sphericalangle BD''C, \sphericalangle CD''A$$

jsou styčné a jejich součet je 4R. Kdyby každý z těchto úhlů byl nejvýše roven R, měly by součet nejvýše 3 R, a to je ve sporu s tím, že mají součet 4R. Proto bod D nepadne dovnitř trojúhelníka ABC.

b) Můžeme předpokládat, že bod D leží uvnitř úhlu $\sphericalangle ABC$, ale zároveň uvnitř poloroviny δ opačné k polorovině CAB.

Kdyby tomu tak nebylo, vyměnili bychom navzájem názvy bodů A, B anebo bodů C, B. Body B, D jsou přímkou CA odděleny a přímky BD, CA jsou různoběžné. Proto uvnitř úsečky BD leží bod M, který je bodem přímky CA. Protože úsečka BD leží v úhlu $\sphericalangle ABC$, padne bod M nutně na úsečku CA, a to dovnitř této úsečky; jinak by totiž buď body C, B, D anebo body A, B, D ležely v téže přímce. Leží tedy bod M uvnitř každé z úseček BD, CA. Proto je $ABCD$ konvexní (vypuklý) čtyřúhelník (viz učebnici Geometrie pro 8. ročník, str. 3/157).

Duté úhly $\sphericalangle DAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$ jsou úhly čtyřúhelníka $ABCD$, takže jejich součet je 4 R. Protože každý z těchto úhlů je jedním z úhlů některého z trojúhelníků (1), je každý z nich nejvýše roven R. To však znamená, že každý z těchto úhlů musí být pravý; kdyby jen jediný byl ostrý, byl by jejich součet menší než 4 R. Jsou tedy všechny úhly čtyřúhelníka $ABCD$ pravé. Ze vztahů

$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle CDA = 2\mathrm{R} \text{ (úhly přilehlé)},$$
$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 2\mathrm{R} \text{ (úhly přilehlé)}$$

plyne, že

$$AB \parallel CD, \quad AD \parallel BC,$$

takže $ABCD$ je rovnoběžník, jehož všechny úhly jsou pravé, tj. je to obdélník (viz definici obdélníka v učebnici Geometrie pro 8. ročník, str. 20/174). Tím je řešení úlohy b) provedeno.

12. Buď dán výraz

$$V = 4\sqrt{\frac{x^3 - 2x^2}{y^3 + 3y^2}} - \frac{2x}{y}\sqrt{\frac{x-2}{y+3}} + \frac{6}{y}\sqrt{\frac{x^3 - 2x^2}{y+3}} - 3x\sqrt{\frac{x-2}{y^3 + 3y^2}},$$

kde x, y jsou reálná čísla.

a) Označte $[x, y]$ bod v rovině pravoúhlých souřadnic, který zobrazuje dvojici x, y reálných čísel.

Vyznačte graficky množinu **M** bodů roviny, která zobrazuje všechny dvojice x, y čísel, pro která má daný výraz V smysl.

b) Ukažte, že množinu **M** bodů lze ještě rozložit na části tak, že v každé nově vzniklé části se dá výraz V upravit na tvar $V = a \cdot \frac{x}{y} \sqrt{\frac{x-2}{y+3}}$, kde a je číslo konstantní pro celou takovou část.

Řešení. a) Nejprve stanovíme ty dvojice x, y reálných čísel, pro které má výraz V smysl. Jedná se o to, že zlomky ve výraze V musí mít smysl a dále o to, aby odmocněnci ve výraze V byly nezáporné.

Jmenovatelé zlomků výrazu V jsou

$$y,\ y^3 + 3y^2 = y^2(y+3),\ y+3;$$

zlomky mají tedy význam, jestliže o čísle y platí zároveň tyto dva vztahy

$$y \neq 0, \tag{1}$$

$$y + 3 \neq 0. \tag{1'}$$

Označme

$$k = \frac{x-2}{y+3}; \tag{2}$$

potom lze výraz V psát ve tvaru

$$V = 4\sqrt{\frac{x^2}{y^2}k} - \frac{2x}{y}\sqrt{k} + \frac{6}{y}\sqrt{x^2k} - 3x\sqrt{\frac{1}{y^2}k}\,. \tag{3}$$

Všichni odmocněnci musí být nezáporní. Protože je $\frac{1}{y^2} > 0$ a $x^2 \geqq 0$, jsou za předpokladu, že

$$k \geqq 0, \tag{4}$$

všichni odmocněnci ve vztahu (3) nezáporní a odmocniny mají smysl.

Výraz V má tedy smysl, jestliže o reálných číslech x, y platí zároveň vztahy (1), (1'), (4).

Nyní vyšetříme, kdy platí (1), (1'), (4). Je zřejmé, že musí platit dále uvedené podmínky (5), (6); obráceně, platí-li podmínky (5), (6), pak též platí (1), (1'), (4).

Případ [1]. Je

$$x - 2 \geqq 0,\ y + 3 > 0,\ y \neq 0. \tag{5}$$

Zaveďme tyto pomocné body v rovině pravoúhlých souřadnic o počátku P (viz obr. 38):

$$\begin{aligned} X &\equiv [2, 0], & X_1 &\equiv [3, 0], & X_2 &\equiv [2, 1], \\ Y &\equiv [0, -3], & Y_1 &\equiv [0, -4], & Y_2 &\equiv [-1, -3], \\ Z &\equiv [2, -3,], & Z_1 &\equiv [3, -3], & Z_2 &\equiv [2, -4]. \end{aligned}$$

Všechny body $[x, y]$, pro něž platí $x - 2 \geqq 0$, vyplňují polorovinu XZX_1; všechny body $[x, y]$, pro něž platí $y + 3 > 0$, vyplňují polorovinu YZP s výjimkou její hranice YZ. Body, pro něž platí $y = 0$, leží právě na ose x.

Odtud *závěr*. Všechny body, pro něž platí (5), vyplňují právě pravý úhel $\sphericalangle X_2ZZ_1$, z něhož musíme vyloučit všechny body polopřímek ZZ_1, XX_1.

Případ [2]. Je

$$x - 2 \leqq 0,\ y + 3 < 0,\ y \neq 0. \tag{6}$$

Všechny body $[x, y]$, pro něž platí $x - 2 \leqq 0$, vyplňují polorovinu XZP; všechny body, pro něž platí $y + 3 < 0$, vyplňují polorovinu YZY_1 s výjimkou její hranice YZ.

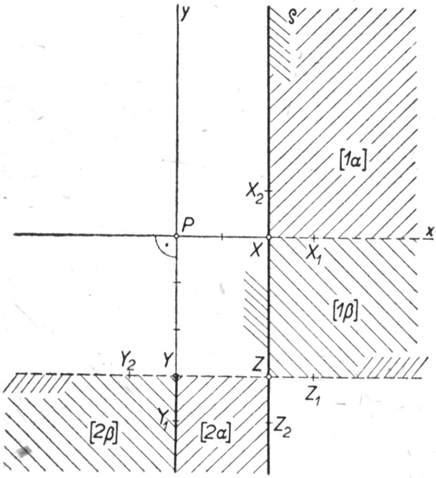
Odtud *závěr*. Všechny body, pro něž platí (6), vyplňují právě pravý úhel $\sphericalangle Y_2ZZ_2$, z něhož musíme vyloučit polopřímku ZY_2.

Tím je úloha a) rozřešena.

b) Pro reálné číslo a platí $\sqrt{a^2} = |a|$. Lze tedy výraz (3) psát [předpokládáme, že platí (1), (1'), (4)] ve tvaru

$$V = \frac{4|x|}{|y|}\sqrt{k} - \frac{2x}{y}\sqrt{k} + \frac{6|x|}{y}\sqrt{k} - \frac{3x}{|y|}\sqrt{k}. \qquad (7)$$

Nyní rozeznávejme obě možnosti z úlohy a):



Obr. 38.

Případ [1]. Rozlišujme:

α) Nechť je $y > 0$, takže se jedná o dvojice x, y, pro něž příslušné body $[x, y]$ v rovině pravoúhlých souřadnic vyplňují pravý úhel $\sphericalangle X_1XX_2$ s výjimkou polopřímky XX_1 (v obr. 38) viz část [1α] roviny). Tu je $x > 0$, $y > 0$ a tedy $|x| = x$, $|y| = y$. Výraz (7) lze pak psát

$$V = \frac{4x}{y}\sqrt{k} - \frac{2x}{y}\sqrt{k} + \frac{6x}{y}\sqrt{k} - \frac{3x}{y}\sqrt{k}$$

neboli $$V = \frac{5x}{y}\sqrt{\frac{x-2}{y+3}}\,. \tag{8}$$

β) Nechť je $-3 < y < 0$; příslušné obrazy $[x, y]$ dvojic x, y leží v pásu rovnoběžek XX_1, ZZ_1, a to v polorovině XZX_1, při čemž musíme vyloučit obě polopřímky XX_1, ZZ_1 (zůstává však vnitřek úsečky XZ; v obr. 38 viz část $[1\beta]$ roviny). Tu je $x > 0$, $y < 0$ a tedy $|x| = x$, $|y| = -y$. Výraz (7) lze pak psát

$$V = -\frac{4x}{y}\sqrt{k} - \frac{2x}{y}\sqrt{k} + \frac{6x}{y}\sqrt{k} + \frac{3x}{y}\sqrt{k},$$

neboli $$V = \frac{3x}{y}\sqrt{\frac{x-2}{y+3}}\,. \tag{9}$$

Případ [2]. Rozlišujme:

α) Nechť je $0 \leqq x \leqq 2$, $y + 3 < 0$ (tj. jistě $y < 0$). Příslušné body $[x, y]$ leží v pásu rovnoběžek YY_1, ZZ_2 a uvnitř poloroviny YZY_1 (zůstávají však vnitřky polopřímek YY_1, ZZ_2; v obr. 38 viz část $[2\alpha]$ roviny bez úsečky YZ). Tu je $|x| = x$, $|y| = -y$; výraz (7) lze pak psát

$$V = -\frac{4x}{y}\sqrt{k} - \frac{2x}{y}\sqrt{k} + \frac{6x}{y}\sqrt{k} + \frac{3x}{y}\sqrt{k},$$

neboli $$V = \frac{3x}{y}\sqrt{\frac{x-2}{y+3}}\,. \tag{10}$$

β) Nechť je $x < 0$, $y + 3 < 0$ (tj. jistě $y < 0$). Příslušné body $[x, y]$ leží uvnitř pravého úhlu $\sphericalangle Y_1YY_2$ (v obr. 38 viz část $[2\beta]$ roviny). Tu je $|x| = -x$, $|y| = -y$ a výraz (7) lze pak psát

$$V = \frac{4x}{y}\sqrt{k} - \frac{2x}{y}\sqrt{k} - \frac{6x}{y}\sqrt{k} + \frac{3x}{y}\sqrt{k}$$

neboli

$$V = -\frac{x}{y}\sqrt{\frac{x-2}{y+3}}. \tag{11}$$

Vztahy (8) až (11) jsou řešením úlohy.

5. Úlohy II. kola kategorie B

1. Určte všetky reálne čísla x, pre ktoré platí vzťah

$$\frac{1+x^2}{(1-x)^2} \geqq 2. \tag{1}$$

Znázornite tieto čísla x v náčrtku na číselnej osi.

Riešenie. Nech číslo x vyhovuje nerovnosti (1). Potom číslo $(1-x)^2$ je kladné. Môžeme ním teda násobiť obe strany nerovnosti (1) a dostaneme

$$1 + x^2 \geqq 2\,(1 - 2x + x^2),$$

čiže

$$0 \geqq 1 - 4x + x^2. \tag{2}$$

Rozložíme trojčlen v nerovnosti (2). Rovnica

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

má korene $\quad x_1 = 2 + \sqrt{3},\ \ x_2 = 2 - \sqrt{3}.$

Nerovnosť (2) možno teda napísať v tvare

$$(x - 2 - \sqrt{3})\,(x - 2 + \sqrt{3}) \leqq 0\,. \tag{3}$$

Z činiteľov $x - 2 - \sqrt{3}$ a $x - 2 + \sqrt{3}$, ktoré sa vyskytujú na ľavej strane, je zrejme prvý menší (o $2\sqrt{3}$) než druhý, teda

$$x - 2 - \sqrt{3} < x - 2 + \sqrt{3}.$$

Z toho vyplýva, že nerovnosti (3) možno vyhovieť len tak, že musí platiť súčasne

$$x - 2 - \sqrt{3} \leqq 0,$$

$$x - 2 + \sqrt{3} \geqq 0,$$

čiže

$$x \leqq 2 + \sqrt{3},$$

$$x \geqq 2 - \sqrt{3}.$$

To možno písať v tvare

$$2 - \sqrt{3} \leqq x \leqq 2 + \sqrt{3}. \qquad (4)$$

Zistili sme teda zatiaľ, že každé číslo x, ktoré vyhovuje nerovnosti (1), vyhovuje aj nerovnostiam (4). Avšak zatiaľ nie je jasné, či platí aj obrátené tvrdenie.

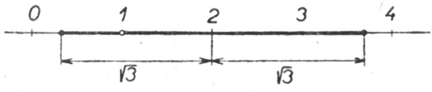
Majme teraz číslo x, ktoré splňuje nerovnosti (4). Potom platí súčasne aj

$$x - 2 - \sqrt{3} \leqq 0,$$

$$x - 2 + \sqrt{3} \geqq 0,$$

teda aj $(x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3}) \leqq 0$,
t. j.

$$x^2 - 4x + 1 \leqq 0.$$



Obr. 39.

Túto poslednú nerovnosť možno upraviť na tvar

$$1 + x^2 \geqq 2(1 - x)^2. \qquad (5)$$

Ak je $x \neq 1$, je tiež $1 - x \neq 0$. Obe strany nerovnosti (5) vynásobíme kladným číslom $\frac{1}{(1-x)^2}$; tým dostaneme nerovnosť (1). Ak je však $x = 1$, ľavá strana nerovnosti (1) nemá vôbec zmysel; preto $x = 1$ nie je riešenie nerovnosti (1).

Záver. Čísla $x \neq 1$, ktoré splňujú nerovnosti (4), sú práve všetky riešenia nerovnosti (1) (pozri obrázok 39).

2. Nech sú dané dve kružnice k_1, k_2, ktoré majú spoločné dva rôzne body C, M.

Zostrojte trojuholník ABC tak, aby bod A bol bodom kružnice k_1, bod B bodom kružnice k_2 a bod M bol stredom strany AB.

Dokážte, že úloha má práve jedno riešenie.

Riešenie. *Rozbor* (obr. 40). Nech ABC je hľadaný trojuholník, v ktorom úsečka CM je ťažnicou, takže je

$$MA = MB.$$

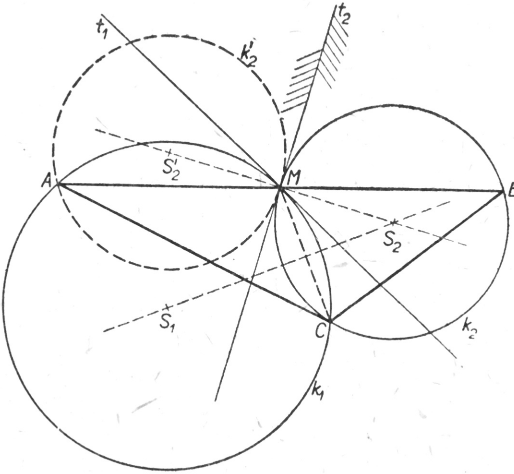
Body A, B sú teda súmerne združené podľa stredu M. Označme $k_2' \equiv (S_2', r_2)$ kružnicu súmerne združenú k danej kružnici $k_2 \equiv (S_2, r_2)$ vzhľadom na stred M súmernosti. V súmernosti so stredom M prejde bod B kružnice k_2 do bodu A kružnice k'_2. Pretože bod A leží na kružnici k_1, je bod A spoločným bodom kružníc k_1, k'_2. Z toho vyplýva konštrukcia.

Konštrukcia. Zostrojme kružnicu k_2', súmerne združenú ku kružnici k_2 vzhľadom na stred M súmernosti, a označme $A \neq M$ spoločný bod kružníc k_1, k_2'. Obraz bodu A v tejto súmernosti označme B. Potom ABC je hľadaný trojuholník.

Dôkaz vyplýva z rozboru a konštrukcie.

Diskusia. Dokážeme, že úloha má vždy jediné riešenie. Označme t_1, t_2 (v tomto poradí) dotyčnice kružníc k_1, k_2

v bode M. Pretože kružnice k_1, k_2 majú dva rôzne spoločné body, je $t_1 \not\equiv t_2$ (inak by sa kružnice k_1, k_2 navzájom dotýkali, čo odporuje textu úlohy). Kružnica k_2 leží v jednej z opačných polrovín vyťatých priamkou t_2. Zo súmernosti podľa stredu M vyplýva, že kružnica k_2' leží v polrovine, opačnej k predošlej



Obr. 40.

polrovine, a priamka t_2 je jej dotyčnicou. Obidve rôzne kružnice k_1, k'_2 majú spoločný bod M; dokážeme, že majú spoločný ešte práve jeden ďalší bod $A \not\equiv M$.

Keby kružnice k_1, k_2' nemali ďalší spoločný bod, dotýkali by sa v bode M a platilo by $t_1 \equiv t_2$, čo je však v rozpore s textom úlohy. Preto je $A \not\equiv M$, čo sme mali dokázať.

Bod A preto existuje (a to jediný); bod B je obrazom bodu A v súmernosti so stredom M. Pretože bod A leží vnútri jednej z polrovín vyťatých priamkou t_2, leží bod B vnútri polroviny, ktorá je opačná k predošlej polrovine. Je teda $B \neq A$. Pretože body C, A ležia vnútri opačných polrovín vyťatých priamkou t_2, sú navzájom rôzne a tým sú rôzne aj body C, B. Tým sme dokázali, že trojuholník ABC existuje, a to jediný.

3. Řešte rovnici

$$x + \sqrt{px - 2p + 1} = 1, \tag{1}$$

kde p je dané reálné číslo.

Proveďte diskusi řešitelnosti vzhledem k číslu p.

Řešení. Nechť číslo x je řešením rovnice (1); potom z (1) plyne

$$\sqrt{px - 2p + 1} = 1 - x \tag{2}$$

a protože levá strana je číslo nezáporné, musí o pravé straně platit $1 - x \geqq 0$ neboli

$$x \leqq 1. \tag{3}$$

Umocněme obě strany rovnice (2) na druhou; obdržíme

$$px - 2p + 1 = 1 - 2x + x^2$$

neboli

$$0 = x^2 - (2 + p)x + 2p.$$

Rozložíme-li trojčlen na pravé straně, dostaneme

$$(x - p)(x - 2) = 0;$$

kořeny této rovnice jsou

$$x_1 = p, \; x_2 = 2. \tag{4}$$

Jestliže tedy x je řešením dané rovnice (1), potom je nutně rovno jednomu z čísel x_1, x_2. Číslo x_2 vzhledem ke (3) zřejmě nepřichází v úvahu [o tom se též lze přesvědčit dosazením do (1)]. Číslo $x_1 = p$ musí především splňovat vztah (3) čili musí být

$$p \leqq 1. \tag{5}$$

Dokážeme nyní, že číslo $x = p$ pro $p \leqq 1$ je kořenem rovnice (1); označme pořadě L, P příslušná dosazení do příslušných stran rovnice (1). Dostaneme postupně

$$L = p + \sqrt{p^2 - 2p + 1} = p + \sqrt{(1 - p)^2} = p + |1 - p|;$$

vzhledem ke vztahu (5) je $|1 - p| = 1 - p$ a tedy

$$L = p + 1 - p = 1.$$

Pravá strana $P = 1$, takže skutečně je $L = P$ a číslo $x = p$ je jediným řešením dané rovnice (1).

Závěr. Daná rovnice má pro $p \leqq 1$ jediný kořen $x = p$; pro $p > 1$ nemá řešení.

4. Buď dána polorovina ABM a kladné číslo ϱ.

V této polorovině sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC o přeponě AB, jemuž vepsaná kružnice má poloměr ϱ.

Rozhodněte o řešitelnosti úlohy vzhledem ke kladným číslům $c = AB$, ϱ.

(Při konstrukci lze užít úhlu $\sphericalangle ASB$, kde S je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.)

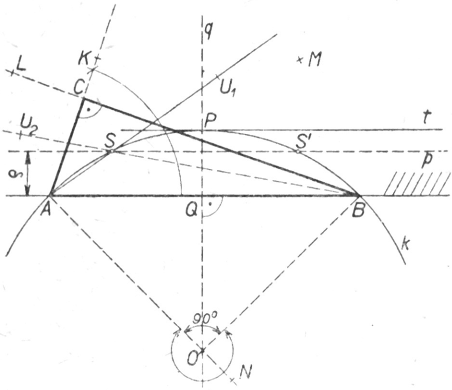
Řešení (obr. 41). Předpokládejme, že jsme v polorovině ABM sestrojili pravoúhlý trojúhelník ABC o přeponě AB a poloměru ϱ vepsané kružnice. Označme α, β úhly trojúhelníka ABC při vrcholech A, B. Tu platí $\alpha + \beta = 90°$ a tedy $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 45°$, což je součet úhlů $\sphericalangle SAB$, $\sphericalangle SBA$; proto je

$$\sphericalangle ASB = 135°.$$

Leží tedy bod S na oblouku $k \equiv \widehat{AB}$ o středu O, přičemž středový úhel $AOB = 270°$.

Vzdálenost bodu S od přímky AB je rovna ϱ a proto bod S leží na přímce $p \parallel AB$, která leží uvnitř poloroviny ABM a která má od přímky AB vzdálenost ϱ. Bod S je tedy společným bodem oblouku k a přímky p. Na základě toho provedeme *konstrukci*:

V polorovině ABM sestrojme přímku $p \parallel AB$ ve vzdálenosti ϱ. Dále sestrojme osu q úsečky AB a dále v polorovině opačné k polorovině ABM úhel $\sphericalangle BAN = 45°$. Označme O společný



Obr. 41.

bod přímek AN, q. Potom je $\sphericalangle AOB = 90°$ a úhel $AOB = 270°$. Body oblouku $k \equiv \widehat{AB}$ kružnice (O, OA), které leží uvnitř poloroviny ABM, tvoří množinu všech bodů X, o nichž platí $\sphericalangle AXB = 135°$. Označme S společný bod přímky p a oblouku k. K úhlům $\sphericalangle SAB$, $\sphericalangle SBA$ sestrojme styčné úhly $\sphericalangle SAK = \sphericalangle SAB$, $\sphericalangle SBL = \sphericalangle SBA$ a označme C společný bod polopřímek AK, BL. Potom trojúhelník ABC je hledaným trojúhelníkem.

Důkaz. Podle konstrukce platí, že $\sphericalangle ASB = 135°$ a proto v trojúhelníku ABS platí $\sphericalangle SAB + \sphericalangle SBA = 45°$, a protože je

$$\sphericalangle KAB + \sphericalangle LBA = 2\,(\sphericalangle SAB + \sphericalangle SBA), \qquad (2)$$

je součet obou těchto úhlů roven $90°$, takže podle Eukleidova axiómu polopřímky AK, BL mají uvnitř poloroviny ABM společný bod C. Ze vztahu (2) o trojúhelníku ABC platí

$$\sphericalangle BCA = 90°,$$

což jsme měli dokázat.

Diskuse. Z předchozího důkazu plyne, že k bodu S přísluší jediný trojúhelník ABC, který splňuje požadavky textu úlohy. Jestliže tedy přímka p a oblouk k

[1] mají dva společné body $S \neq S'$, má úloha dvě řešení (viz obr. 41);

[2] mají jediný společný bod P (je to zřejmě dotykový bod tečny $t \| AB$ oblouku k, která leží uvnitř poloroviny ABM); tu má úloha jediné řešení.

[3] nemají společný bod, úloha nemá řešení;

Jednotlivé případy podle známé věty nastanou právě tehdy, je-li

[1] $\varrho < PQ$; [2] $\varrho = PQ$; [3] $\varrho > PQ$,

kde Q je středem úsečky AB a bod P je společným bodem přímky q a oblouku k.

Je tedy třeba vypočítat číslo PQ: V trojúhelníku ABO je $\sphericalangle O = 90°$, $OA = OB$, $AB = c$, $AQ = OQ = \frac{1}{2}c$ a podle Pythagorovy věty platí

$$OA^2 = AQ^2 + OQ^2$$

neboli

$$OA = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Protože je $OP = OA$, platí $PQ = OP - OQ = \frac{c}{\sqrt{2}} - \frac{c}{2} =$
$= \frac{c}{2}(\sqrt{2} - 1)$.

Úloha má tedy dvě řešení, je-li $\varrho < \frac{c}{2}(\sqrt{2} - 1)$; má jediné řešení, je-li $\varrho = \frac{c}{2}(\sqrt{2} - 1)$; nemá řešení, je-li $\varrho > \frac{c}{2}(\sqrt{2} - 1)$.

Tím je řešení úlohy provedeno.

6. Úlohy I. kola kategorie C

1. Pro všechna reálná čísla a, b, c je výraz

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 - 2(a + b + c) \qquad (1)$$

nezáporný; dokažte.

Řešení. Výraz (1) postupně upravíme takto:

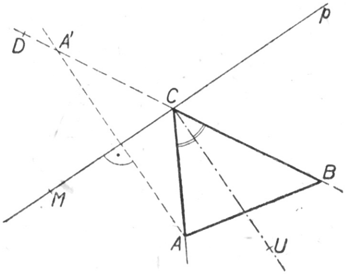
$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 - 2(a + b + c) =$$
$$= (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) =$$
$$= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2.$$

Každé z čísel $(a - 1)^2$, $(b - 1)^2$, $(c - 1)^2$ je nezáporné a tudíž jejich součet musí být číslo nezáporné. Přitom je daný výraz kladný pro všechny trojice čísel a, b, c s výjimkou případu, kdy je $(a - 1)^2 = (b - 1)^2 = (c - 1)^2 = 0$, tj. jestliže platí $a = b = c = 1$; v tomto případě je daný výraz roven nule.

2. V rovine nech je daná priamka p a vnútri jednej z polrovín vyťatých priamkou p nech sú dané dva rôzne body A, B. Na priamke p zostrojte bod C tak, aby v trojuholníku ABC os uhla $\sphericalangle BCA$ stála kolmo na priamku p.
Urobte diskusiu riešiteľnosti.

Riešenie. Pomocná veta **V**: Osi vedľajších uhlov stoja na seba kolmo.

Rozbor (obr. 42). Označme CU os uhla $\sphericalangle ACB$ hľadaného trojuholníka ABC. Podľa požiadavky úlohy je $CU \perp p$. Uvažujme o uhle $\sphericalangle ACD$, vedľajšom k uhlu $\sphericalangle ACB$; jeho os $CM \perp CU$ (podľa vety **V**) je zrejme časťou priamky p. Pritom bod M leží vnútri polroviny CUA. Pretože je $\sphericalangle DCM = \sphericalangle MCA$, pričom tieto uhly ležia v opačných polrovinách vyťatých priamkou p, obraz A' bodu A v súmernosti s osou p padne dovnútra polpriamky CD. Z toho vyplýva konštrukcia.



Obr. 42.

Konštrukcia. Zostrojme obraz A' bodu A v súmernosti s osou p. Body A', B sú oddelené priamkou p; preto vnútri úsečky BA' leží bod C priamky p. Ak sú AC, BC rôzne priamky, je ABC hľadaný trojuholník.

Dôkaz. Priamka p obsahuje os CM uhla $\sphericalangle ACA'$. Podľa vety **V** je polpriamka $CU \perp p$ (bod U leží v polrovine pA) osou uhla $\sphericalangle ACB$, vedľajšieho k uhlu $\sphericalangle ACA'$. Tým je dôkaz hotový.

Diskusia. Pretože body $A \neq B$ ležia vnútri polroviny pA, sú body A', B oddelené priamkou p a bod C, ležiaci na priamkach p, $A'B$, existuje.

Uhol $\sphericalangle ACB$ existuje vtedy, keď sú priamky AC, BC navzájom rôzne, t. j. keď bod A neleží na priamke BA'. Ak leží bod A na priamke BA', potom polpriamky CA, CB splývajú a úloha nemá riešenie. Úloha má teda jediné riešenie, ak nie je $AB \perp p$; ak je $AB \perp p$, nemá riešenie.

Tým sme úlohu rozriešili.

3. Najděte (výpočtem) všechny různé dvojice přirozených čísel nejvýše dvojciferných, končících číslicí 6, jejichž součin končí dvojčíslím 36.

Řešení. Buď $A = 10a + 6$ hledané nejvýše dvojciferné číslo, při čemž je $0 \leqq a \leqq 9$ číslo celé. Dále buď $B = 10b + 6$ druhé takové číslo, přičemž je $0 \leqq b \leqq 9$ rovněž celé číslo. Součin čísel A, B je

$$AB = (10a + 6) \cdot (10b + 6)$$

neboli

$$AB = 100ab + 10 \cdot [6(a + b)] + 36$$

neboli

$$AB = 100ab + 10[6(a + b) + 3] + 6.$$

Jednotky čísla $6(a + b) + 3$ mají být rovny číslu 3 neboli jednotky čísla $6(a + b)$ jsou rovny nule neboli $6(a + b)$ je násobkem čísla 10, přičemž je

$$0 \leqq 6(a + b) \leqq 6(9 + 9),$$

tj.

$$0 \leqq 6(a + b) \leqq 108.$$

Z čísel 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, která přicházejí v úvahu jako čísla $6(a + b)$, jsou šesti dělitelna čísla:

$$0,\ 30,\ 60,\ 90.$$

Je tedy $a + b$ podíl některého z těchto čísel a čísla 6; je to některé z čísel:

$$0,\ 5,\ 10,\ 15.$$

Uvažujme případy (přitom jsou a, b celá čísla, o nichž platí $0 \leqq a \leqq 9$, $0 \leqq b \leqq 9$); lze bez újmy obecnosti předpokládat, že platí $a \leqq b$.

Případ [1]. Nechť $a + b = 0$, tj.

$$a = b = 0$$

a dvojice čísel $A = B = 6$ vyhovuje úloze, neboť $6 \cdot 6 = 36$.

Případ [2]. Nechť je $a + b = 5$. Možnosti podává tabulka:

a	0	1	2
b	5	4	3
A	6	16	26
B	56	46	36
AB	336	736	936

Dostáváme tedy dvojice 6, 56; 16, 46; 26, 36.

Případ [3]. Nechť je $a + b = 10$. Možnosti podává tabulka:

a	1	2	3	4	5
b	9	8	7	6	5
A	16	26	36	46	56
B	96	86	76	66	56
AB	1536	2236	2736	3036	3136

Dostáváme dvojice 16, 96; 26, 86; 36, 76; 46, 66; 56, 56.

Případ [4]. Nechť je $a + b = 15$. Možnosti podává tabulka:

a	6	7
b	9	8
A	66	76
B	96	86
AB	6336	6536

Dostáváme dvojice 66, 96; 76, 86.

Závěr. Je celkem 11 dvojic takových čísel.

4. Nech sú dané dva rôzne body S_1, S_2.

Zostrojte pravouhlý rovnoramenný trojuholník ABC s preponou AB tak, aby body S_1, S_2 boli dva zo stredov kružníc zvonku vpísaných tomuto trojuholníku.

Rozhodnite o riešiteľnosti úlohy.

Riešenie. Rozoznávajme dve možnosti: Kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$, $k_2 \equiv (S_2, r_2)$, zvonku vpísané trojuholníku ABC, [1] ležia v ostrých uhloch tohto trojuholníka; [2] majú tú vlastnosť, že jedna z nich leží v ostrom uhle, kdežto druhá leží v pravom uhle tohto trojuholníka.

Každý z prípadov budeme riešiť oddelene.

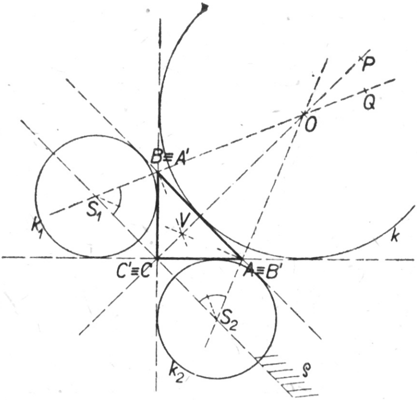
I. *Prípad* [1]. *Rozbor* (obr. 43). Nech k_1 leží v uhle $\alpha \equiv \sphericalangle CAB = 45°$ a k_2 v uhle $\beta \equiv \sphericalangle ABC = 45°$. Označme O stred kružnice k trojuholníku ABC zvonku vpísanej a ležiacej v uhle $\gamma \equiv \sphericalangle BCA$. Ďalej označme β' veľkosť vonkajšieho uhla trojuholníka ABC pri vrchole B; je $\beta' = 135°$. Pretože

BS_1 je osou vonkajšieho uhla pri vrchole B, je $\sphericalangle CBS_1 = \frac{1}{2}\beta'$, t. j.

$$\sphericalangle CBS_1 = 67\tfrac{1}{2}°. \tag{1}$$

Ďalej je CS_1 osou vonkajšieho uhla pri vrchole C a teda

$$\sphericalangle BCS_1 = 45°. \tag{1'}$$



Obr. 43.

Zo vzťahov (1), (1′) a zo súčtu uhlov v trojuholníku BCS_1 ľahko vypočítame, že

$$\sphericalangle OS_1S_2 = 67\tfrac{1}{2}°.$$

Pretože priamka CO je osou súmernosti trojuholníkov ABC, OS_1S_2, platí podobne

$$\sphericalangle OS_2S_1 = 67\tfrac{1}{2}°.$$

Podľa toho urobíme konštrukciu.

Konštrukcia (obr. 43). Označme ϱ, ϱ' obe opačné polroviny vyťaté priamkou S_1S_2. Konštrukciu urobíme tak, že hľadaný trojuholník ABC umiestime do polroviny ϱ, a to tak, že bod S_1 padne do uhla α a bod S_2 do uhla β. Stred úsečky S_1S_2 označme C a jej os CP, pričom P leží vnútri zvolenej polroviny ϱ. Ďalej zostrojíme v ϱ uhol $\sphericalangle QS_1S_2 = 67\frac{1}{2}°$ a označíme O spoločný bod polpriamok CP, S_1Q; tento bod podľa Euklidovho postulátu existuje a leží vnútri ϱ. Potom osi pravých uhlov $\sphericalangle OCS_1$, $\sphericalangle OCS_2$ (v tomto poradí) pretnú úsečky S_1O, S_2O v bodoch, ktoré označíme B, A (dokáže sa pomocou Euklidovho postulátu). Potom je ABC jeden z hľadaných trojuholníkov.

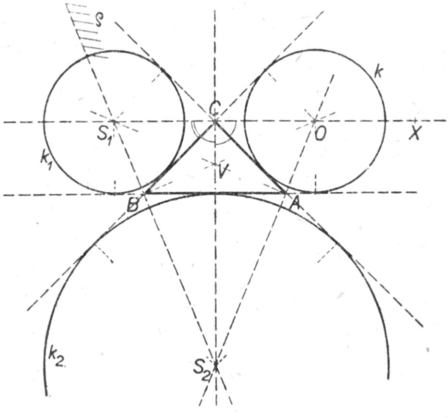
Dôkaz. Existenciu trojuholníka ABC sme už dokázali pri konštrukcii. Musíme dokázať, že body O, S_1, S_2 sú stredmi kružníc, tomuto trojuholníku zvonku vpísaných.

Podľa konštrukcie je $\sphericalangle BCA = 90°$ a zo súmernosti podľa priamky CO vyplýva, že trojuholník BCA je rovnoramenný, pričom CO je os uhla $\sphericalangle C$ a $CS_1 \perp CO$, $CS_2 \perp CO$ sú osi vonkajších uhlov pri vrchole C (podľa vety, že osi vedľajších uhlov stoja na seba kolmo). Ďalej je $\sphericalangle BS_1C = 67\frac{1}{2}°$ (podľa konštrukcie), $\sphericalangle BCS_1 = 45°$ (CS_1 je osou vonkajšieho uhla trojuholníka ABC pri C); z trojuholníka BCS_1 vyplýva, že $\sphericalangle CBS_1 = 180° - (\sphericalangle BS_1C + \sphericalangle BCS_1) = 67\frac{1}{2}°$, takže BS_1 je osou vonkajšieho uhla pri B v trojuholníku ABC (vonkajší uhol je totiž 135°). Zo súmernosti podľa priamky CO vyplýva, že AS_2 je osou vonkajšieho uhla pri C v trojuholníku ABC. Tým je dôkaz hotový.

Diskusia. Z konštrukcie vyplýva, že v polrovine ϱ možno zostrojiť práve jeden trojuholník ABC vyhovujúci úlohe, pričom S_1 leží v uhle α a S_2 v uhle β tohto trojuholníka. Ak zostrojíme trojuholník $A'B'C'$, kde $\sphericalangle C' = 90°$ a $A'C' = B'C'$, pričom S_1 leží v uhle $\sphericalangle B'$ a S_2 v uhle $\sphericalangle A'$, je zrejmé, že platí $A' \equiv B$, $B' \equiv A$, $C' \equiv C$, t. j. dospievame k tomu istému trojuholníku, len inak označenému. V súmernosti podľa osi S_1S_2 dostaneme druhý trojuholník $\triangle A_1B_1C_1 \cong \cong \triangle ABC$, ktorý je zrejme rôzny od ABC.

Záver prípadu [1]. Ak nehľadíme na zámenu označení vrcholov pri ostrých uhloch hľadaného trojuholníka, má úloha dve riešenia.

II. *Prípad* [2]. *Rozbor* (obr. 44). Nech kružnica k_1 leží v uhle $\alpha \equiv \sphericalangle CAB$ a kružnica k_2 leží v uhle $\gamma \equiv \sphericalangle BCA$



Obr. 44.

hľadaného trojuholníka ABC. Označme O stred kružnice k trojuholníku ABC zvonku vpísanej, a to tej, ktorá leží v uhle $\beta \equiv \sphericalangle ABC$. Ľahko zistíme, ako v prípade [1], že platí

$$\sphericalangle S_2S_1O = 67\tfrac{1}{2}^\circ,$$

pričom je $\sphericalangle S_1CS_2 = 90^\circ$ (osi vedľajších uhlov sú na seba kolmé). Podľa toho urobíme konštrukciu.

Konštrukcia (obr. 44). Označme ϱ jednu z polrovín vyťatých priamkou S_1S_2. Požadujme, aby hľadaný bod C padol do polroviny ϱ. Zostrojme v polrovine ϱ uhol $\sphericalangle S_2S_1X = 67\frac{1}{2}°$ a z bodu S_2 veďme k priamke S_1X kolmicu; jej päta C zrejme padne dovnútra polpriamky S_1X, lebo uhol $\sphericalangle S_2S_1X$ je ostrý. Ďalej zostrojme bod O tak, aby C bol stredom úsečky OS_1. V oboch pravých uhloch $\sphericalangle S_1CS_2$, $\sphericalangle OCS_2$ zostrojme ich osi CB, CA, kde B leží vnútri úsečky S_1S_2 a A vnútri úsečky OS_2. Potom trojuholník ABC vyhovuje úlohe.

Dôkaz. Trojuholník ABC, ktorý sme zostrojili, má podľa konštrukcie pri vrchole C pravý uhol. Podľa konštrukcie je priamka CS_2 jeho osou súmernosti, takže je $CA = CB$ a polpriamka CS_2 je osou uhla $\sphericalangle BCA$. Pretože je $S_1CO \perp CS_2$, sú CS_1, CO po rade osami vonkajších uhlov trojuholníka ABC pri vrchole C.

V trojuholníku BCS_1 je podľa konštrukcie $\sphericalangle S_1 = 67\frac{1}{2}°$, $\sphericalangle C = 45°$, takže $\sphericalangle CBS_1 = 67\frac{1}{2}°$ a polpriamky BS_1, BS_2 sú (v tomto poradí) osami vonkajších uhlov trojuholníka ABC pri vrchole B. Zo súmernosti trojuholníkov ABC, S_1OS_2 podľa osi CS_2 vyplýva, že polpriamky AO, AS_2 sú osami vonkajších uhlov trojuholníka ABC pri vrchole A. Tým je dôkaz hotový.

Diskusia. Z konštrukcie a urobeného dôkazu vyplýva, že vo zvolenej polrovine ϱ možno zostrojiť práve jeden trojuholník ABC, ktorý vyhovuje požiadavkám úlohy, pričom bod S_1 leží v uhle α a bod S_2 v uhle γ.

Označme p os úsečky S_1S_2 a označme $A'B'C'$ obraz trojuholníka ABC v súmernosti s osou p. Trojuholníky ABC, $A'B'C'$ zrejme nesplývajú (všimnime si napr. toho, že je $\sphericalangle CBS_1 = 67\frac{1}{2}°$, $\sphericalangle CBS_2 = 112\frac{1}{2}°$), ležia v polrovine ϱ a vyhovujú úlohe.

Ak zostrojíme v súmernosti s osou S_1S_2 obrazy oboch trojuholníkov ABC, $A'B'C'$, dostaneme v polrovine, opačnej k polrovine ϱ, ďalšie dva rôzne trojuholníky, ktoré vyhovujú úlohe. Tým sme zostrojili všetky trojuholníky, vyhovujúce úlohe, ktoré majú tú vlastnosť, že jeden z daných bodov

S_1, S_2 leží v pravom uhle takého trojuholníka. Pritom nehľadíme na možnú zámenu označenia bodov A, B.

Záver prípadu [2]. Úloha má práve 4 riešenia.

Záver riešenia danej úlohy. Úloha má 6 riešení (ak nehľadíme na možnú zámenu označení vrcholov ostrých uhlov hľadaného trojuholníka).

5. Buď dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a její tětiva AD, která není jejím průměrem. Dále buď dáno kladné číslo p.

Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ s ramenem AD, který je dané kružnici k vepsán a jehož střední příčka MN má velikost p.

Proveďte diskusi řešitelnosti.

Řešení. *Rozbor* (viz obr. 45). Předpokládejme, že jsme sestrojili lichoběžník $ABCD$, který splňuje požadavky úlohy. Jeho osa q souměrnosti je osou základen AB, DC a střední příčky $MN = p$, kde M, N jsou pořadě středy ramen AD, BC. Přitom přímka MN není průměrem kružnice, neboť jinak by $ABCD$ byl obdélník. Proto musí existovat trojúhelník SMN, v němž $MN = p$ a $SM = SN = v$, a tudíž je $S \not\equiv M$. O vzdálenosti v bodu S od přímky AD zřejmě platí

$$r > v > 0. \tag{1}$$

Aby trojúhelník SMN existoval, musí platit trojúhelníková nerovnost $MN < SM + SN$ neboli

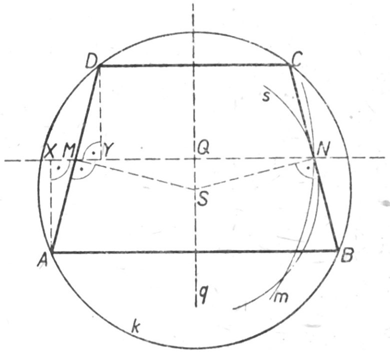
$$2v > p. \tag{2}$$

Nyní provedeme konstrukci.

Konstrukce (obr. 45). V polorovině SMD sestrojme rovnoramenný trojúhelník SMN, kde $MN = p$, $SN = SM = v$; bod N se sestrojí jako průsečík kružnic $m \equiv (M, p)$, $s \equiv (S, SM)$. Označme Q střed a q osu úsečky MN. Označme

B, C pořadě obrazy bodů A, D v souměrnosti podle osy q. Jestliže body A, D leží uvnitř téže poloroviny vyťaté přímkou q, potom je $ABCD$ jedním řešením úlohy.

Důkaz. Takto sestrojený čtyřúhelník $ABCD$ je lichoběžník, neboť je $AB \perp q$, $DC \perp q$ a tedy $AB \parallel DC$; přitom přímky $AD \perp SM$, $BC \perp SN$ jsou různoběžné (podle věty: Obě kolmice k různoběžkám SM, SN jsou rovněž různoběžné — viz Geometrie pro 7. roč., str. 134/289). Přitom je podle konstrukce $MN = p$ a body B, C leží na kružnici k, neboť kružnice k obsahuje body A, D a v souměrnosti podle osy q přechází sama v sebe. Tím je důkaz proveden.



Obr. 45.

Diskuse. Možnost sestrojení lichoběžníka $ABCD$, jak bylo v konstrukci popsáno - vzhledem k tomu, že vztah (1) je splněn zadáním úlohy - závisí na dvou okolnostech:

[1] Na existenci trojúhelníka SMN, tj. na tom, aby platil vztah (2); platnost tohoto vztahu postačí k tomu, aby se trojúhelník SMN dal sestrojit (viz Geometrie pro 7. tř., str. 106/261). Tím je zajištěno, že $ABCD$ není obdélník (případ nastane pro $p = 2v$).

[2] Na požadavku, aby oba body A, D padly dovnitř poloroviny qA. Jinak $ABCD$ není lichoběžník (je to trojúhelník v případě, že je $C \equiv D$, nebo AD, BC jsou úhlopříčkami lichoběžníka $ABCD$).*)

*) *Poznámka.* Požadavek [2] lze vyjádřit omezením čísla p pomocí čísel r, v, $d = SQ$, $t = MA = MD$ v podstatě úlohou daných.

Přitom je

$$r^2 = v^2 + t^2, \tag{3}$$

$$0 < v < r, \tag{1}$$

$$d^2 = v^2 - (\tfrac{1}{2}p)^2, \tag{4}$$

jak plyne z trojúhelníků SAM (kde $\sphericalangle M = 90°$), SMQ (kde $\sphericalangle Q = 90°$).

Jsou-li oba požadavky splněny, pak $ABCD$ je lichoběžník. Druhé řešení dostaneme, sestrojíme-li obraz $A'B'C'D'$ lichoběžníka $ABCD$ v souměrnosti podle osy SM; tu je $A' \equiv D$, $D' \equiv A$. Protože osa SM úsečky AD není osou úsečky BC [jinak by bylo $AD \parallel BC$, neboli $SM \parallel SN$, čemuž tak není vzhledem ke (2)], jsou oba lichoběžníky různé a úloha má dvě řešení.

V případě volby průsečíku N kružnic m, s uvnitř poloroviny SMD padne pata X kolmice $AX \perp MN$ na prodloužení úsečky MN za bod M, ale pata Y kolmice $DY \perp MN$ padne dovnitř polopřímky MN. Aby bod D padl dovnitř poloroviny qA, je nutné a stačí, aby bod Y padl dovnitř úsečky MQ, tj. aby platilo $MY < MQ$ neboli

$$MY < \frac{p}{2}. \tag{5}$$

Snadno usoudíme, že platí

$$\triangle SMQ \sim \triangle MDY \; (uuu),$$

neboť je $\sphericalangle SQM = \sphericalangle MYD = 90°$, $\sphericalangle SMQ + \sphericalangle QMD = 90°$. Je proto

$$\frac{MY}{MD} = \frac{SQ}{SM},$$

neboli vzhledem k zavedeným označením

$$MY = \frac{dt}{v}.$$

Po dosazení do (5) obdržíme

$$\frac{dt}{v} < \frac{p}{2};$$

po umocnění obou stran této nerovnosti na druhou (jedná se vesměs o kladná čísla) a dosazení ze vztahu (4) dostaneme postupně

$$4\left(v^2 - \frac{p^2}{4}\right)t^2 < p^2 v^2,$$

$$4\,v^2t^2 < p^2\,(v^2 + t^2),$$

$$\frac{2\,vt}{\sqrt{v^2 + t^2}} < p\,. \tag{6}$$

Platí-li obráceně vztah (6), platí i (5) a při volbě bodu N uvnitř poloroviny SMD padne bod Y a s ním i bod D dovnitř poloroviny qA.

Vztahy (2) a (6) vyjadřují podmínky řešitelnosti [vedle vztahu (1) daného již textem].

6. Jedno z přirozených čísel, které bezprostředně předchází nebo které bezprostředně následuje za prvočíslem větším než číslo 3, je nutně dělitelné šesti. Dokažte.

Na základě toho ukažte, že každé prvočíslo větší než 3 se dá psát buď ve tvaru $6k + 1$ anebo ve tvaru $6k - 1$, kde k je přirozené číslo.

Řešení. Prvočíslo $p > 3$ je vždy liché. Tři bezprostředně po sobě následující celá čísla

$$p - 1,\ p,\ p + 1$$

mají tyto vlastnosti:

a) $p - 1$, $p + 1$ jsou čísla sudá,

b) jedno z čísel $p - 1$, $p + 1$ je dělitelné třemi.

Důkaz tvrzení a) je zřejmý.

Důkaz tvrzení b). Číslo p je prvočíslo; dělíme-li je číslem 3 (částečný podíl počítáme na jednotky), dostaneme zbytek dělení rovný buď 1 nebo 2 (číslo 0 nedostaneme, jinak by číslo p bylo dělitelné třemi). Je tedy $p = 3m + 1$ nebo $p = 3m + 2$, kde m je přirozené číslo.

α) Nechť je $p = 3m + 1$. Potom je $p - 1 = 3m$, tj. $p - 1$ je dělitelné třemi.

β) Nechť je $p = 3m + 2$. Potom je $p + 1 = 3m + 2 + 1 = 3(m + 1)$, tj. $p + 1$ je dělitelné třemi.

Tím je důkaz tvrzení b) proveden.

Je tedy buď $p - 1$ sudé a dělitelné třemi nebo je $p + 1$ sudé a dělitelné třemi. Číslo sudé a dělitelné třemi je dělitelné i šesti. Je tedy jedno z čísel $p - 1$, $p + 1$ dělitelné šesti, tj. platí buď

$$p - 1 = 6r, \tag{1}$$

kde r je číslo celé, nebo je

$$p + 1 = 6s, \tag{2}$$

kde s je číslo celé.

Z (1), (2) dostaneme pořadě

$$p = 6r + 1, \tag{1'}$$

$$p = 6s - 1. \tag{2'}$$

Ze vztahů (1), (2) podle provedené úvahy platí vždy právě jeden; proto také platí právě jeden ze vztahů (1'), (2'), tj. každé prvočíslo $p > 3$ lze napsat buď ve tvaru (1') nebo ve tvaru (2'), ne však oběma způsoby současně.

Tím je řešení úlohy provedeno.

7. V rovině buďte dány dvě kolmice p, $k \equiv OA$ o společném bodu O; na prodloužení úsečky OA za bod A buď dále dán bod B.

Na přímce p sestrojte bod $X \not\equiv O$, který přímku p dělí ve dvě opačné polopřímky XO, XP, přičemž platí

$$\sphericalangle PXB = 2 \cdot \sphericalangle OXA.$$

Proveďte diskusi řešitelnosti.

Řešení (obr. 46). *Rozbor*. Označme $X \not\equiv O$ bod přímky p, který vyhovuje úloze, a ϱ polorovinu, která je vyťata přímkou k a uvnitř které leží bod X. Označme XY osu úhlu $\sphericalangle BXP$, který je dutý, takže úhel $\sphericalangle YXP$ je ostrý. Dále označme XY' polopřímku opačnou k polopřímce XY, takže

$$\sphericalangle OXY' = \sphericalangle PXY \qquad (*)$$

(úhly vrcholové), tj. $\sphericalangle OXY' < \mathrm{R}$; proto podle Eukleidova postulátu mají přímka k a polopřímka XY' společný bod A' uvnitř poloroviny σ', opačné k polorovině $\sigma \equiv pA$. Protože X je bod vyhovující úloze, podle požadavku úlohy platí $\sphericalangle OXA = \frac{1}{2} \sphericalangle PXB = \sphericalangle PXY$ a tedy vzhledem k (*) dostaneme (polopřímky XY', XA' splývají)

$$\sphericalangle OXA = \sphericalangle OXA',$$

takže trojúhelník XAA' je rovnoramenný o základně AA'; protože je $p \perp k$, platí

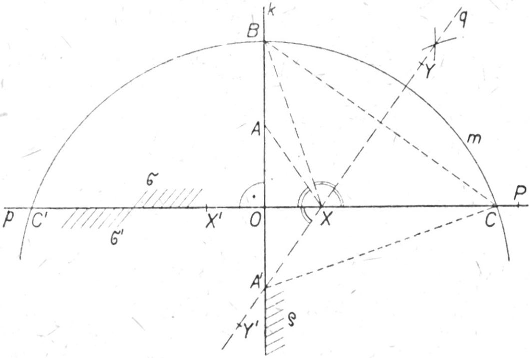
$$OA' = OA.$$

Uvažujme souměrnost o ose $q \equiv A'XY$; v ní jsou A', X, Y samodružné body a dále $\sphericalangle BXY$, $\sphericalangle PXY$ souměrně sdružené úhly, přičemž bodu B přísluší jako obraz bod C polopřímky XP a tudíž úsečce $A'B$ úsečka $A'C = A'B$; leží tedy body B, C na kružnici $m \equiv (A', A'B)$. Na základě toho provedeme konstrukci.

Konstrukce (obr. 46). Sestrojme obraz A' bodu A v souměrnosti podle osy p, takže je

$$OA = OA'.$$

Dále sestrojme kružnici $m \equiv (A', A'B)$ a označme C jeden ze společných bodů kružnice m a přímky p. Pak sestrojme osu q



Obr. 46.

úsečky BC a označme X společný bod přímek p, q. Potom X je jedním z bodů, které vyhovují úloze.

Důkaz. Body A, A' jsou souměrně sdruženy podle osy p; proto je

$$\sphericalangle OXA = \sphericalangle OXA'. \tag{1}$$

Podle konstrukce jsou B, C body souměrně sdružené v souměrnosti podle osy q a tudíž je

$$\sphericalangle BXY = \sphericalangle CXY = \tfrac{1}{2} \cdot \sphericalangle BXC \tag{2}$$

kde Y je bod přímky q, který leží uvnitř úhlu $\sphericalangle BXC$. Dále platí

$$\sphericalangle OXA' = \sphericalangle CXY \text{ (vrcholové úhly).} \tag{3}$$

Pořadě ze vztahů (3), (1) a (2) dostaneme

$$\sphericalangle\, OXA = \tfrac{1}{2} \cdot \sphericalangle\, BXC\,.$$

Tím je důkaz proveden.

Diskuse. Bod A leží mimo přímku p a proto jsou body A, A' a tím i body B, A' odděleny přímkou p, takže platí $A' \not\equiv B$ a

$$A'B > A'O,$$

kde $A'B$ je poloměr kružnice m a $A'O$ je vzdálenost středu A' kružnice m od přímky p. Proto je p sečnou kružnice m; jejich průsečíky označme $C \not\equiv C'$. Ze souměrnosti bodů C, C' podle přímky k plyne, že se při dalším vyšetřování můžeme omezit na bod C. Další vyšetřování se tedy týká poloroviny kC. Protože je $A'BC$ rovnoramenný trojúhelník o základně BC a o ose q souměrnosti, je úhel $\sphericalangle\, BA'C$ dutý a jeho polovina, tj. úhel $\sphericalangle\, BA'Y$ neboli $\sphericalangle\, OA'Y$ (kde Y je bod ležící na q a uvnitř úhlu $\sphericalangle\, BA'C$) je úhel ostrý. Proto je

$$\sphericalangle\, A'OC + \sphericalangle\, OA'Y < 2\mathrm{R}$$

a podle Eukleidova postulátu mají polopřímky OC, $A'Y$ uvnitř poloroviny kC společný bod X. Existuje tedy v polorovině kC právě jedno řešení.

Druhé řešení dostaneme, když k bodu X sestrojíme obraz X' v souměrnosti o ose k.

Úloha má tedy dvě řešení.*)

8. Součástka tvaru rotačního válce se původně vyráběla tak, že měla poloměr r a výšku v. Nyní se vyrábí s poloměrem o p procent menším a s výškou o p procent větší než původně.

a) Kolik procent z objemu součástky původní tvoří objem součástky nově vyráběné?

---

*) Jiná řešení najdete v článku *Fr. Živného* na str. 144 časopisu *Matematika ve škole*, ročník 1957.

b) Dokažte, že objem nově vyráběné součástky se zmenšil více než o p procent objemu součástky původně vyráběné.

Řešení. Označme V objem původní součástky a V' objem nově vyráběné součástky. Platí

$$V = \pi r^2 v, \tag{1}$$

$$V' = \pi \left(r - \frac{rp}{100}\right)^2 \cdot \left(v + \frac{vp}{100}\right);$$

úpravami postupně dostaneme

$$V' = \pi r^2 \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 \cdot v \left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

$$V' = \pi r^2 v \cdot \frac{(100 - p)^2}{100^2} \cdot \frac{100 + p}{100},$$

$$V' = \pi r^2 v \cdot \frac{(100 - p)^2 (100 + p)}{100^3}. \tag{2}$$

a) Objem V' je x % původního objemu V. Platí

$$x = \frac{V'}{V} \cdot 100 \text{ neboli } x = 100 \cdot \frac{V'}{V}.$$

Dosaďme sem z (1), (2); dostaneme

$$x = \left(100 \cdot \pi r^2 v \cdot \frac{(100 - p)^2 (100 + p)}{100^3}\right) : \pi r^2 v.$$

Po úpravě obdržíme

$$x = \frac{(100 - p)^2 (100 + p)}{100^2}. \tag{3}$$

Tím je řešení úlohy a) provedeno.

b) Objem V' je x procent původního objemu V, který je základem, jemuž odpovídá 100 %. Hledaný rozdíl y příslušných počtů procent je

$$y = 100 - x;$$

po dosazení ze (3) postupně dostaneme

$$y = 100 - \frac{(100 - p)^2 (100 + p)}{100^2} =$$

$$= \frac{100^3 - (100 - p)(100 - p)(100 + p)}{100^2} =$$

$$= \frac{100^3 - (100 - p)(100^2 - p^2)}{100^2} =$$

$$= \frac{100^3 - (100^3 - 100^2 p - 100 p^2 + p^3)}{100^2} =$$

$$= \frac{100^2 p + 100 p^2 - p^3}{100^2} = \frac{100^2 p}{100^2} + \frac{100 p^2 - p^3}{100^2} =$$

$$= p + \frac{p^2 (100 - p)}{100^2}.$$

Je tedy

$$y = p + \frac{p^2 (100 - p)}{100^2}. \qquad (4)$$

Podle textu úlohy však o čísle p nutně platí

$$0 < p < 100,$$

takže je $100 - p > 0$. Proto je čitatel zlomku na pravé straně vztahu (4) číslo kladné a tím i tento zlomek je kladný, tj. platí

$$y > p.$$

Objem V' se tedy zmenšil víc než o p procent objemu V, což právě jsme měli dokázat.

Tím je řešení úlohy b) a tedy celého příkladu provedeno.

9. Nech je daná rovnica

$$\frac{2x + p^2}{p + 3} + \frac{2x - p^2}{p - 3} = \frac{(p^2 + 4)x}{p^2 - 9}, \tag{1}$$

v ktorej x je neznáma a p je dané reálne číslo.

a) Riešte danú rovnicu a zistite všetky čísla p, pre ktoré daná rovnica nemá riešenie.

b) Vypočítajte to číslo p, pri ktorom daná rovnica má koreň $x = -6$.

Riešenie. a) Daná rovnica (1) nemá riešenie pre $p = \pm 3$. Nech je naďalej $p \neq \pm 3$ a nech x je riešením rovnice. Znásobme obe jej strany číslom $p^2 - 9 \neq 0$. Postupne dostaneme rovnice, ekvivalentné s rovnicou (1):

$$(2x + p^2)(p - 3) + (2x - p^2)(p + 3) = (p^2 + 4)x,$$
$$x(2p - 6 + 2p + 6 - p^2 - 4) =$$
$$= -p^2(p - 3) + p^2(p + 3),$$
$$-x(p^2 - 4p + 4) = 6p^2,$$
$$x(p - 2)^2 = -6p^2. \tag{2}$$

Teraz rozoznávajme dve možnosti: [1] Nech je $p - 2 \neq 0$; [2] nech je $p - 2 = 0$.

Prípad [1]. Nech je $p - 2 \neq 0$, t. j. $p \neq 2$. Obe strany rovnice (2) znásobme číslom $\frac{1}{(p-2)^2} \neq 0$; dostaneme

$$x = -\frac{6p^2}{(p - 2)^2}, \tag{3}$$

čo je (za predpokladu $p \neq 2$) ekvivalentný vzťah s (2). Rovnica (1) má teda pre p rôzne od čísel $-3, 2, 3$ práve jedno riešenie (3).

Prípad [2]. Nech je $p - 2 = 0$, t. j. $p = 2$. Pretože je $-6p^2 = -24 \neq 0$, nemá rovnica (2) riešenie a tým ani rovnica (1) nemá riešenie.

Tým sme úlohu a) rozriešili.

Prehľad o riešení rovnice (1):

Parametr p	Riešenie
$-3, 3$	Rovnica nemá riešenie
2	Rovnica nemá riešenie
$p < -3$ $-3 < p < 2$ $2 < p < 3$ $3 < p$	Rovnica má jediné riešenie $x = -\dfrac{6p^2}{(p-2)^2}$

Poznámka. Je zaujímavé všimnúť si rovnice (1) pre $p = 2$. Z (1) dostaneme postupne

$$\frac{2x+4}{5} + \frac{2x-4}{-1} = \frac{(4+4)x}{4-9},$$

$$\frac{2x+4}{5} - (2x-4) = \frac{8x}{-5},$$

$$\frac{2x+4-(10x-20)}{5} = -\frac{8x}{5},$$

$$-\frac{8x}{5} + \frac{24}{5} = -\frac{8x}{5}.$$

Z posledného tvaru rovnice je opäť vidieť, že nemá riešenie.

b) Máme nájsť také číslo p, aby rovnica (1) mala koreň $x = -6$. Ak má úloha riešenie, musí podľa výsledku (3) platiť

$$-\frac{6p^2}{(p-2)^2} = -6,$$

čiže

$$p^2 = (p-2)^2.$$

Z toho dostávame postupne

$$p^2 = p^2 - 4p - 4,$$

$$p = 1.$$

Ak má úloha riešenie, musí byť $p = 1$. Avšak pre $p = 1$ je podľa (3)

$$x = -\frac{6}{(1-2)^2},$$

čiže

$$x = -6.$$

Rovnica (1) má koreň $x = -6$ iba pre parameter $p = 1$.

Poznámka. Rovnica (1) má v prípade $p = 1$ tvar

$$\frac{2x+1}{4} - \frac{2x-1}{2} = \frac{5x}{-8};$$

pre $x = -6$ ľavá strana L je

$$L = -\frac{11}{4} + \frac{13}{2} = \frac{-11+26}{4} = \frac{15}{4},$$

pravá strana P je

$$P = \frac{-30}{-8} = \frac{15}{4},$$

teda $L = P$, takže $x = -6$ je koreňom danej rovnice.

10. Zostrojte trojuholník ABC, ak je daný uhol γ, ťažnica t_c a rozdiel $a - b \geqq 0$ jeho strán. Urobte diskusiu o riešiteľnosti úlohy.

[Pokyn. Na riešenie môžete použiť rovnobežník $ACBD$.]

Riešenie (obr. 47, 48). Rozoznávajme dva prípady:

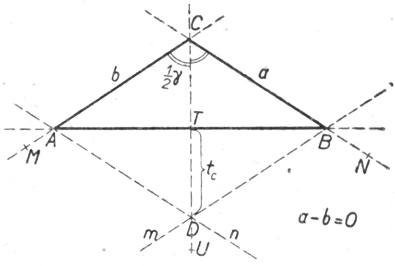
[1] Nech je $a - b = 0$ (trojuholník ABC je rovnoramenný s hlavným vrcholom C); pre tento prípad riešenie len stručne naznačíme.

[2] Nech je $a - b > 0$.

Prípad [1]. *Rozbor.* Z obr. 47 vidieť, že ak doplníme trojuholník ABC na rovnobežník $ACBD$, dostaneme kosoštvorec (v zvláštnom prípade štvorec), lebo rovnobežník, v ktorom uhlopriečka rozpoľuje uhol rovnobežníka pri tom vrchole, z ktorého vychádza, je kosoštvorec.

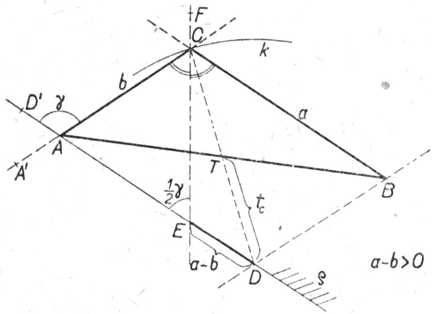
Z toho vyplýva *konštrukcia* (obr. 47). Zostrojíme uhol $\sphericalangle MCN = \gamma$ a jeho os CU. Na osi CU zostrojíme úsečku $CD = 2t_c$. Bodom D vedieme po rade priamky $m \parallel CM$, $n \parallel CN$. Tieto štyri priamky určujú rovnobežník $ACBD$, kde $A \equiv n \cdot CM$, $B \equiv m \cdot CN$. Potom ABC je hľadaný trojuholník, a to rovnoramenný, ako vyplýva z toho, že $ACBD$ je kosoštvorec so stredom T, pričom je CT osou uhla $\sphericalangle BCA$ a platí $CT = \frac{1}{2} \cdot CD = t_c$. Úloha má zrejme jediné riešenie, pokiaľ je daný uhol γ dutý.

Prípad [2]. Nech je $a - b > 0$, t. j. $a > b$ (obr. 48). *Rozbor.* Predpokladajme, že sme zostrojili trojuholník ABC, v ktorom je $BC - AC = a - b$, $\sphericalangle BCA = \gamma$ a ťažnica $CT = t_c$. Položme $BC = a$, $AC = b$, teda je $BC > AC$. Zostroj-



Obr. 47.

me rovnobežník $ACBD$, takže je $CD = 2t_c$ a T je jeho stredom. Na polpriamke AD zostrojme bod E tak, aby bolo $AE = b$; pretože je $a > b$, $AD = CB = a$, padne bod E dovnútra úsečky AD a trojuholník ACE je rovnoramenný ($AC = AE = b$). Stanovme veľkosť uhlov pri základni CE trojuholníka ACE. Nech AD, AD' sú opačné polpriamky, pričom je $CB \parallel AD'$, takže uhly $\sphericalangle BCA$, $\sphericalangle CAD'$ sú striedavé a zhodné, tj.



Obr. 48.

$\sphericalangle CAD' = \gamma$. Tento uhol je vonkajším uhlom v rovnoramennom trojuholníku ACE a teda každý z uhlov pri základni CE tohto trojuholníka je $\frac{1}{2}\gamma$, t. j. platí

$$\sphericalangle AEC = \sphericalangle ACE = \tfrac{1}{2}\gamma .$$

Tento uhol je teda polovicou dutého uhla γ a preto je ostrý, takže uhol $\sphericalangle CED$, k nemu vedľajší, je tupý. V trojuholníku CED teda poznáme dva strany $ED = a - b$, $CD = 2t_c$, $\sphericalangle CED = 2\,\mathrm{R} - \frac{1}{2}\gamma$, tj. dve strany a tupý uhol proti jednej z nich, takže musí platiť $CD < ED$, tj.

$$2t_c > a - b. \tag{1}$$

Konštrukcia (obr. 48). Zostrojme úsečku $ED = a - b$, kde $a - b > 0$ je dané číslo. Zvoľme polrovinu ϱ vyťatú priamkou ED a zostrojme v nej uhol $\sphericalangle DEF = 2\,\mathrm{R} - \frac{1}{2}\gamma$; označme ED' polpriamku, opačnú k polpriamke ED. Ďalej opíšme kružnicu $k \equiv (D, 2t_c)$ a označme C spoločný bod kružnice k a polpriamky EF. Ďalej v polrovine, opačnej k polrovine CED, zostrojme uhol $\sphericalangle ECA' = \frac{1}{2}\gamma$. Označme A spoločný bod polpriamok ED', CA'. Nakoniec zostrojme rovnobežník $DACB$. Potom trojuholník ABC je jediné riešenie v zvolenej polrovine ϱ.

Dôkaz. Označme T stred rovnobežníka $DACB$. Pretože sa uhlopriečky rovnobežníka navzájom rozpoľujú, je $TA = TB$; CT je teda ťažnicou trojuholníka ABC a podľa konštrukcie bodu C platí $CT = \frac{1}{2} \cdot CD = t_c$. Ďalej je podľa konštrukcie

$$\tfrac{1}{2}\gamma = \sphericalangle D'EC = \sphericalangle A'CE, \tag{2}$$

čiže

$$\sphericalangle AEC = \sphericalangle ACE = \tfrac{1}{2}\gamma, \tag{2'}$$

t. j.

$$AE = AC. \tag{3}$$

Z rovnobežníka $DACB$ vyplýva

$$AD = BC. \tag{4}$$

Podľa konštrukcie leží bod A na predĺžení úsečky DE za bod E a vzhľadom na (4) a (3) platí

$$ED = AD - AE = BC - AC$$

a pretože podľa konštrukcie $ED = a - b$, platí skutočne

$$BC - AC = a - b.$$

Pretože je $AD \parallel CB$, platí

$$\sphericalangle AEC = \sphericalangle ECB \text{ (striedavé uhly)}$$

a porovnaním so vzťahom (2′) vyplýva z toho

$$\sphericalangle AEC = \sphericalangle ECB = \tfrac{1}{2}\gamma .$$

Tieto uhly sú zrejme styčné, takže platí

$$\sphericalangle BCA = \gamma.$$

Tým sme dokázali, že zostrojený trojuholník vyhovuje všetkým požiadavkám, vysloveným v texte úlohy.

Diskusia. Dokážeme, že pri zvolenom umiestení úsečky $ED = a - b$ a pri zvolenej polrovine ϱ možno zostrojiť práve jeden trojuholník ABC, ktorý vyhovuje úlohe, a to za týchto predpokladov:

1. Platí $a - b > 0$; 2. uhol γ je dutý; 3. platí $2t_c > a - b$ [táto požiadavka nám vyplynula ako nutná podmienka pri rozbore — pozri vzťah (1)].

Podľa vety *Ssu* možno zostrojiť (ak nehľadíme na umiestenie) práve jeden trojuholník CDE z dvoch strán $ED = a - b$, $DC = 2\, t_c$ a z tupého uhla $\sphericalangle DEC = 2\mathrm{R} - \tfrac{1}{2}\gamma$ (lebo $\tfrac{1}{2}\gamma < \mathrm{R}$). Práve z faktu, že uhol $\sphericalangle DEC$ je tupý, vyplýva požiadavka $2\, t_c > a - b$. Týmito požiadavkami je zaistená existencia bodu C.

Zo vzťahov (2) a z faktu, že je $\tfrac{1}{2}\gamma < \mathrm{R}$, vyplýva, že $\sphericalangle D'EC + \sphericalangle A'CE < 2\,\mathrm{R}$. Pretože podľa Euklidovho postulátu majú polpriamky ED', CA' vnútri polroviny, opačnej k polrovine CED, spoločný bod A, tým je zaistená existencia bodu A. Pretože body D, C, A zrejme neležia v priamke, existuje trojuholník DAC a tým aj rovnobežník $DACB$ a teda aj bod B.

Tým je tvrdenie, vyslovené na začiatku diskusie, dokázané a úloha rozriešená.

11. Riešte rovnicu

$$\frac{x-\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}+\frac{x-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}=2.$$

Výsledok vyjadrite tak, aby v menovateli nebola odmocnina.

Řešení. Provedeme ekvivalentní úpravy rovnice (1). Znásobme obě její strany číslem $(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{2})$; postupně pak obdržíme

$$(x-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})+(x-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=$$
$$=2(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}),$$
$$x(2+\sqrt{2}+\sqrt{3})-(\sqrt{2}+2+\sqrt{3}+3)=$$
$$=2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}),$$
$$x(2+\sqrt{2}+\sqrt{3})=7+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{6}$$

a protože je $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}>0$, dostaneme

$$x=\frac{(7+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{6})}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Zlomek na pravé straně v poslední rovnosti rozšiřme číslem $2+\sqrt{2}-\sqrt{3}\neq 0$; dostaneme

$$x=\frac{(7+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{6})\cdot(2+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{2})^2-3}. \tag{2}$$

Označme M čitatele posledního zlomku a proveďme v něm naznačené výkony; dostaneme

$$M=14+6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+4\sqrt{6}+7\sqrt{2}+6+3\sqrt{6}+$$
$$+4\sqrt{3}-7\sqrt{3}-3\sqrt{6}-9-6\sqrt{2}=$$
$$=11+7\sqrt{2}+3\sqrt{3}+4\sqrt{6}.$$

Jmenovatel N zlomku (2) je $N = 4 + 4\sqrt{2} + 2 - 3 = 3 + 4\sqrt{2}$. Tím ze vztahu (2) obdržíme

$$x = \frac{11 + 7\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{3 + 4\sqrt{2}} \tag{3}$$

a po rozšíření zlomku na pravé straně číslem $3 - 4\sqrt{2}$ pro čitatele M' a pro jmenovatele N' tohoto zlomku dostáváme:

$$M' = (11 + 7\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 4\sqrt{6})(3 - 4\sqrt{2}) =$$
$$= 33 + 21\sqrt{2} + 9\sqrt{3} + 12\sqrt{6} - 44\sqrt{2} - 56 - 12\sqrt{6} -$$
$$-32\sqrt{3} = -23 - 23\sqrt{2} - 23\sqrt{3} = -23(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}),$$
$$N' = (3 + 4\sqrt{2})(3 - 4\sqrt{2}) = 3^2 - (4\sqrt{2})^2 = 9 - 16 \cdot 2 =$$
$$= -23.$$

Po dosazení do výsledku (3) dostaneme

$$x = \frac{-23(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{-23}$$

neboli

$$x = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}. \tag{4}$$

Protože prováděné úpravy rovnice (1) byly ekvivalentní, musí být číslo ve vztahu (4) kořenem rovnice (1). Tím je řešení provedeno.

Jiné řešení. Položme

$$\frac{x - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} = u, \tag{1}$$

$$\frac{x - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2}} = v, \tag{2}$$

takže danou rovnici lze psát

$$u + v = 2. \tag{3}$$

Ze vztahu (1) dostaneme

$$x = u(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{2}, \tag{4}$$

ze vztahu (2) pak

$$x = v(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{3}; \tag{5}$$

ze vztahu (3) plyne

$$v = 2 - u. \tag{6}$$

Porovnejme pravé strany vztahů (4), (5) a dosaďme hned ze vztahu (6) za v; obdržíme

$$u(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{2} = (2 - u)(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{3}.$$

Odtud postupně dostaneme

$$u(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Protože je $2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \neq 0$, plyne z poslední rovnice

$$u = 1.$$

Po dosazení tohoto výsledku do vztahu (1) obdržíme

$$\frac{x - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} = 1$$

neboli

$$x = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}. \tag{7}$$

Jestliže tedy daná rovnice má kořen x, potom je to nutně číslo dané vztahem (7). Toto číslo skutečně vyhovuje dané rovnici, jak se snadno přesvědčíme dosazením.

Podle řešení s. Vlasty Uhrové,
žákyně 9. tř., jsš, Lanškroun.

Jiné řešení. Přičtěme ke každé z obou stran dané rovnice číslo -2, a to vhodně zapsané; obdržíme postupně

$$\frac{x-\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} - \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \frac{x-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}} - \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 0,$$

$$\frac{x-(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}} + \frac{x-(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{1+\sqrt{2}} = 0,$$

$$[x-(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})]\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Druhý činitel na levé straně předchozí rovnice je zřejmě kladné číslo a proto z této rovnice plyne

$$x-(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0$$

neboli

$$x = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\,.$$

Zkouškou se snadno přesvědčíme, že právě vypočítané číslo x je skutečně kořenem dané rovnice.

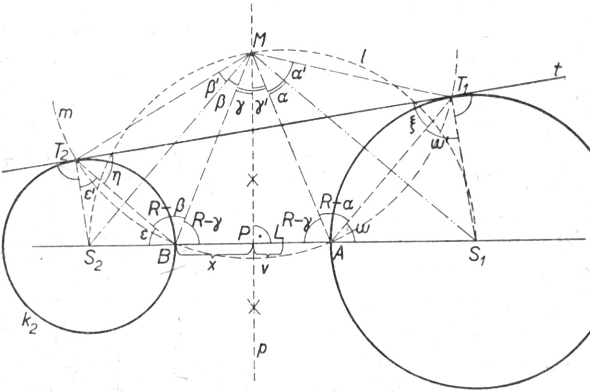
Podle řešení s. Petra Fesenko,
žáka 9.a tř., jsš, Chrudim.

12. Buďte dány dvě kružnice $k_1 \equiv (S_1, r_1)$, $k_2 \equiv (S_2, r_2)$, které leží vně sebe. Označme A, B společné body úsečky S_1S_2 pořadě s kružnicemi k_1, k_2. Proveďme tuto konstrukci: Sestrojme kružnici l nad úsečkou S_1S_2 jako průměrem a označme M jeden z průsečíků kružnice l s osou p úsečky AB. Dále označme $T_1 \not\equiv A$, $T_2 \not\equiv B$ společné body kružnice $m \equiv$ $\equiv (M, MA)$ pořadě s kružnicemi k_1, k_2.

Dokažte, že přímka T_1T_2 je společnou vnější tečnou obou kružnic k_1, k_2.

Řešení (obr. 49). Označme P střed úsečky AB. Body na přímce S_1S_2 leží v pořádku S_1, A, P, B, S_2, neboť kružnice k_1, k_2 leží vně sebe; protože p je osa úsečky AB, odděluje obě kružnice k_1, k_2. Proto existuje trojúhelník AMP, v němž je $\sphericalangle P = 90°$. Kružnice $l \equiv (L, \frac{1}{2}S_1S_2)$ je Thaletova a proto je

$$\sphericalangle S_1MS_2 = 90°. \tag{1}$$



Obr. 49.

Kružnice k_1, $m \equiv (M, MA)$ mají střednou S_1M a jejich společný bod A leží mimo jejich osu S_1M souměrnosti; proto mají další společný bod $T_1 \not\equiv A$.

Protože bod M leží vně kružnice k_1, existuje rovnoramenný trojúhelník MAT_1 o hlavním vrcholu M. Trojúhelníky AMP, MAT_1 leží v polorovině pS_1; podobně v opačné polorovině pS_2 leží trojúhelníky BMP (kde $\sphericalangle P = 90°$), MBT_2 (kde $MB = MT_2$). Body T_1, T_2 jsou rovněž odděleny přímkou p.

Zaveďme nyní označení úhlů jako v obrázku; přitom je AT_1T_2B tětivový čtyřúhelník. O zavedených úhlech platí:

$$\alpha = \alpha', \omega = \omega' \text{ (souměrnost podle osy } MS_1\text{)},$$
$$\beta = \beta', \varepsilon = \varepsilon' \text{ (souměrnost podle osy } MS_2\text{)},$$
$$\gamma = \gamma' \text{ (souměrnost podle osy } p\text{)}.$$

Dále snadno vypočteme z pravoúhlých trojúhelníků velikost úhlů $\sphericalangle MAP = \mathrm{R} - \gamma$, $\sphericalangle MAT_1 = \mathrm{R} - \alpha$, $\sphericalangle MBP = \mathrm{R} - \gamma$, $\sphericalangle MBT_2 = \mathrm{R} - \beta$. Odtud dále

$$\omega' = \omega = 2\mathrm{R} - (\mathrm{R} - \alpha + \mathrm{R} - \gamma) = \alpha + \gamma \qquad (2)$$
(užitím vedlejších úhlů),

$$\varepsilon' = \varepsilon = 2\mathrm{R} - (\mathrm{R} - \beta + \mathrm{R} - \gamma) = \beta + \gamma \qquad (3)$$
(užitím vedlejších úhlů).

Dále je
$\xi = \sphericalangle AT_1T_2 = 2\mathrm{R} - \sphericalangle ABT_2$ (protější úhly v tětivovém čtyřúhelníku ABT_2T_1) neboli

$$\xi = 2\mathrm{R} - (\mathrm{R} - \beta + \mathrm{R} - \gamma) = \beta + \gamma; \qquad (4)$$

podobně se vypočte

$$\eta = \alpha + \gamma. \qquad (5)$$

Protože $\sphericalangle S_1T_1T_2 = \omega' + \xi$, dostaneme ze (2) a (4)

$$\sphericalangle S_1T_1T_2 = (\alpha + \gamma) + (\beta + \gamma) = \alpha + \gamma' + \gamma + \beta =$$
$$= \sphericalangle S_1MS_2 = 90^\circ \text{ [viz (1)]}.$$

Podobně ze (3) a (5) plyne, že

$$\sphericalangle S_2T_2T_1 = 90^\circ.$$

Platí tedy o přímce T_1T_2, že

$$T_1T_2 \perp S_1T_1, \; T_1T_2 \perp S_2T_2,$$

tj. přímka T_1T_2 je tečnou kružnic k_1, k_2 pořadě v bodech T_1, T_2, což jsme měli dokázat.

Tím je řešení provedeno.

7. Úlohy II. kola kategorie C

1. Riešte rovnicu

$$\frac{1+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}+\frac{1-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}=2.$$

Urobte skúšku.

Riešenie. Ak číslo x je riešením rovnice (1), potom postupne platí

$$\frac{(1+\sqrt{3})(x+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{x^2-3}=2,$$

$$x(1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3})+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}+3=2x^2-6,$$

$$2x+6=2x^2-6,$$

$$0=x^2-x-6,$$

$$(x-3)(x+2)=0.$$

Je teda buď $x=3$, buď $x=-2$.

Urobme skúšku dosadením do rovnice (1). Označme pritom $L(x)$ ľavú stranu rovnice (1):

Prípad [1]. Dosaďme $x=3$; dostaneme

$$L(3)=\frac{1+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}+\frac{1-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{(1+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{9-3}=$$

$$=\frac{3+3\sqrt{3}+\sqrt{3}+3+3-3\sqrt{3}-\sqrt{3}+3}{6}=\frac{12}{6}=2.$$

Platí teda $L(3) = 2$, čiže $x = 3$ je riešením rovnice (1).

Prípad [2]. Dosaďme $x = -2$. Dostaneme

$$L(-2) = \frac{1+\sqrt{3}}{-2-\sqrt{3}} + \frac{1-\sqrt{3}}{-2+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(1+\sqrt{3})(-2+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})(-2-\sqrt{3})}{4-3} =$$

$$= -2 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 3 - 2 + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 3 = 2.$$

Je teda $L(-2) = 2$, čiže $x = -2$ je riešením rovnice (1).

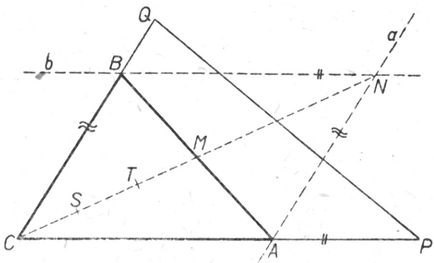
Záver. Daná rovnica má dva korene:

$$x = 3, \quad x = -2.$$

2. V rovině buď dán trojúhelník PCQ a uvnitř tohoto trojúhelníka bod T.

Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bod T byl jeho těžištěm, bod A aby ležel na polopřímce CP a bod B na polopřímce CQ.

Řešení (obr. 50). Jestliže ABC je hledaný trojúhelník o těžišti T, potom polopřímka CT prochází středem M strany AB; pak podle známé poučky platí $TM = \frac{1}{2}CT = CS$, kde S



Obr. 50.

e střed úsečky CT. Jestliže sestrojíme rovnoběžník $ACBN$, je bod M zřejmě jeho středem. Podle toho provedeme *konstrukci*:

Sestrojme střed úsečky CT a na polopřímce CT určeme bod $M \neq S$ takový, aby $TM = CS$. Dále na polopřímce CT sestrojme bod $N \neq C$ takový, aby platilo $MN = CM$. Bodem N sestrojme přímky $a \parallel CQ$, $b \parallel CP$; společný bod přímek a, CP označme A a společný bod přímek b, CQ označme B. Potom je trojúhelník ABC hledaným trojúhelníkem.

Důkaz. Bod M je podle konstrukce středem úhlopříčky CN rovnoběžníka $ACBN$ a tedy i středem úsečky AB. Proto je úsečka CM těžnicí trojúhelníka ABC. Podle konstrukce je $CT = 2 \cdot TM$ a proto je bod M těžištěm trojúhelníka ABC.

Z postupu provedené konstrukce plyne, že úloha má vždy řešení, a to jediné.

3. V rovine nech sú dané dve rôznobežky p, q, ktorých priesečník je A. Ďalej nech je daný bod M rôzny od bodu A.

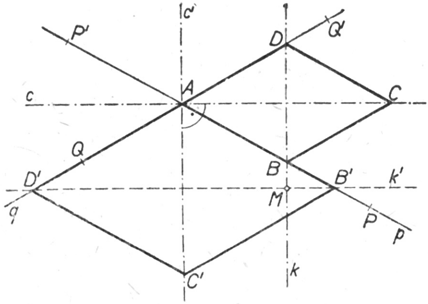
Zostrojte kosoštvorec $ABCD$ tak, aby bod B ležal na priamke p, bod D ležal na priamke q a aby priamka BD prechádzala daným bodom M.

Urobte diskusiu riešiteľnosti.

Riešenie (obr. 51). *Rozbor.* Ak kosoštvorec $ABCD$ je riešením úlohy, potom bod $B \neq A$ leží na priamke p, bod $D \neq A$ leží na priamke q a priamka BD prechádza bodom M. Avšak v kosoštvorci stoja uhlopriečky na seba kolmo a každá rozpoľuje uhol kosoštvorca pri vrchole, z ktorého vychádza. Preto uhlopriečka $AC \perp BD$ leží na jednej z osí c, c' rôznobežiek p, q.

Poznámka. Ak sú PAP', QAQ' dve rôznobežky, rozpoľuje ich os c' uhly $\sphericalangle PAQ$, $\sphericalangle P'AQ'$ a ide bodom A; druhá os c rozpoľuje uhly $\sphericalangle PAQ'$, $\sphericalangle P'AQ$ a ide bodom A. (Platí $c \perp c'$.) Je teda priamka BD kolmá k jednej z oboch os c, c' a prechádza bodom M. Podľa toho urobíme konštrukciu.

Konštrukcia. Zostrojme osi c, c' rôznobežiek p, q. Bodom M veďme kolmice $k \perp c$, $k' \perp c'$. Ďalej označme B, D (v tomto poradí) priesečníky priamky k s priamkami p, q. Označme ďalej B', D' (v tomto poradí) priesečníky priamky k' s priamkami p, q. Potom rovnobežníky $ABCD$, $AB'C'D'$ (kde zrejme C leží na osi c a C' leží na osi c') sú hľadané kosoštvorce.



Obr. 51.

Dôkaz urobíme pre rovnobežník $ABCD$ (pre druhý rovnobežník sa urobí podobne). Podľa konštrukcie je $ABCD$ rovnobežník, v ktorom je $BD \perp c$. Pritom os c uhla $\sphericalangle BAD$ trojuholníka BAD stojí kolmo k jeho strane BD. Je teda priamka c osou súmernosti tohto trojuholníka (bod A je samodružný, priamky p, q sú súmerne združené, priamka BD samodružná a preto body B, D sú súmerne združené). Je teda $AB = AD$ a rovnobežník $ABCD$ je kosoštvorec. Tým je dôkaz ukončený.

Diskusia. Priamky c, c' sú rôzne; preto sú rôzne aj priamky k, k' a sú iste rôznobežné s priamkami p, q. Ide o to, aby bolo $B \not\equiv A$ (poprípade $B' \not\equiv A$); to znamená, že priamka k (poprípade k') nesmie prechádzať bodom A. Pretože je $k \perp c$, $k' \perp c'$, $c \perp c'$, je $k \parallel c'$, $k' \parallel c$. Ak priamka k prechádza bodom A, potom je $k \equiv c'$ a ak priamka k' prechádza bodom A, potom je $k' \equiv c$. Ak je $k \equiv c'$, leží bod M na osi c'. Ak je $k' \equiv c$, bod M leží na osi c.

Obrátene: Ak bod M leží na jednej z osí c, c', prechádza jedna z priamok k', k bodom A; potom má úloha jediné riešenie (pretože je $M \not\equiv A$, leží bod M nanajvýš na jednej z osí c, c'). Avšak ak bod M neleží na žiadnej z osí c, c', má úloha dve riešenia.

Tým je riešenie úlohy ukončené.

4. Z téhož druhu oceli byly zhotoveny dvě tyče o čtvercových průřezech. První tyč má délku 2 m a průřezem je čtverec o straně 5 cm.

O kolik procent je druhá tyč delší než první, jestliže průřez druhé tyče má stranu o p procent menší, než je strana průřezu první tyče a jestliže obě tyče jsou stejně těžké.

Řešení. Protože obě tyče jsou ze stejného materiálu a jsou stejně těžké, mají sobě rovné objemy. Rozměry v dalším udávejme v centimetrech a objemy v centimetrech krychlových. Rozměry první tyče jsou

$$5;\ 5;\ 200;$$

rozměry druhé tyče jsou

$$5\left(1-\frac{p}{100}\right);\quad 5\left(1-\frac{p}{100}\right);\quad 200\left(1+\frac{x}{100}\right),$$

kde číslo x udává počet procent, o něž je druhá tyč delší než první (její délku zde považujeme za základ). Porovnáním objemů obou tyčí dostaneme rovnici

$$5^2 \cdot 200 = 5^2 \cdot 200\left(1-\frac{p}{100}\right)^2\left(1+\frac{x}{100}\right).$$

Odtud snadno dostaneme

$$1 + \frac{x}{100} = \frac{1}{\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2}.$$

Vypočtěme neznámou x a postupně upravme:

$$x = \frac{100}{\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2} - 100 = \frac{100^3}{(100 - p)^2} - 100 =$$

$$= \frac{100^3 - 100(100 - p)^2}{(100 - p)^2} = \frac{100^3 - 100(100^2 - 200p + p^2)}{(100 - p)^2} =$$

$$= \frac{100p(200 - p)}{(100 - p)^2},$$

takže

$$x = \frac{100p(200 - p)}{(100 - p)^2}.$$

Protože je $p < 100$, jsou čísla $200 - p$, $(100 - p)^2$ kladná a tedy i číslo x.

Tím je úloha rozřešena.

Poznámka. Ze získaného výsledku lze učinit zajímavý závěr (který ovšem text úlohy výslovně nevyžaduje); můžeme totiž odhadnout velikost čísla x. Platí

$$x = \frac{100p(100 - p)}{(100 - p)^2} + \frac{100p \cdot 100}{(100 - p)^2} =$$

$$= \frac{100p}{100 - p} + \frac{100^2 p}{(100 - p)^2}.$$

Protože je $100 > 100 - p > 0$, je zlomek $\dfrac{100}{100 - p}$ větší než 1, tedy také $\left(\dfrac{100}{100 - p}\right)^2 > 1$. Proto je

$$\frac{100\,p}{100 - p} > p, \qquad \frac{100^2\,p}{(100 - p)^2} > p.$$

Sečtením obou nerovností dostáváme

$$\frac{100\,p}{100 - p} + \frac{100^2\,p}{(100 - p)^2} > 2p,$$

tedy $x > 2p$. Druhá tyč je proto o více než o $2p$ procent delší než tyč první.

8. Úlohy I. kola kategorie D

1. Buď dán obdélník $ABCD$ o rozměrech $AB = 2$ m, $AD = 1{,}6$ m. Uvnitř tohoto obdélníka leží bod X; přitom jsou obsahy trojúhelníků ABX, BCX, CDX, DAX pořadě úměrné číslům 5, 6, 3, 2.

a) Vypočtěte obsah každého z těchto čtyř trojúhelníků.
b) Vypočtěte vzdálenost bodu X od přímek AB, BC, CD, DA.
c) Sestrojte obdélník $ABCD$ v měřítku 1:20 a v něm bod X, který vyhovuje požadavkům úlohy.

Řešení (obr. 52a). a) Je $AB = 20$ dm, $BC = 16$ dm. Obsah P daného obdélníka $ABCD$ je 320 dm². Označme P_1, P_2, P_3, P_4 obsahy (v decimetrech čtverečních) trojúhelníků ABX, BCX, CDX, DAX. Podle textu úlohy platí

$$P_1 = 5d,\ P_2 = 6d,\ P_3 = 3d,\ P_4 = 2d, \qquad (1)$$

kde číslo $d > 0$ musíme vypočítat. Platí

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

neboli

$$320 = 5d + 6d + 3d + 2d;$$

odtud postupně dostaneme

$$16d = 320,$$

$$d = \frac{320}{16},$$

$$d = 20.$$

Ze vztahů (1) pak dostáváme

$$P_1 = 100,\ P_2 = 120,\ P_3 = 60,\ P_4 = 40. \qquad (2)$$

Skutečně jsou čísla P_1, P_2, P_3, P_4 úměrná číslům 5, 6, 3, 2, jak se přesvědčíme násobením čísel (2) číslem $\frac{1}{20}$. Součet $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 320$ (dm²).

b) Označme pořadě v_1, v_2, v_3, v_4 vzdálenosti bodu X od přímek AB, BC, CD, DA neboli výšky trojúhelníků ABX, BCX, CDX, DAX. Platí pořadě (velikosti úseček v decimetrech, obsahy v decimetrech čtverečních):

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot v_1, \quad P_2 = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot v_2,$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot v_3, \quad P_4 = \frac{1}{2} \cdot DA \cdot v_4$$

neboli

$$100 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot v_1, \quad 120 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot v_2,$$

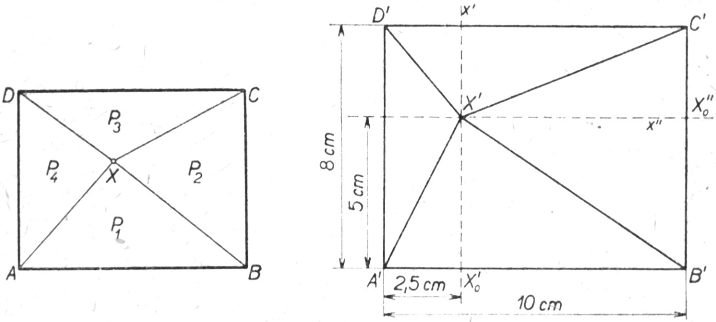
$$60 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot v_3, \quad 40 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot v_4 .$$

Po zkrácení a záměně stran rovnic dostáváme

$$10v_1 = 100, \quad 8v_2 = 120, \quad 10v_3 = 60, \quad 8v_4 = 40.$$

Násobme obě strany každé z rovnic pořadě čísly $\frac{1}{10}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{8}$; dostaneme

$$v_1 = 10, \quad v_2 = \frac{120}{8}, \quad v_3 = \frac{60}{10}, \quad v_4 = \frac{40}{8}$$



Obr. 52 a, b.

neboli

$$v_1 = 10, \; v_2 = 15, \; v_3 = 6, \; v_4 = 5.$$

Zřejmě platí $v_1 + v_3 = BC$, tj. 16, dále $v_2 + v_4 = AB$, tj. 20.

c) (Velikosti úseček udáváme v decimetrech; obr. 52b.) Obdélník $ABCD$ znázorníme obdélníkem $A'B'C'D'$ v měřítku 1:20, tj. $A'B' = \frac{1}{20} \cdot AB$, $B'C' = \frac{1}{20} \cdot BC$ neboli $A'B' = \frac{1}{20} \cdot 20$; $B'C' = \frac{1}{20} \cdot 16$ neboli $A'B' = 1$, $B'C' = \frac{8}{10} = 0{,}8$. Sestrojení obdélníka $A'B'C'D'$ je snadné a nebudeme je popisovat.

Nyní platí

$$\frac{v_1}{v_3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}, \quad \frac{v_2}{v_4} = \frac{15}{5} = \frac{3}{1}. \tag{3}$$

Úsečku $A'B' = 1$ rozdělíme v poměru $3:1$ [viz (3)]; provedeme to takto: Rozdělíme ji na 4 sobě rovné díly; 1 díl je $\frac{1}{4} \cdot A'B' = \frac{1}{4}$; části budou $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$. Označme X_0' bod úsečky $A'B'$, pro nějž platí $A'X_0' = \frac{1}{4}$ neboli $B'X_0' = \frac{3}{4}$ (tj. $A'X_0' = 2{,}5$ cm).

Úsečku $B'C' = 0{,}8$ (tj. $B'C' = 8$ cm) rozdělíme v poměru $5:3$; to provedeme takto: Rozdělíme ji na 8 sobě rovných dílů, 1 díl je $\frac{1}{8} B'C' = \frac{1}{8} \cdot 0{,}8 = 0{,}1$ (tj. 1 cm); části budou $0{,}1 \cdot 5 = 0{,}5$, $0{,}1 \cdot 3 = 0{,}3$. Sestrojme na úsečce $B'C'$ bod X_0'' tak, aby platilo $B'X_0'' = 0{,}5$ neboli $C'X_0'' = 0{,}3$ (tj. $C'X_0'' = 3$ cm).

Nyní sestrojme bodem X_0' přímku $x' \parallel B'C'$, bodem X_0'' přímku $x'' \parallel A'B'$. Průsečík přímek x', x'' je bod X'. Tím je úloha rozřešena.

2. Určte počet všetkých prirodzených čísel menších než 5 000 000, z ktorých každé je súčasne deliteľné číslami tri, päť a sedem.

Riešenie. Čísla 3, 5, 7 sú nesúdeliteľné; každé číslo, ktoré je súčasne deliteľné každým z týchto troch čísel, je násobkom (celistvým) čísla $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. Máme teda určiť počet všetkých násobkov (prirodzených) čísla 105, z ktorých každý je menší než 5 000 000. Deľme 5 000 000 : 105; čiastočný podiel, určený na jednotky, udáva počet násobkov čísla 105, ktoré sú menšie než 5 000 000.

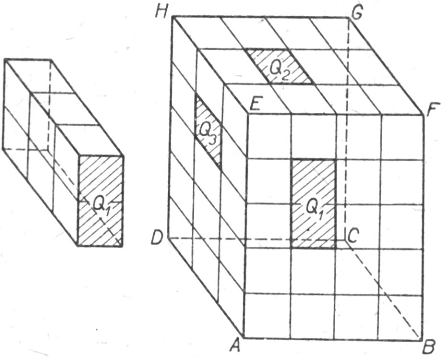
Výpočet.

```
5 000 000 : 105  | 47 619
  800
   650
    200
     950
       5
```

Skúška delenia. Platí $47615 \cdot 105 + 5 = 4\,999\,995 + 5 = 5\,000\,000$, lebo je

```
47 619 · 105
  2 38095
-----------
4 999 995
```

Odpoveď. Počet prirodzených čísel, z ktorých každé je deliteľné číslami 3, 5, 7 a pritom menšie než číslo 5 000 000, je 47 619.



Obr. 53.

3. Na připojeném obrázku 53 vidíte kvádr o rozměrech $AB = 4$ cm, $AD = 3$ cm, $AE = 5$ cm; tento kvádr je stmelen z krychliček o hranách délky 1 cm. Na povrchu kvádru je vyznačen obdélník Q_1 o rozměrech 1 cm a 2 cm a dále pak dva čtverce Q_2, Q_3 o stranách 1 cm.

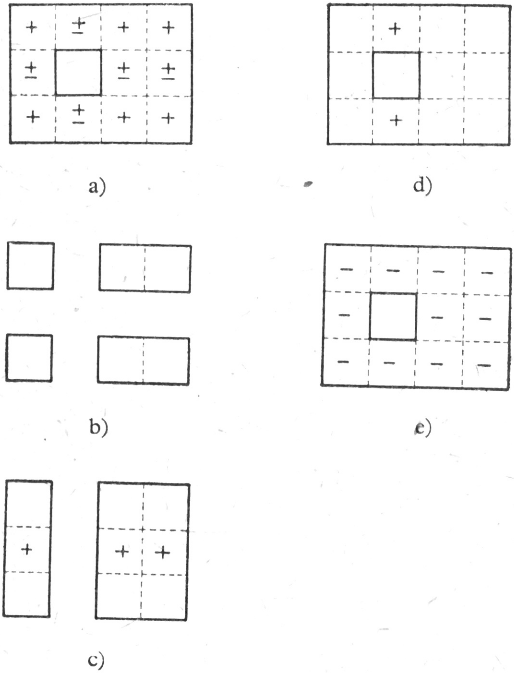
Nad obdélníkem Q_1 vyrazíme z daného kvádru ve směru hrany AD sloupec (tvaru kvádru) složený celkem ze šesti krychliček; vyňatá část je znázorněna vlevo na obrázku. Tím vznikne v daném kvádru otvor. Obdobným způsobem sestrojíme otvor nad čtvercem Q_2 dlouhý 5 cm ve směru hrany AE a dále otvor nad čtvercem Q_3 dlouhý 4 cm ve směru hrany AB.

Vypočtěte objem a povrch (tj. včetně povrchu dutiny) tělesa, které takto vzniklo.

Řešení. Abychom úlohu rozřešili, rozřežeme vzniklé těleso (tj. daný kvádr po sestrojení otvorů) na vrstvy, a to rovinnými řezy rovnoběžnými s rovinou horní podstavy $EFGH$ daného kvádru. Dostaneme tak pět vrstev, které jsou v obr. 54 seřazeny ve směru shora dolů; přitom si myslíme, že se na vrstvu díváme shora (z nadhledu). Patří-li horní stěna krychličky, obsažené v určité vrstvě, k povrchu tělesa, označíme ji

Značka vrstvy	Počet stěn ve vrstvě krychliček, které patří povrchu tělesa			Celkem stěn	Počet krychliček ve vrstvě
	horních stěn (+)	dolních stěn (−)	pobočných (v obrázku tlustě vytažených)		
a	11	5	18	34	11
b	—	—	20	20	6
c	3	—	18	21	9
d	2	—	18	20	11
e	—	11	18	29	11
			Součet	124	48

v našem obrázku značkou +; patří-li spodní (dolní) stěna krychličky k povrchu tělesa, označíme ji v obrázku značkou —. Jestliže náleží povrchu pobočná stěna krychličky, vyznačíme ji v obrázku vrstvy tlustou úsečkou. Podle toho spočítáme v každé vrstvě počet stěn krychliček, které patří povrchu tělesa; zároveň spočítáme i počet krychliček v každé vrstvě.

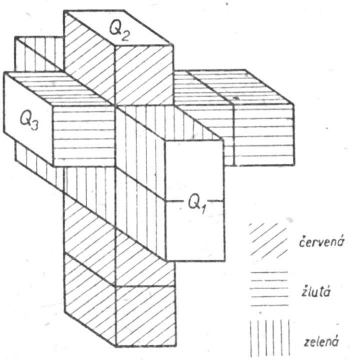


Obr. 54.

Povrch vzniklého tělesa je tedy 124 cm², objem tělesa je 48 cm³. (Odpadlo 60 — 48 = 12 krychliček.)

Jiné řešení. Na obrázku 55 máme znázorněno těleso, které jsme z kvádru odebrali. (Svislé šrafy značí zelenou barvu, šikmé šrafy červenou a vodorovné žlutou; stejně jsou obarveny i stěny vzniklé dutiny.)

Označme V objem a S povrch původního kvádru a V', S' objem a povrch kvádru s dutinou.



Obr. 55.

Dutina nad $\mathbf{Q}_1$ vznikla vyjmutím šesti krychlí a vezmeme ji celou; má objem $V_1 = 6\ \text{cm}^3$, povrch $S_1 = 14\ \text{cm}^2$.

Dutina nad $\mathbf{Q}_2$ (vznikla vyjmutím dalších tří krychlí); objem je $V_2 = 3\ \text{cm}^3$, povrch $S_2 = 12\ \text{cm}^2$.

Dutina nad $\mathbf{Q}_3$ (vznikla vyjmutím ještě dalších tří krychlí); objem je $V_3 = 3\ \text{cm}^3$, povrch $S_3 = 12\ \text{cm}^2$.

Obsahy obrazců $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_3$ označíme Q_1, Q_2, Q_3.

Podle obrázku vidíme, že platí (objem je vyjádřen v cm^3, povrch v cm^2):

$$V' = V - (V_1 + V_2 + V_3) = 4 \cdot 3 \cdot 5 - (6 + 3 + 3) = \\ = 60 - 12 = 48;$$

$$S' = S + (S_1 + S_2 + S_3) - 2\,(Q_1 + Q_2 + Q_3) = \\ = 2 \cdot (4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3) + (14 + 12 + 12) - (4 + 2 + 2) = \\ = 94 + 38 - 8 = \\ = 124.$$

Kvádr s dutinou má objem $48\ \text{cm}^3$ a povrch $124\ \text{cm}^2$.

Podle řešení Jaroslava Šelbického,
8. tř., 1. osš, Turnov.

4. Nech sú dané dve rôzne čísla a, b, ktoré majú túto vlastnosť: Rozdiel prvého čísla a jeho druhej mocniny sa rovná rozdielu druhého čísla a jeho druhej mocniny.

Dokážte, že potom sa súčet čísel a, b rovná číslu 1.

Obrátene, ak o dvoch rôznych číslach a, b platí $a + b = 1$, potom rozdiel prvého čísla a jeho druhej mocniny sa rovná rozdielu druhého čísla a jeho druhej mocniny. Dokážte to a uveďte príklad takých čísel.

Riešenie. I. Dané čísla označme a, b. Ich rozdiel $a - b$ je číslo rôzne od nuly (kladné alebo záporné). Druhé mocniny daných čísel sú a^2, b^2. Rozdiely $a - a^2$, $b - b^2$ sa podľa predpokladu navzájom rovnajú, t. j. platí

$$a - a^2 = b - b^2. \tag{1}$$

Máme dokázať, že o číslach a, b platí $a + b = 1$.

Dôkaz. Rovnosť (1) upravme na tvar

$$a - b = a^2 - b^2$$

alebo

$$a - b = (a - b)(a + b). \tag{2}$$

Číslo $a - b$ je rôzne od nuly; preto ním môžeme obe strany rovnosti (2) deliť. Dostaneme

$$1 = a + b.$$

Súčet $a + b$ sa teda rovná číslu 1, čo sme mali dokázať.

II. Obrátene, predpokladajme, že o rôznych číslach a, b platí

$$a + b = 1.$$

Máme dokázať, že potom platí tiež rovnosť

$$a - a^2 = b - b^2.$$

Dôkaz. Znásobme obe strany rovnosti

$$a + b = 1$$

číslom $a - b \neq 0$. Dostaneme rovnosť

$$(a + b)(a - b) = a - b$$

alebo

$$a^2 - b^2 = a - b.$$

Z toho vhodnou úpravou dostaneme

$$b - b^2 = a - a^2,$$

čo sme mali dokázať.

Príklad 1. Nech $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{4}$, takže je $a^2 = \frac{9}{16}$, $b^2 = \frac{1}{16}$. Tieto čísla majú vlastnosť uvedenú v úlohe, lebo je

$$a - a^2 = \frac{3}{4} - \frac{9}{16} = \frac{12}{16} - \frac{9}{16} = \frac{3}{16},$$

$$b - b^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{4}{16} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

Skutočne o nich platí

$$a + b = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

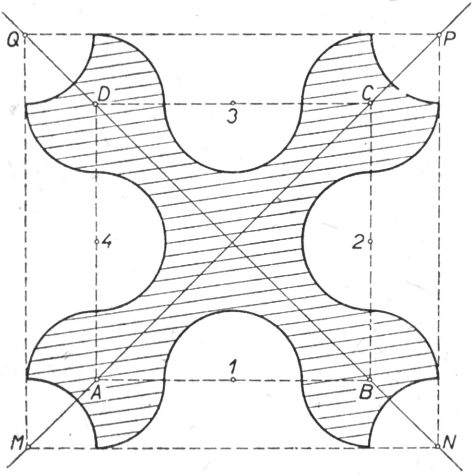
Také čísla ľahko nájdeme práve pomocou obrátenej vety, t. j. keď výjdeme od rôznych čísel, o ktorých platí $a + b = 1$.

Príklad 2. Popísané vlastnosti majú napr. tieto čísla, ako sa ľahko presvedčíme:

a) $a = 0, b = 1$; b) $a = -1, b = 2$; c) $a = -\frac{5}{3}, b = \frac{8}{3}$.

Poznámka. Ak je však $a = b$, čo je textom úlohy vylúčené, potom majú vlastnosť $a + b = 1$ jedine čísla $a = b = \frac{1}{2}$.

5. Na obrázku 56 vidíte plechovú súčiastku, ktorej obvod sa skladá z oblúkov zhodných kružníc o danom polomere a. Stredy oblúkov sú v obrázku vyznačené krúžkami. Pritom $ABCD$, $MNPQ$ sú štvorce, ktorých uhlopriečky ležia v dvoch navzájom kolmých priamkach $MACP$, $NBDQ$. Pritom je $AB = 4a$, $MN = 6a$.



Obr. 56.

a) Narysujte obrázok súčiastky (urobte pre $a = 2{,}5$ cm).

b) Vyjadrite obsah obrazu súčiastky pomocou čísla a.

c) Vyjadrite pomocou čísla a váhu 1000 kusov súčiastok, ak 1 m^2 plechu, z ktorého sú vyrobené, váží 8,5 kg. Výpočet urobte pre $a = 2{,}5$ cm.

Řešení. a) Viz obr. 56 (není ve skutečné velikosti).

b) Protože číslo a udává velikost úseček v centimetrech, provedeme výpočet obsahu P vyšrafované plochy v obr. 56

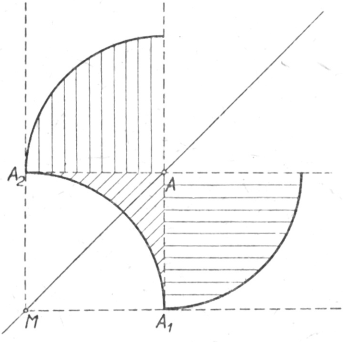
v centimetrech čtverečních. Obvod čtverce $ABCD$ rozděluje plochu součástky ve dvě části. První část je znázorněna vyšrafovanou plochou ve čtverci $ABCD$; její obsah označíme x. Druhá část je znázorněna čtyřmi vyšrafovanými plochami, z nichž každá leží ve čtverci $MNPQ$. Jedna z těchto ploch je znázorněna ve zvětšení v obr. 57, a to plocha, která leží při vrcholu A; její obsah označíme y. Výpočty provedeme odděleně. Obsah čtvrtkruhu o poloměru a označíme K; obsah celého kruhu o poloměru a je

$$4K = \pi a^2. \tag{1}$$

I. Výpočet obsahu x první části vyšrafované plochy: Obsah x dostaneme, když od obsahu čtverce $ABCD$ odečteme obsah čtyř polokruhů o poloměru a (středy polokruhů jsou v bodech 1, 2, 3, 4). Čtverec $ABCD$ má stranu $4a$; jeho obsah je $(4a)^2 = 16a^2$. Obsah jednoho polokruhu je $2K$, všech čtyř je $8K$. Proto je

$$x = 16a^2 - 8K. \tag{2}$$

II. Výpočet obsahu druhé části vyšrafované plochy: Obsah y plochy naznačené v obr. 57 dostaneme, když od obsahu čtverce MA_1AA_2 o straně $MA_1 = a$ odečteme obsah jednoho čtvrtkruhu (jeho střed je v M a poloměr je a) a k tomu přičteme obsahy dvou čtvrtkruhů o středu A a poloměru a. Obsah čtverce MA_1AA_2 je a^2, obsah čtvrtkruhu je K; je tedy $y = (a^2 - K) + 2K$ neboli $y = a^2 + K$. Obsah $4y$ druhé části je tedy



Obr. 57.

$$4y = 4(a^2 + K). \tag{3}$$

III. Výpočet obsahu P celé vyšrafované plochy: Tu platí $P = x + 4y$. Dosaďme sem z výsledků (2) a (3); dostaneme postupně

$$P = (16a^2 - 8K) + 4(a^2 + K),$$

$$P = 16a^2 - 8K + 4a^2 + 4K,$$

$$P = 20a^2 - 4K.$$

Do tohoto výsledku dosadíme ze vzorce (1); obdržíme postupně

$$P = 20a^2 - \pi a^2,$$

$$P = a^2(20 - \pi),$$

což je hledaný výsledek. Tím je úloha b) rozřešena.

c) Označme Q váhu 1000 kusů součástek v kilogramech. Protože je udána váha 1 m^2 plechu, převedeme obsah P ve výsledku (4) na čtvereční metry. Platí 1 m^2 = 100 dm^2 = = 100 · 100 cm^2 = 10 000 cm^2. Obsah součástky v metrech čtverečních je proto $\frac{1}{10\,000} \cdot a^2(20 - \pi)$ a váha jedné součástky v kilogramech je

$$\frac{1}{10\,000} \cdot a^2(20 - \pi) \cdot 8{,}5.$$

Váha Q je 1000krát větší, tj.

$$Q = \frac{1}{10\,000} \cdot a^2(20 - \pi) \cdot 8{,}5 \cdot 1000\,;$$

postupnou úpravou dostaneme

$$Q = \frac{1}{10} \cdot a^2(20 - \pi) \cdot 8{,}5\,,$$

$$Q = a^2(20 - \pi) \cdot 0{,}85.$$

Jestliže je $a = 2{,}5$, dostaneme odtud postupně

$$Q = 2{,}5^2 \cdot (20 - \pi) \cdot 0{,}85,$$

$$Q = 6{,}25 \cdot 0{,}85\,(20 - \pi).$$

Výpočet proveďme pro přibližnou hodnotu $\frac{22}{7}$ čísla π. Tu je $20 - \pi \doteq 20 - \frac{22}{7} = \frac{140 - 22}{7} = \frac{118}{7}$.

$$\begin{array}{r} 6{,}25 \\ \times 0{,}85 \\ \hline 31\,25 \\ 5\,00\,0 \\ \hline 5{,}31\,25 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 5{,}31 \\ \times 1\,18 \\ \hline 42\,48 \\ 53\,1 \\ 531 \\ \hline 626{,}58 \end{array} \doteq 627$$

$$Q \doteq 5{,}31 \cdot \frac{118}{7} = (5{,}31 \cdot 118) \cdot \frac{1}{7} \doteq 627 \cdot \frac{1}{7} \doteq 89\,.$$

1000 kusů plechových součástek váží asi 90 kg.

Stručné, ale obsahově stejné řešení
podala Jana Valkounová,
8. tř., 2. osš, Turnov.

6. Tvůj spolužák si myslí tři bezprostředně následující přirozená čísla a vypočítá jejich součin. Aniž bys znal myšlená čísla dokaž, že výsledný součin je násobek čísla 6.

Řešení. Tři bezprostředně po sobě následující přirozená čísla, která si žák myslí, označme

$$a,\ a + 1,\ a + 2. \tag{1}$$

Jsou to tedy tři bezprostředně po sobě následující čísla z posloupnosti přirozených čísel

$$1, 2, 3, 4, \ldots .$$

Součin čísel (1) je

$$x = a(a + 1)(a + 2).$$

Máme dokázat, že číslo x je dělitelné šesti.

Známe větu: Číslo je dělitelno šesti, jestliže je dělitelné dvěma i třemi.

Naše číslo x bude tedy jistě dělitelno šesti, když jedno z čísel (1) bude dělitelné dvěma a dále, když jedno z čísel (1) bude dělitelné třemi.

Víme však, že každé druhé číslo v posloupnosti přirozených čísel je dělitelné dvěma. Čísla (1) jsou tři bezprostředně po sobě následující přirozená čísla; je tedy alespoň jedno z nich dělitelné dvěma a tím i číslo x je dělitelné dvěma.

Dále víme, že každé třetí číslo v posloupnosti přirozených čísel je dělitelné třemi. Čísla (1) jsou tři bezprostředně po sobě následující čísla a tedy jedno z nich je dělitelné třemi a tím i číslo x je dělitelné třemi.

Je tedy číslo x dělitelné dvěma i třemi a tím i šesti.

Jiné řešení. Označme n, $n + 1$, $n + 2$ tři bezprostředně po sobě následující přirozená čísla. Když alespoň jedno z těchto čísel bude dělitelné třemi a když alespoň jedno bude sudé, pak bude jejich součin dělitelný šesti.

I. Dělíme-li číslo n třemi, může vyjít zbytek:

a) nula, tj. číslo n je dělitelné třemi;

b) jedna, pak je $n + 2$ dělitelné třemi;

c) dvě, pak je $n + 1$ dělitelné třemi;

Jeden z těchto tří případů musí nastat, a proto je vždy jedno ze tří čísel n, $n + 1$, $n + 2$ dělitelné třemi a tím i jejich součin.

II. Je-li číslo n sudé, je i součin našich čísel sudý.

Je-li číslo n liché, je $n+1$ sudé a tím i součin našich čísel. Tak jsme dokázali, že náš součin je dělitelný šesti.

Podle řešení Miroslava Třešňáka, 8.tř., 1.osš, Turnov.

7. Zaiste viete, ako smie na šachovnici ťahať dáma (kráľovna). Určte teda počet všetkých ťahov, ktoré môže dáma vykonať na prázdnej štvorcovej šachovnici o 64 poliach. (Pritom považujeme ťah z poľa A na iné pole B za rôzny od ťahu z poľa B na pole A.)

Riešenie. V nasledujúcej schéme je znázornená šachovnica a na každom poli je uvedené, koľko môže z neho vykonať kráľovna ťahov.

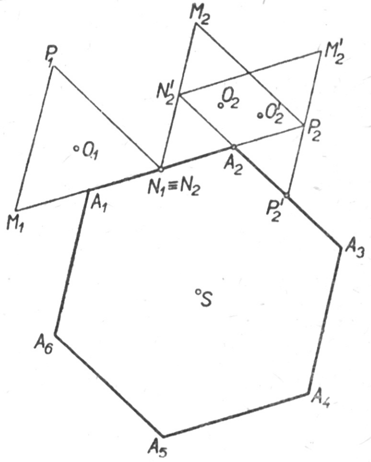
21	21	21	21	21	21	21	21
21	23	23	23	23	23	23	21
21	23	25	25	25	25	23	21
21	23	25	27	27	25	23	21
21	23	25	27	27	25	23	21
21	23	25	25	25	25	23	21
21	23	23	23	23	23	23	21
21	21	21	21	21	21	21	21

Hľadaný počet je $21 \cdot 28 + 23 \cdot 20 + 25 \cdot 12 + 27 \cdot 4 =$
$= 588 + 460 + 300 + 108 = 1456$.

To isté riešenie zaslal M. Žák,
8.tr., osš, Turnov.

8. Je daný pravidelný šesťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ so stredom S a so stranou veľkosti 5 cm. Zostrojte rovnostranný trojuholník $M_1N_1P_1$ ako na obrázku 58, pričom jeho strana má veľkosť 5 cm a vrchol N_1 je stredom úsečky A_1A_2; stred tohto trojuholníka označte O_1.

Daný trojuholník sa kotúľa po obvode daného šesťuholníka a to takto: Trojuholník sa najprv otočí okolo bodu N_1 do polohy $M_2N_2P_2$. Potom sa trojuholník $M_2N_2P_2$ otočí okolo bodu A_2 do polohy $M_2'N_2'P_2'$ ako na obrázku. Ďalej sa trojuholník $M_2'N_2'P_2'$ otočí okolo bodu P_2' atď., až sa vráti do pôvodnej polohy.

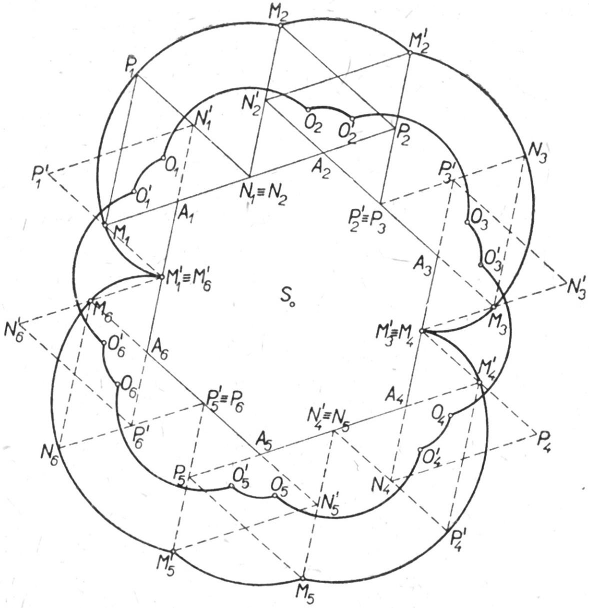


Obr. 58.

Narysujte dráhy bodov M_1 a O_1 v priebehu celého pohybu.

Riešenie vidieť na obrázku 59.

9. Ozubené pedálové kolečko jízdního kola (bicyklu) má 48 převodních zubů; malé převodní kolečko na zadním kole má 20 zubů. Průměr zadního kola bicyklu je 72 cm. (Uvědomte si, že vzdálenost dvou sousedních zubů u obou koleček je táž.)



Obr. 59.

Cyklista jede po vodorovné silnici stálou rychlostí 25 km za hodinu na plný záběr (šlape rovnoměrně).

a) Kolikrát musí šlápnout za jednu minutu, aby si udržel stálou rychlost 25 km za hodinu?

b) Kolikrát musí šlápnout na trati dlouhé 4,5 km?

Řešení. a) Označme $d = 72$ cm průměr zadního kola bicyklu a p velikost jeho obvodu (v centimetrech); pak platí

$$p = \pi d. \tag{1}$$

Za hodinu urazí bicykl 25 km, tj. $25 \cdot 1000 \cdot 100$ cm neboli

2 500 000 cm. Počet otoček zadního kola bicyklu na dráze 25 km je

$$X = \frac{2\,500\,000}{p}$$

a po dosazení z (1)

$$X = \frac{2\,500\,000}{72\,\pi}. \tag{2}$$

Položme přibližně $\pi \doteq \frac{22}{7}$; potom ze vztahu (2) dostaneme

$$X \doteq \frac{2\,500\,000}{\frac{22}{7} \cdot 72}$$

neboli

$$X \doteq \frac{2\,500\,000 \cdot 7}{22 \cdot 72}. \tag{3}$$

Na dráze 25 km vykoná zadní kolo X otoček, kde X je udáno vztahem (3); týž počet otoček vykoná i malé ozubené kolečko, neboť je pevně spjato se zadním kolem.

Vzdálenost dvou sousedních zubů u obou ozubených koleček je táž. Malé ozubené kolečko má 20 zubů, pedálové ozubené kolečko má 48 zubů. Otočí-li se na dráze 25 km malé ozubené kolečko X krát, otočí se pedálové kolečko $X \cdot \frac{20}{48}$ krát, neboť obvod malého ozubeného kolečka je $\frac{20}{48}$ obvodu pedálového ozubeného kolečka. Počet potřebných šlápnutí je roven dvojnásobku tohoto čísla, tj. $X \cdot \frac{20}{48} \cdot 2$.

Dosaďme sem z výsledku (3); dostaneme

$$\frac{2\,500\,000 \cdot 7}{22 \cdot 72} \cdot \frac{20}{48} \cdot 2 = \frac{2\,500\,000 \cdot 7 \cdot 20 \cdot 2}{22 \cdot 72 \cdot 48} =$$

$$= \frac{2\,500\,000 \cdot 7 \cdot 10}{11 \cdot 36 \cdot 48}.$$

To je přibližný počet šlápnutí za jednu hodinu; za jednu minutu je to $\frac{1}{60}$ tohoto čísla, tj.

$$\frac{2\,500\,000 \cdot 7 \cdot 10}{11 \cdot 36 \cdot 48 \cdot 60} = \frac{2\,500\,000 \cdot 7}{11 \cdot 36 \cdot 48 \cdot 6}. \tag{4}$$

Proveďme potřebné výpočty:

$$2\,500\,000 \cdot 7 = 17\,500\,000; \tag{5}$$

$$11 \cdot 36 \cdot 48 \cdot 6 = 11 \cdot 216 \cdot 48 = 114\,048, \tag{6}$$

neboť je

$$\begin{array}{r} 216 \\ \times 48 \\ \hline 864 \\ 1728 \\ \hline 10\,368 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 10\,368 \\ \times\ 11 \\ \hline 10\,368 \\ 103\,68 \\ \hline 114\,048 \end{array}$$

Určeme dále částečný podíl čísel (5) a (6):

$$\begin{array}{l} 17\,500\,000 : 114\,048 \;|\; \underline{153} \\ 6\,095\,20 \\ 392\,800 \\ 50\,656 \end{array}$$

Odpověď. Cyklista musí v každé minutě šlápnout asi 154krát.

b) Počet potřebných šlápnutí pedálem na drahách 4,5 km a 25 km je v témže poměru jako velikosti těchto drah; poměr drah je

$$\frac{4,5}{25} = \frac{0,9}{5}. \tag{7}$$

Počet šlápnutí na dráze 4,5 km vypočteme, když číslo dané vztahem (3′) znásobíme číslem ze vztahu (7); dostaneme postupně

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{2\,500\,000 \cdot 7}{22 \cdot 72} \cdot \frac{0,9}{5} = \frac{5 \cdot 2\,500\,000 \cdot 7 \cdot 0,9}{6 \cdot 22 \cdot 72 \cdot 5} =$$

$$= \frac{5 \cdot 250\,000 \cdot 7 \cdot 9}{6 \cdot 22 \cdot 72 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 250\,000 \cdot 7 \cdot 1}{6 \cdot 22 \cdot 8 \cdot 1} = \frac{1\,750\,000}{48 \cdot 22} =$$

$$= \frac{1\,750\,000}{1\,056}.$$

Tu je

```
1 750 000 :1 056 | 1 657
 694 0
  60 40
   7 600
     208
```

Odpověď. Na dráze 4,5 km je počet šlápnutí cyklisty asi 1660.

Jiné řešení. a) Otočí-li se pedálové kolečko jednou, otočí se zadní kolo $\frac{48}{20} = 2,4$krát; na to, aby se pedálové kolečko otočilo jednou, musí cyklista šlápnout dvakrát.

Při jednom šlápnutí ujede zadní kolo dráhu (v centimetrech)

$$\frac{\pi d \cdot 2,4}{2} \doteq \frac{3,14 \cdot 72 \cdot 2,4}{2} = \frac{542,592}{2} = 271,296 = 271,$$

kde d je průměr pedálového kolečka.

Na dráze 25 km = 2 500 000 cm cyklista šlápne tolikrát, kolik je 2 500 000 : 271; to je přibližně 9225.

Za jednu hodinu tedy šlápne 9225krát a za jednu minutu $9225:60 = 153{,}75$, tj. přibližně 154krát.

b) Poměr drah 4,5 km, 25 km je $\dfrac{4{,}5}{25}$; v témže poměru se změní i počet šlápnutí, tj. číslo 9225; dostaneme

$$9225 \cdot \frac{4{,}5}{25} = 369 \cdot 4{,}5 = 1660{,}5 \doteq 1660.$$

Na dráze 4,5 km musí cyklista šlápnout asi 1660krát.

Podle řešení Veroniky Malé, 8. tř., 2. osš, Turnov. — Jiné řešení jsme ještě dostali od Zdeňka Vaňka, 8. tř., 1. osš, Turnov.

10. Rozhodněte nejprve, pro která čísla a, b, c má smysl výraz

$$V = \frac{(a-b)^2}{c^2 - ca - ab + cb} + \frac{(b-c)^2}{a^2 - ab - ac + bc} + \frac{(c-a)^2}{b^2 - bc - ba + ca}. \qquad (1)$$

Potom dokažte, že pro každou takovou trojici čísel a, b, c je výraz V roven témuž číslu; vypočtěte toto číslo.

Řešení. Platí postupně:

$$c^2 - ca - cb + ab = c(c-a) - b(c-a) = (c-a)(c-b). \qquad (2)$$

Podobně dokážeme, že platí

$$a^2 - ab - ac + bc = (a-b)(a-c), \qquad (3)$$

$$b^2 - bc - ba + ca = (b-c)(b-a). \qquad (4)$$

Jednotlivé zlomky na pravé straně vztahu (1) mají smysl, jestliže jejich jmenovatelé jsou různí od nuly; vzhledem k rozkladům (2), (3) a (4) musí platit

$$(c - a)(c - b) \neq 0, \ (a - b)(a - c) \neq 0,$$
$$(b - c)(b - a) \neq 0.$$

To znamená, že nesmí být $c - a = 0$ nebo $c - b = 0$ nebo $a - b = 0$, tj. nesmí být $c = a$ nebo $c = b$ nebo $a = b$ neboli žádná dvě z čísel a, b, c si nesmějí být rovna; jen pro taková čísla a, b, c platí dále uvedené úvahy.

Společný jmenovatel zlomků na pravé straně vztahu (1) vzhledem ke (2), (3) a (4) je

$$n = (a - b)(b - c)(c - a); \tag{5}$$

protože je $c - b = -(b - c)$, musíme první zlomek v (1) rozšířit číslem $-(a - b)$. Stejně se usoudí, že druhý zlomek v (1) rozšíříme číslem $-(b - c)$ a třetí číslem $-(c - a)$. Dostaneme postupně:

$$V = \frac{-(a - b)(a - b)^2}{n} + \frac{-(b - c)(b - c)^2}{n} +$$
$$+ \frac{-(c - a)(c - a)^2}{n} =$$
$$= -\frac{1}{n}[(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3] =$$
$$= -\frac{1}{n}(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + b^3 - 3b^2c +$$
$$+ 3bc^2 - c^3 + c^3 - 3c^2a + 3ca^2 - a^3) =$$
$$= -\frac{1}{n}[-3(a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2)] =$$
$$= \frac{3}{n}(a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2). \tag{6}$$

Ze vztahu (5) však plyne postupně

$$n = (ab - ac - b^2 + bc)(c - a) =$$
$$= (abc - ac^2 - b^2c + bc^2 - a^2b + a^2c + ab^2 - abc) =$$
$$= -(a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + c^2a - ca^2);$$

po dosazení tohoto výsledku do (6) dostáváme

$$V = -3.$$

Je tedy výraz V roven číslu -3 pro všechny takové trojice čísel a, b, c, pro které má smysl.

Jiné řešení. Daný výraz upravme takto:

$$V = \frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)} + \frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)}. \tag{1}$$

Odtud je vidět, že výraz V má smysl pro všechna taková čísla a, b, c, pro která neplatí žádná z rovností:

$$a = b,\ a = c,\ b = c. \tag{2}$$

Nyní položme

$$a - b = x,\ a - c = y,\ b - c = z;$$

je tedy

$$c - a = -y,\ b - a = -x.$$

Po dosazení obdržíme

$$V = \frac{x^2}{(-y)(-z)} + \frac{z^2}{xy} + \frac{(-y)^2}{z \cdot (-x)}.$$

Po úpravách je

$$V = \frac{x^2}{yz} + \frac{z^2}{xy} - \frac{y^2}{xz} = \frac{x^3 + z^3 - y^3}{xyz}.$$

Dosaďme nyní zpět; dostaneme

$$V = \frac{(a-b)^3 + (b-c)^3 - (a-c)^3}{(a-b)(a-c)(b-c)} =$$

$$= \frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3 - (a^3 - 3a^2c + 3ac^2 - c^3)}{(a^2 - ab - ac + bc)(b-c)} =$$

$$= \frac{-3(a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 - a^2c + ac^2)}{a^2b - ab^2 - abc + b^2c - a^2c + abc + ac^2 - bc^2} =$$

$$= \frac{-3(a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 - a^2c + ac^2)}{a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 - a^2c + ac^2} = -3.$$

Dosadíme-li tedy do výrazu V jakákoli čísla a, b, c, o nichž neplatí rovnosti (2), vyjde nám vždy -3.

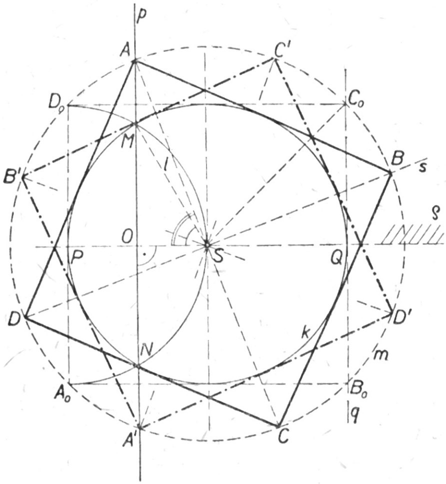
Podle řešení Jitky Třešňákové,
8.a tř., osš, Na dílech,
Gottwaldov — Zlín.

11. Nech je daná kružnica $k \equiv (S, r)$ a priamka p vo vzdialenosti $v = \frac{1}{2}r$ od bodu S.

Zostrojte štvorec $ABCD$, ktorý je opísaný kružnici k a ktorého vrchol A leží na priamke p. Dokážte, že úloha má práve dve riešenia.

Riešenie (obr. 60). *Rozbor.* Ak má úloha riešenie, musí byť daná kružnica k hľadanému štvorcu $ABCD$ vpísaná. Vieme, že polomer kružnice štvorcu vpísanej sa rovná polovici jeho strany; preto v našom prípade musí byť $r = \frac{1}{2}AB$. Každý štvorec

$A_0B_0C_0D_0$, opísaný danej kružnici k, má teda stranu veľkosti $2r$. Polovica SC_0 uhlopriečky takého štvorca je preponou pravouhlého rovnoramenného trojuholníka SC_0Q, ktorého odvesny majú veľkosť r. Úsečka SC_0 je teda zhodná s úsečkou SA (je polovicou uhlopriečky AC hľadaného štvorca); leží teda



Obr. 60.

bod A na kružnici $m \equiv (S, SC_0)$ a podľa požiadavky úlohy aj na priamke p, t. j. je jedným zo spoločných bodov priamky p a kružnice m. Na základe tohto výsledku urobíme konštrukciu.

Konštrukcia (obr. 60). Najprv narysujeme dané útvary. Opíšme kružnicu $k \equiv (S, r)$ a zvoľme na nej bod P. Danú priamku p zvolíme tak, že bude osou úsečky SP. Opíšme teda kružnicu $l \equiv (P, r)$ a označme M, N spoločné body kružníc k, l; priamka MN je zrejme osou úsečky SP a preto je $p \equiv MN$.

Zostrojíme pomocný štvorec $A_0B_0C_0D_0$, opísaný kružnici k, napr. tak, že jeho stredná priečka leží v priamke SP. Označme Q protiľahlý bod k bodu P kružnice k (t. j. $SQ = SP$; SP, SQ sú opačné polpriamky). Stačí, keď zostrojíme len vrchol C_0 pomocného štvorca, t. j. keď zostrojíme pomocný trojuholník SC_0Q. Za tým účelom zvoľme jednu z oboch opačných polrovín vyťatých priamkou SQ; túto polrovinu označme ϱ. Zostrojme teraz bodom Q kolmicu q k priamke SQ; na tejto kolmici q zostrojíme v polrovine ϱ úsečku $QC_0 = r$. Tým sme zostrojili pomocný trojuholník SC_0Q a tým aj polomer SC_0 pomocnej kružnice m (t. j. polovicu uhlopriečky štvorca).

Opíšme kružnicu $m \equiv (S, SC_0)$ a označme $A \not\equiv A'$ priesečníky kružnice k a priamky p. Ďalšiu konštrukciu urobíme pre bod A (pre bod A' sa urobí podobne).

Označme C protiľahlý bod kružnice m k bodu A. Zostrojme kolmicu $s \perp AC$ bodom S a označme B, D jej priesečníky s kružnicou m. Potom je $ABCD$ jeden zo štvorcov, ktorý sme mali zostrojiť.

Teraz zostrojme štvorec $A'B'C'D'$, ktorý je súmerne združený k štvorcu $ABCD$ podľa priamky PSQ. Aj tento štvorec je riešením úlohy.

Dôkaz. Dokážeme, že štvorec $ABCD$ je riešením úlohy. Predovšetkým $ABCD$ je štvorec, lebo jeho uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú, stoja na seba kolmo a sú zhodné (je totiž $SA = SC = SB = SD$). Ďalej bod A skutočne leží na priamke p. Pritom sú štvorce $A_0B_0C_0D_0$, $ABCD$ zrejme zhodné a majú spoločný stred S; preto je k kružnicou vpísanou štvorcu $ABCD$.

Že štvorec $A'B'C'D'$ je riešením úlohy, vyplýva zo súmernosti podľa priamky PSQ.

Diskusia. Podľa konštrukcie bodu C_0 je $SC_0 > SQ$ a teda $SC_0 > r$. Pretože vzdialenosť v stredu S kružnice m od priamky p je $\frac{1}{2}r$, ale polomer SC_0 tejto kružnice je väčší než r, je vzdialenosť v menšia než polomer SC_0. Z toho podľa známej vety z planimetrie vyplýva, že priamka p je sečnicou kružnice m a spoločné body A, A' týchto čiar sú skutočne rôzne.

Ku každému z bodov A, A' možno zostrojiť práve jeden štvorec. Ak sa nám podarí dokázať, že štvorce $ABCD$, $A'B'C'D'$ nesplývajú, bude tým dokázané, že úloha má dve riešenia.

Z predošlého vyplýva, že A, A' sú rôzne body. Dokážeme, že bod D v obr. 60 je rôzny od bodu A'. Podľa konštrukcie je

$$\sphericalangle ASD = 90°. \qquad (1)$$

Zo súmernosti bodov A, A' podľa priamky PSQ vyplýva, že

$$\sphericalangle A'SA = 2 \cdot \sphericalangle PSA. \qquad (2)$$

Podľa konštrukcie bodu M je $SP = PM = SM = r$ a SPM je rovnostranný trojuholník, takže je $\sphericalangle PSM = 60°$. Ale bod A leží zvonku kružnice k na priamke p; preto je $\sphericalangle PSA > 60°$. Preto zo vzťahu (2) dostaneme

$$\sphericalangle A'SA > 120°,$$

kdežto podľa vzťahu (1) je

$$\sphericalangle ASD = 90°.$$

Preto sú SD, SA' rôzne priamky a body D, A' sú rôzne.

Tým sme dokázali, že oba zostrojené štvorce $ABCD$, $A'B'C'D'$ nesplývajú a úloha má dve riešenia.

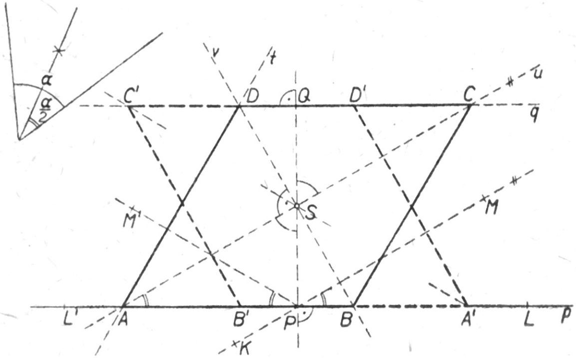
Podobne úlohu riešila Vítězslava Kleinová (8. tř., 2. osš, Turnov), ktorá vyslovila bez dôkazu vetu: Každej kružnici k možno opísať množinu zhodných štvorcov, ktorých strany sa rovnajú priemeru kružnice k. Vrcholy všetkých týchto štvorcov ležia na kružnici m (pozri obr. 60) sústrednej s kružnicou k a s polomerom, ktorý sa rovná polovici uhlopriečky takého štvorca.

12. Buď dána přímka p a mimo ni bod S; dále buď dán ostrý úhel α. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, který má tyto vlastnosti:

(1) Vrcholy A, B leží na přímce p.
(2) Bod S je středem kosočtverce.
(3) Úhel $\sphericalangle DAB = \alpha$.

Dokažte, že úloha má právě dvě řešení.

Řešení (obr. 61). *Rozbor*. Předpokládejme, že jsme sestrojili kosočtverec $ABCD$, který splňuje požadavky vyslovené v úloze.



Obr. 61.

Označme P, Q paty kolmice vedené bodem S k rovnoběžkám AB, CD. Potom v trojúhelníku SAP je odvěsna SP dána svou velikostí i polohou, dále je $\sphericalangle APS = 90°$ a konečně je $\sphericalangle SAP = \frac{1}{2}\alpha$ (víme, že úhlopříčka kosočtverce půlí úhel při vrcholu kosočtverce, z něhož vychází). Na tomto základě provedeme konstrukci.

Konstrukce (obr. 61). Bodem S sestrojme kolmici k přímce p a označme její patu P. Dále sestrojme na polopřímce opačné k polopřímce SP úsečku $SQ = SP$ a bodem Q veďme přímku $q \parallel p$. Označme PL, PL' obě opačné polopřímky, v něž bod P rozděluje přímku p. V polorovině pS sestrojíme úhly $\sphericalangle LPM$, $\sphericalangle L'PM'$, jejichž velikost je $\frac{1}{2}\alpha$.

Konstrukci provedeme jen pro úhel $\sphericalangle LPM$ (pro úhel $\sphericalangle L'PM'$ se konstrukce provede stejně). K přímce PM veďme bodem S rovnoběžku u a označme pořadě A, C průsečíky přímky u s přímkami p, q. Dále bodem S sestrojme kolmici v k přímce u a označme B průsečík přímky v s přímkou p. Bodem A veďme rovnoběžku t s přímkou BC a označme D její průsečík s přímkou q. Potom je $ABCD$ kosočtverec a vyhovuje požadavkům úlohy.

Důkaz. Nejprve musíme dokázat, že čtyřúhelník $ABCD$ je kosočtverec.

Podle provedené konstrukce je $CD \parallel AB$, $AD \parallel BC$, neboť je $q \parallel p$, $t \parallel BC$; je tedy $ABCD$ rovnoběžník.

Nyní je

$$\triangle SAP \cong \triangle SCQ \ (usu), \tag{2}$$

neboť podle konstrukce bodu Q je $SQ = SP$, dále je $\sphericalangle APS = \sphericalangle CQS = 90°$ a $\sphericalangle ASP = \sphericalangle CSQ$ (úhly vrcholové). Z této shodnosti (2) plyne, že je $SA = SC$ a bod S je středem rovnoběžníka $ABCD$. Proto přímka BD prochází bodem S a protože je $SB \equiv v$, prochází přímka v bodem D.

Podle konstrukce je $v \perp u$; v souměrnosti o ose v jsou tedy body A, C souměrně sdruženy a tím i úsečky AB, CB, tj. platí

$$AB = BC. \tag{3}$$

Protože je $ABCD$ rovnoběžník, platí $CD = AB$, $BC = AD$ a vzhledem ke vztahu (3) je $CD = AB = BC = AD$, tj. $ABCD$ je kosočtverec o středu S.

Ještě dokážeme, že $\sphericalangle DAB = \alpha$: Ze souměrnosti kosočtverce $ABCD$ podle osy AC plyne, že

$$\sphericalangle DAB = 2 \cdot \sphericalangle SAB. \tag{4}$$

Ale o úhlu $\sphericalangle SAB$ snadno dokážeme, že je roven $\frac{1}{2}\alpha$.

Označíme-li totiž PK polopřímku opačnou k polopřímce PM, tu podle provedené konstrukce platí [viz vztah (1)]

$$\frac{1}{2}\alpha = \sphericalangle BPM;$$

$$\sphericalangle BPM = \sphericalangle APK \text{ (úhly vrcholové)};$$

$$\sphericalangle APK = \sphericalangle SAB$$

(úhly střídavé při rovnoběžkách PM, $SA \equiv u$). Spojením těchto výsledků dostaneme

$$\sphericalangle \frac{1}{2}\alpha = \sphericalangle SAB$$

a po dosazení do (4) dostáváme $\sphericalangle DAB = 2 \cdot (\frac{1}{2}\alpha)$ neboli

$$\sphericalangle DAB = \alpha,$$

což jsme chtěli dokázat.

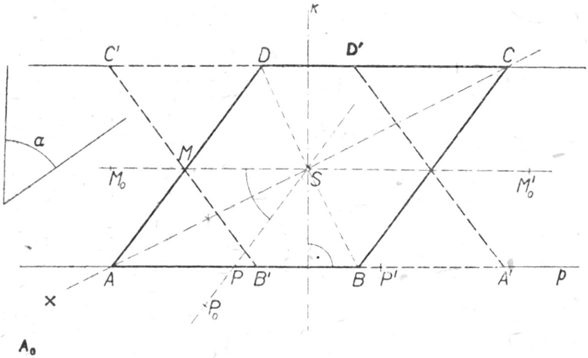
Tím je tedy důkaz správnosti konstrukce proveden.

Diskuse. Protože k úhlu $\sphericalangle LPM$ lze sestrojit právě jeden kosočtverec $ABCD$ a k úhlu $\sphericalangle L'PM'$ rovněž jeden kosočtverec $A'B'C'D'$, má úloha dvě řešení. (Tyto kosočtverce nemohou splynout; jsou totiž zřejmě navzájem souměrně sdružené podle přímky SP a kdyby navzájem splynuly, měly by při vrcholech A, B shodné úhly, tj. úhly pravé. Podle požadavku úlohy však je úhel α ostrý, takže kosočtverce jsou jistě navzájem různé).

Jiné řešení (obr. 62). Označme P, M pořadě středy stran AD, AB. Potom úsečky SP, SM jsou poloviny středních příček kosočtverce $ABCD$ a rovnají se polovině jeho strany; protože je střední příčka kosočtverce rovnoběžná s jednou dvojicí protějších stran kosočtverce, platí v našem případě $SP \parallel AD$, $SM \parallel AB$. Je tedy $APSM$ kosočtverec a AS jeho úhlopříčka;

ta však půlí jeho úhel $\sphericalangle MSP$. Tento úhel je protější k úhlu α při vrcholu A a proto mu je roven. Odtud *konstrukce*:

Sestrojme polopřímku $SM_0 \parallel p$ a úhel $\sphericalangle M_0SP_0 = \alpha$ tak, aby bod P_0 ležel s přímkou p v téže polorovině o hranici SM_0. Označme P průsečík přímek p, SP_0. Pak sestrojme osu SA_0 úhlu $\sphericalangle M_0SP_0$ a označme A společný bod přímek p, SA_0.



Obr. 62.

Na polopřímce opačné k polopřímce PA sestrojme úsečku $PB = PA$. K bodům A, B sestrojme pořadě souměrně sdružené body C, D podle středu S. Potom je $ABCD$ jeden z hledaných kosočtverců.

Důkaz. Čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník, neboť se jeho úhlopříčky půlí a podle konstrukce je SP polovinou strany; proto je $SP \parallel AD$. Označme M průsečík přímek SM_0, AD; protože je $SM \parallel AB$, je SM polovinou střední příčky rovnoběžníka $ABCD$. Ale $APSM$ je také rovnoběžník, neboť je jednak $SP \parallel AD$ a dále je $SM \parallel AB$ (podle provedené konstrukce). Podle konstrukce je však $\sphericalangle MSA = \sphericalangle ASP = \frac{1}{2}\alpha$; známe větu: Jestliže úhlopříčka AS rovnoběžníka $APSM$ půlí jeho úhel při vrcholu

S, je tento rovnoběžník kosočtverec, tj. $AP = AM$; tedy také $2 \cdot AP = 2 \cdot AM$, tj. $AB = AD$ neboli rovnoběžník $ABCD$ je kosočtverec. Tím je důkaz proveden.

Diskuse. Označme SM_0' polopřímku opačnou k polopřímce SM_0. Nyní lze opakovat provedenou konstrukci, avšak místo polopřímky SM_0 užijeme polopřímky SM_0'. Dospějeme ke kosočtverci $A'B'C'D'$. Označíme-li P' střed jeho strany $A'B'$, je $\sphericalangle PSM_0 + \sphericalangle P'SM' < 90° + 90° < 180°$; proto jsou body P, P' různé. Proto strany $AB, A'B'$ nesplývají a dostaneme dva různé kosočtverce $ABCD$, $A'B'C'D'$; tyto kosočtverce jsou zřejmě souměrně sdruženy podle kolmice k vedené bodem S k přímce M_0, M_0' a proto jsou shodné.

Podle řešení Jany Valkounové,
8. tř., 2. osš, Turnov.

9. Úlohy II. kola kategorie D

1. Oceľová tyč má obdĺžnikový prierez o rozmeroch 2,7 cm a 1,5 cm; váha 1 dm³ tejto oceli je 7,6 kg.

Koľko váži táto tyč, ak je jej dĺžka 10 m? Koľko asi takých desaťmetrových tyčí sa vyrobí z 1,4 tuny ocele?

Riešenie. Váha P desaťmetrovej tyče v kilogramoch podľa známej poučky z fyziky sa rovná

$$P = 7{,}6 \cdot V, \qquad (1)$$

kde V je objem tyče v dm³. Objem kvádra v dm³ sa rovná súčinu všetkých troch jeho rozmerov udaných v dm. Pretože rozmery v dm sú

$$0{,}27, \; 0{,}15, \; 100,$$

objem V je

$$V = 0{,}27 \cdot 0{,}15 \cdot 100,$$

$$\text{čiže } V = 27 \cdot 0{,}15.$$

Tu je

$$\begin{array}{l} 27 \cdot 0{,}15 \\ \hline 135 \\ 27 \\ \hline 4{,}05 \end{array}$$

a teda objem $V = 4{,}05$ (dm³). Po dosadení do (1) dostaneme $P = 7{,}6 \cdot 4{,}05$ (v kg); tu je

$$\begin{array}{r} 7{,}6 \cdot 4{,}05 \\ \hline 304 \\ 380 \\ \hline 30{,}780 \end{array}$$

Desaťmetrová tyč váži asi 31 kg.

Teraz vypočítame, koľko asi tyčí sa vyrobí z 1,4 tuny ocele. Platí 1,4 t = 1400 kg. Počet tyčí sa rovná celistvej časti podielu 1400:31 (pravda, približne). Tu je

$$\begin{array}{l|l} 1400:31 & \underline{45} \\ 160 & \\ 5 & \end{array}$$

Z 1,4 t ocele sa vyrobí asi 45 tyčí uvažovaného druhu.

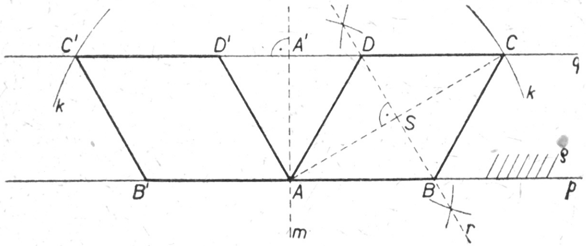
2. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, jestliže je dána velikost jeho výšky $v = 4{,}1$ cm a jestliže jeho úhlopříčka $AC = 2\,v$. Popište postup konstrukce.

Řešení (obr. 63). Nechť $ABCD$ je hledaný kosočtverec. Pak $AC = 2\,v$ a vzdálenost obou rovnoběžek AB, CD je v. Leží tedy bod C na kružnici $k \equiv (A, 2\,v)$ a dále na přímce $q \equiv CD$ rovnoběžné s přímkou $p \equiv AB$, přičemž vzdálenost těchto rovnoběžek p, q je právě v. Odtud *konstrukce*:

Zvolme přímku p a na ní bod A. Dále zvolme jednu z polorovin vyťatých přímkou p a označme ji ϱ. Požadujme, aby bod B padl na přímku p a bod C do poloroviny ϱ. Sestrojme bodem A přímku $m \perp p$ a na ní v polorovině ϱ sestrojme úsečku $AA' = v$. Bodem A' veďme přímku $q \parallel p$.

Nyní opišme kružnici $k \equiv (A, 2v)$ a označme C společný bod přímky q a kružnice k.

Dále sestrojme osu r úsečky AC (viz obr. 63); označme B společný bod přímek p, r a dále S střed úsečky AC. Na polo-



Obr. 63.

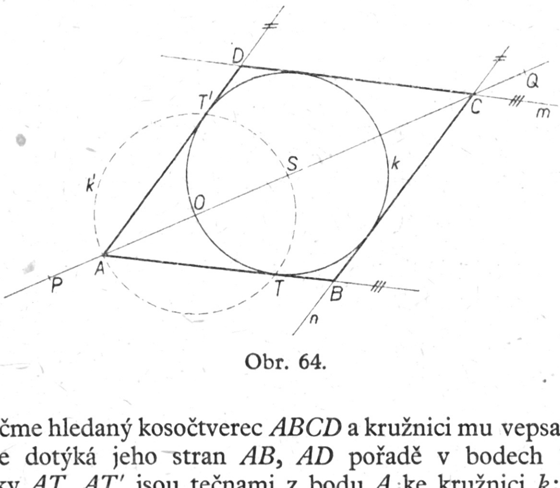
přímce opačné k polopřímce SB sestrojme úsečku $SD = SB$. Potom je $ABCD$ kosočtverec, který vyhovuje požadavkům úlohy.

Důkaz. Čtyřúhelník $ABCD$ je podle konstrukce rovnoběžník, neboť je $SA = SC$, $SB = SD$ (úhlopříčky se půlí). Tento rovnoběžník má podle konstrukce kolmé úhlopříčky a proto je to kosočtverec (ostatně zřejmě jsou trojúhelníky SAB, SCB, SDC, SCD shodné podle věty *sus* a proto je $AB = BC = CD = DA$). (Poznámka. Je tedy $CD \parallel AB$, tj. bod D leží na přímce q.)

Rovnoběžky p, q dovedeme vždy sestrojit. Kružnice $k \equiv (A, 2v)$ protne přímku q ve dvou různých bodech C, C', neboť vzdálenost středu A kružnice k od přímky q je v, což je menší než poloměr $2v$ kružnice k. Bod C lze proto sestrojit. Daná úloha má tedy řešení.

Při zvoleném umístění dostaneme ještě druhý kosočtverec $AB'C'D'$, který je souměrně sdružený s kosočtvercem $ABCD$ podle přímky AA'. Přitom je $B \neq B'$; jsou tedy oba tyto kosočtverce různé a protože jsou souměrně sdružené, jsou navzájem shodné. Proto má úloha v podstatě jediné řešení.

Jiné řešení (obr. 64). *Rozbor*. Víme, že kosočtverci lze vepsat kružnici; její průměr je roven velikosti výšky kosočtverce.



Obr. 64.

Označme hledaný kosočtverec $ABCD$ a kružnici mu vepsanou k. Ta se dotýká jeho stran AB, AD pořadě v bodech T, T'. Přímky AT, AT' jsou tečnami z bodu A ke kružnici k; proto AST, AST' jsou pravoúhlé trojúhelníky o společné přeponě AS a proto body T, T' leží na Thaletově kružnici nad úsečkou AS.

Konstrukce. Narýsujeme kružnici $k \equiv (S, \frac{1}{2} v)$ a libovolnou přímku PSQ. Na polopřímkách SP, SQ sestrojíme úsečky $SA = SC = v$. Nad úsečkou AS jako průměrem sestrojíme pomocnou kružnici $k' \equiv (O, \frac{1}{2} v)$ a označíme T, T' společné body kružnic k, k' (viz obrázek). Dále bodem C sestrojíme přímky $m \parallel AT$, $n \parallel AT'$ a označíme pořadě B, D společné body dvojic přímek AT, n a AT', m. Potom je $ABCD$ hledaný kosočtverec.

Důkaz. Z konstrukce vyplývá, že polopřímka AS půlí úhel $\sphericalangle TAT'$ (známá vlastnost tečen vedených z bodu ke kružnici), tj. platí

$$\sphericalangle SAT = \sphericalangle SAT'. \qquad (*)$$

Protože platí $AT \parallel m$, $AT' \parallel n$ neboli $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, je $ABCD$ rovnoběžník, v němž je bod S středem úhlopříčky AC; proto je bod S jeho středem. Poněvadž podle vztahu (*) půlí úhlopříčka AC úhel při vrcholu A, je tento rovnoběžník kosočtverec (přímka AC je jeho osou souměrnosti). Tím je důkaz proveden.

Úloha má zřejmě při zvoleném umístění přímky PSQ jediné řešení, neboť je $SA = 2v > v$, takže lze z bodu A ke kružnici k vést právě dvě různé tečny AT, AT'.

Podle řešení Josefa Sádovského,
8.b tř., 18.osš, Praha-Košíře.

3. Daný je štvorec $MNPQ$ so stranou 4,5 cm (umiestite ho doprostred polarchu).

Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC ako v obr. 65 a jeho stred označte S (teda je $A \equiv M$, $B \equiv N$ a bod C leží zvonku daného štvorca). Trojuholník ABC sa kotúľa po obvode štvorca $MNPQ$ takto:

Najprv sa otočí okolo bodu N do polohy $A_1B_1C_1$. Potom sa trojuholník $A_1B_1C_1$ otočí okolo bodu P a pri ďalších pohyboch sa otočí okolo bodov Q a M; po otočení okolo bodu M sa trojuholník $A_4B_4C_4$ pokryje so svojou pôvodnou polohou ABC, ale tak, že je $A_4 \equiv C$.

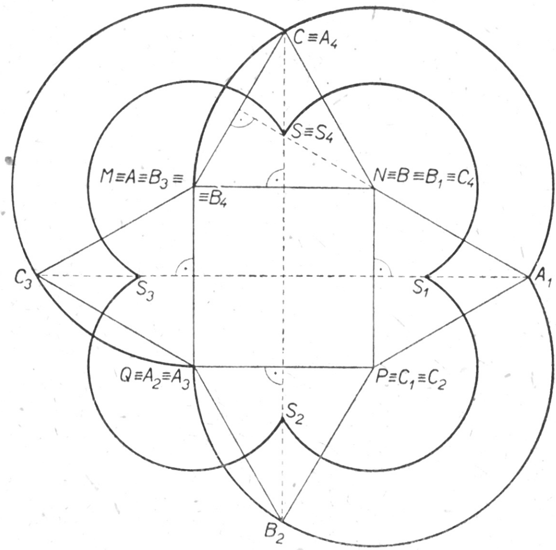
Narysujte:

a) Polohy, do ktorých príde trojuholník vždy po vykonaní jednotlivých otočení.

b) Dráhu, ktorú opíše bod S.

c) Dráhu, ktorú opíše bod A.

Riešenie vidieť na obrázku 65.



Obr. 65.

4. Je dán výraz:

$$\frac{2b(a-1)}{(a-2)(b^2-1)} - \frac{a+b}{ab+a-2b-2} - \frac{a-b}{ab-a-2b+2}. \qquad (1)$$

Zjednodušte jej a dokažte, že je roven nule. Co musí platit o číslech a, b, aby daný výraz měl smysl?

Řešení. Vypočteme společného jmenovatele všech tří zlomků daného výrazu (1). Platí tyto rozklady:

$$\left.\begin{aligned} (a-2)(b^2-1) &= (a-2)(b+1)(b-1); \\ ab+a-2b-2 &= a(b+1)-2(b+1) = \\ &= (a-2)(b+1); \\ ab-a-2b+2 &= a(b-1)-2(b-1) = \\ &= (a-2)(b-1). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Společný násobek těchto výrazů je

$$n = (a-2)(b-1)(b+1).$$

Zlomky daného výrazu (1) rozšíříme tedy pořadě těmito výrazy

$$1;\ b-1;\ b+1.$$

Obdržíme

$$\frac{2b(a-1)}{(a-2)(b^2-1)} - \frac{a+b}{ab+a-2b-2} -$$

$$- \frac{a-b}{ab-a-2b+2} =$$

$$= \frac{2b(a-1)}{n} - \frac{(a+b)(b-1)}{n} - \frac{(a-b)(b+1)}{n} =$$

$$= \frac{2ab-2b-(ab-a+b^2-b)-(ab+a-b^2-b)}{n} =$$

$$= \frac{2ab-2b-ab+a-b^2+b-ab-a+b^2+b}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Protože každý z jmenovatelů daných zlomků musí být různý od nuly, musí každý z činitelů rozkladů (2) být různý od nuly, tj. musí platit

$$a - 2 \neq 0, \; b - 1 \neq 0, \; b + 1 \neq 0$$

neboli

$$a \neq 2, \; b \neq 1, \; b \neq -1.$$

Nesmí tedy platit ani jeden ze vztahů

$$a = 2, \; b = 1, \; b = -1.$$

Tím je řešení úlohy provedeno.