15. ročník matematické olympiády

V. Soutěžní úlohy II. kola

In: Jan Vyšín (editor); Vlastimil Macháček (editor): 15. ročník matematické olympiády. Zpráva o řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1965-1966. 8. mezinárodní matematická olympiáda. (Czech). Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1967. pp. 115–139.

V. Soutěžní úlohy II. kola

1. *KATEGORIE A*

1. Určete všechny dvojice přirozených čísel x, y, která jsou řešením rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18} . \tag{1}$$

Řešení. Rovnice (1) má v oboru přirozených čísel táž řešení jako rovnice

$$18(x + y) = xy . \tag{2}$$

Rovnice (2) má v oboru přirozených čísel táž řešení jako rovnice

$$y = \frac{18x}{x - 18} . \tag{3}$$

Rovnici (3) upravíme takto:

$$y = \frac{18x - 18^2 + 18^2}{x - 18} = 18 + \frac{18^2}{x - 18} . \tag{4}$$

Z (3) vyplývá, že je $x > 18$, neboť je $x > 0$, $y > 0$. Protože y je celé číslo, je podle (4) $x - 18$ kladný dělitel čísla $18^2 = 324$. Sestavíme tabulku:

$x - 18$	1	2	3	4	6	9	12	18
x	19	20	21	22	24	27	30	36
y	342	180	126	99	72	54	45	36

Dalších osm řešení dostaneme výměnou x, y. O tom, že nalezené dvojice čísel x, y jsou skutečně řešením rovnice (1), se přesvědčíme *obrácením postupu.*

2. Množina všech přímek v rovině, jejichž vzdálenosti od bodů $A = [1,0]$, $B = [0,0]$ (v tomto pořadí) mají rozdíl druhých mocnin rovný číslu 1, je množina všech tečen paraboly

$$y^2 = 2x\,. \tag{1}$$

Dokažte.

Řešení. Označme u (v) vzdálenost přímky dané množiny $\mathbf{M}$ od bodu A (B). Podle podmínky úlohy je

$$u^2 - v^2 = 1\,. \tag{2}$$

Budiž

$$ax + by + c = 0 \tag{3}$$

rovnice libovolné přímky množiny $\mathbf{M}$. Pak platí

$$u = \frac{|a + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,, \qquad v = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,. \tag{4}$$

Dosadíme-li z (4) do (2), vyjde po úpravě

$$a^2 + 2ac = a^2 + b^2$$

a dále

$$2ac = b^2\,. \tag{5}$$

Znásobíme-li rovnici (3) číslem $2a$ a dosadíme-li z (5) za $2ac$, dostaneme

$$2a^2x + 2aby + b^2 = 0\,, \tag{6}$$

což je rovnice kterékoli přímky množiny $\mathbf{M}$. Zkouškou se přesvědčíme, že každá přímka daná rovnicí (6) [kde ovšem je $a \neq 0$] splňuje podmínku (2). Je tedy (6) rovnicí množiny přímek $\mathbf{M}$.

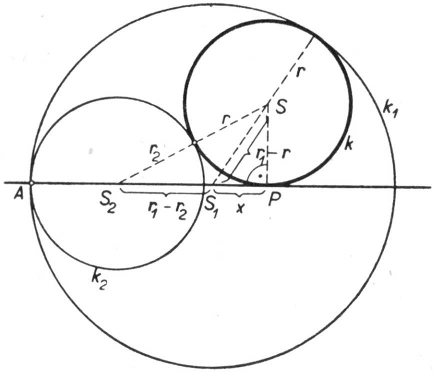
Zkoumejme společné body přímky (6) a paraboly (1). Do rovnice (6) dosadíme za $2x$ z (1); vyjde:

$$a^2y^2 + 2aby + b^2 = 0\,. \tag{7}$$

Rovnice (7) má diskriminant $4a^2b^2 - 4a^2b^2 = 0$ a proto má jediný kořen y. Přímka (6), která není rovnoběžná s osou x ($a \neq 0$), je tedy tečnou paraboly (1).

V množině **M** je po jedné přímce každého směru. Rovnoběžku s osou y dostaneme pro $b = 0$. Přímku o směrnici $\lambda \neq 0$ dostaneme pro $a = -\lambda$, $b = 1$. Protože parabola (1) má *jedinou* tečnu každého směru různého od směru osy x a protože každá přímka množiny **M** je tečnou paraboly a protože množina **M** obsahuje přímky všech směrů různých od (x), náleží tečna paraboly (1) množině **M**.

3. Je daná kružnica $k_1 \equiv (S_1;\, r_1)$ a kružnica $k_2 \equiv (S_2;\, r_2)$, kde $r_2 < r_1$. Tieto kružnice majú vnútorný dotyk v bode A. Zostrojte kružnicu k, ktorá má vnútorný dotyk s kružnicou k_1, vonkajší dotyk s kružnicou k_2 a dotýka sa priamky AS_1.



Obr. 53.

Riešenie (obr. 53). Nech je $k \equiv (S; r)$ a nech P je bod dotyku kružnice k s priamkou AS_1. Ďalej označme x číslo, pre ktoré $|x| = S_1P$ a také, že $x < 0$, ak bod P leží na polpriamke S_1A a $x > 0$ pre P na polpriamke opačnej k polpriamke S_1A. Pre $P \equiv S_1$ je samozrejme $x = 0$. Potom pri každom usporiadaní bodov S_1, S_2, P bude platiť

$$S_2P = r_1 - r_2 + x\,.$$

Z trojuholníka S_1PS dostaneme rovnosť $(r_1 - r)^2 = r^2 + x^2$, čiže

$$2r_1r = r_1^2 - x^2\,. \tag{1}$$

Z trojuholníka S_2PS dostaneme $(r_2 + r)^2 = r^2 + (r_1 - r_2 + x)^2$, čiže

$$2r_2r = r_1^2 - 2r_1r_2 + 2(r_1 - r_2)\,x + x^2\,. \tag{2}$$

Z rovníc (1) a (2) vylúčime r. Vyjde kvadratická rovnica pre x:

$$(r_1 + r_2)\,x^2 + 2r_1(r_1 - r_2)\,x + r_1^3 - 3r_1^2r_2 = 0\,. \tag{3}$$

Diskriminant rovnice (3) je

$$D = 4r_1^2(r_1 - r_2)^2 - 4(r_1 + r_2)\,r_1^2(r_1 - 3r_2) = \\ = 4r_1^2\,.\,4r_2^2 = 16r_1^2r_2^2\,. \tag{4}$$

Pomocou (4) dostaneme dva korene rovnice (3)

$$x = r_1\,.\,\frac{3r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \tag{5}$$

a $x' = -r_1$ (ktorý nevyhovuje).

Úloha má riešenie práve vtedy, keď je $|x| < r_1$, t. j. ak platí podľa (5)

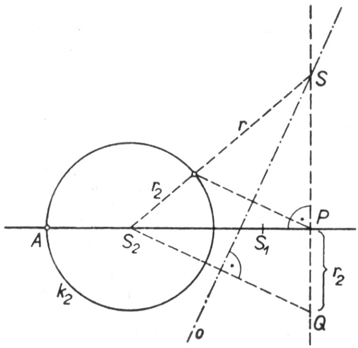
$$\frac{|3r_2 - r_1|}{r_1 + r_2} < 1\,.$$

Táto nerovnosť je ekvivalentná s dvojicou nerovností

$3r_2 - r_1 < r_1 + r_2$ čiže $r_2 < r_1$ a $r_1 - 3r_2 < r_1 + r_2$ čiže $0 < r_2$, ktoré sú vždy splnené.

Skúškou sa presvedčíme, že číslo r z rovnice (1) vyhovuje podmienkam úlohy (x môže vyjsť aj záporné). K tomuto číslu r prislúchajú dve riešenia súmerne združené podľa priamky AS_1.

Konštrukcia. Pomocou podobných trojuholníkov (štvrtá geometrická úmerná) zostrojíme úsečku dĺžky $|x|$, pomocou nej bod P a potom podľa obr. 54 bod S. Priamka o je os úsečky S_2Q, kde $PQ = r_2$.



Obr. 54.

4. Dokažte věty:

a) Má-li rovnice

$$z\bar{z} + az + b = 0\,, \tag{1}$$

kde a, b jsou komplexní čísla, aspoň jeden kořen tvaru ki (k je reálné číslo), pak platí

$$(a + \bar{a})(a\bar{b} + \bar{a}b) = (b - \bar{b})^2\,. \tag{2}$$

b) Platí-li pro koeficienty a, b rovnice (1) podmínka (2), je-li $a \neq 0$ a rovnice (1) řešitelná, pak má aspoň jeden kořen tvaru ki (k je reálné číslo).

Řešení. a) Vyhovuje-li číslo z rovnici (1), vyhovuje i rovnici konjugované

$$\bar{z}z + \bar{a}\bar{z} + \bar{b} = 0\,. \tag{1'}$$

Odečtením rovnic (1), (1′) dostaneme

$$az - \bar{a}\bar{z} + b - \bar{b} = 0\,. \tag{3}$$

Je-li $z = k$i (k reálné), je $\bar{z} = -z$; dosadíme-li za $\bar{z}$ do rovnice (3), vyjde

$$(a + \bar{a})z = \bar{b} - b\,. \tag{4}$$

Nyní je třeba eliminovat z z rovnic (1), (4). S použitím vztahu $\bar{z} = -z$ přepíšeme (1) do tvaru

$$-z^2 + az + b = 0; \tag{1''}$$

abychom se vyhnuli dělení číslem $a + \bar{a}$, o němž nevíme, zda je různé od nuly či nikoli, znásobíme rovnici (1″) číslem $(a + \bar{a})^2$ a použijeme (4); dostaneme

$$-(b - \bar{b})^2 + a(a + \bar{a})(\bar{b} - b) + (a + \bar{a})^2 b = 0$$

a odtud po jednoduché úpravě plyne (2).

b) Při dokazování věty b) nám pomůže rovnice (4). Z odstavce a) totiž víme, že má-li rovnice (1) kořen $z = k$i, pak platí vztah (4); je-li mimo to ještě $a + \bar{a} \neq 0$, dá se tento kořen vypočítat z rovnice (4); vyjde

$$z = \frac{\bar{b} - b}{a + \bar{a}}\,. \tag{5}$$

Budeme tedy nejprve předpokládat, že platí (2), mimo to že je $a + \bar{a} \neq 0$, a zkusíme, zda číslo z dané vzorcem (5) vyhovuje rovnici (1). Dosadíme za z do levé strany (1); po úpravě vyjde

$$\frac{1}{(a+\bar{a})^2}\left[-(b-\bar{b})^2 + a(a+\bar{a})(\bar{b}-b) + (a+\bar{a})^2 b\right]. \qquad (6)$$

Protože platí (2), zjistíme krátkou úpravou, že výraz v lomených závorkách v (6) je roven nule. Číslo (5) je tedy skutečně kořenem rovnice (1).

Zbývá vyšetřit případ, že je $a + \bar{a} = 0$, neboli $\bar{a} = -a$. Z podmínky (2) pak plyne $\bar{b} = b$. Protože předpokládáme, že rovnice (1) má řešení, platí to i o rovnicích (1′), (3). Vzhledem k podmínkám $\bar{a} = -a$, $\bar{b} = b$ nabude (3) tvaru

$$a(z + \bar{z}) = 0 .$$

Protože je $a \neq 0$, je $z + \bar{z} = 0$, tj. kořen rovnice (1) je $z = ki$.

2. *KATEGORIE B*

1. Jsou-li a, b dvě přirozená čísla taková, že $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ je rovněž přirozené číslo, pak každé z čísel a, b je druhou mocninou přirozeného čísla. Dokažte.

Řešení. Podle předpokladu je

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = n \text{ (kde } n \text{ je přirozené číslo).}$$

Dvojím umocněním a úpravou dostaneme

$$n^4 - 2n^2(a+b) + (a-b)^2 = 0 ,$$

tj.

$$(a-b)^2 = n^2\,[2(a+b) - n^2] . \qquad (1)$$

Číslo $2(a+b)-n^2$ je podle (1) rovno $\dfrac{(a-b)^2}{n^2}$, je to tedy druhá mocnina racionálního čísla; protože je *celé*, je to druhá mocnina přirozeného čísla p. Je tedy $2(a+b)-n^2=p^2$ neboli

$$2(a+b)=n^2+p^2\,. \tag{2}$$

Z (2) vyplývá, že čísla n, p jsou téže parity, neboť na levé straně je číslo sudé. Dosadíme-li do (1) a (2) a předpokládáme-li $a \geqq b$, vyjde $a-b=np$, neboli

$$2(a-b)=2np\,. \tag{3}$$

Spojením (2), (3) dostaneme

$$4a=(n+p)^2, \quad 4b=(n-p)^2\,.$$

Čísla $n+p$, $n-p$ jsou sudá, $\dfrac{n+p}{2}$, $\dfrac{n-p}{2}$ celá; je tedy

$$a=\left(\frac{n+p}{2}\right)^2, \qquad b=\left(\frac{n-p}{2}\right)^2,$$

jak jsme měli dokázat.

2. Nech je a pevné reálne číslo, pre ktoré platí $0<a<1$. Potom pre všetky x také, že $-1<x<1$ platí nerovnosť

$$\frac{(1-ax)^2}{1-x^2} \geqq 1-a^2\,. \tag{1}$$

Dokážte ju a ukážte, že rovnosť nastane len pre $x=a$. Nakreslite graf funkcie $y=\dfrac{(1-ax)^2}{1-x^2}$ pre $a=\dfrac{1}{2}$.

Riešenie. Keďže $1-x^2>0$, z nerovnosti (1) vyplýva

$$(1-ax)^2 \geqq (1-a^2)(1-x^2)\,, \tag{2}$$

stadiaľ

$$1 - 2ax + a^2x^2 \geqq 1 - a^2 - x^2 + a^2x^2 \,, \tag{3}$$

z čoho

$$a^2 - 2ax + x^2 \geqq 0 \,, \tag{4}$$

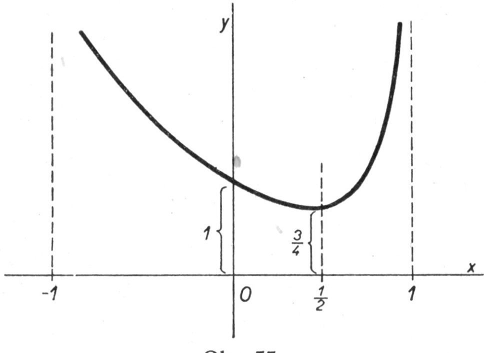
čiže

$$(a - x)^2 \geqq 0 \,. \tag{4'}$$

Obrátene zo (4′) čiže zo (4) vyplýva (3), z (3) vyplýva (2) a pretože $1 - x^2 > 0$, vyplýva z (2) vzťah (1).

Ak nastane rovnosť v (1), nastane rovnosť i v (4′), t. j. $x = a$.

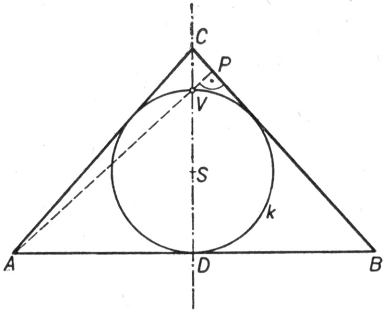
Graf funkcie $y = \dfrac{(1 - ax)^2}{1 - x^2}$ pre $a = \dfrac{1}{2}$ je na obr. 55.



Obr. 55.

3. Vypočtěte poměr délek stran rovnoramenného trojúhelníka, jehož průsečík výšek leží na kružnici vepsané.

Řešení. Budiž ABC rovnoramenný trojúhelník se základnou AB (obr. 56), který má uvedenou vlastnost. Pak průsečík výšek V leží na výšce CD (D je střed základny AB); to je důsledek souměrnosti $\triangle ABC$ podle přímky CD. Označme velikosti stran a úhlů trojúhelníka obvyklým způsobem a označme ϱ



Obr. 56.

poloměr vepsané kružnice k a P patu výšky AV. Pak platí

$$\sphericalangle ACD = 90° - \sphericalangle CAD = 90° - \alpha = \\ = 90° - \sphericalangle CBD = \sphericalangle VAD\,,$$

tj.

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle VAD$$

a proto

$$\triangle ACD \sim \triangle VAD\,. \tag{1}$$

Z (1) plyne

$$CD : AD = AD : VD$$

neboli

$$2\varrho v = \frac{c^2}{4}\,, \tag{2}$$

kde v značí velikost výšky CD. Dále je podle známého vzorce pro obsah trojúhelníka*)

$$\varrho = \frac{cv}{2\left(a + \frac{c}{2}\right)} = \frac{cv}{2a + c} \tag{3}$$

*) $P = \varrho s$, kde P je obsah trojúhelníka, s jeho poloviční obvod.

a konečně podle Pythagorovy věty

$$v^2 = a^2 - \frac{c^2}{4} . \tag{4}$$

Dosadíme z (3) do (2), tj. eliminujeme ϱ; vyjde

$$\frac{2cv^2}{2a + c} = \frac{c^2}{4} . \tag{5}$$

Dosadíme z (4) do (5), tj. eliminujeme v; vyjde

$$2c\left(a^2 - \frac{c^2}{4}\right) = (2a + c)\,\frac{c^2}{4} . \tag{6}$$

Rovnici (6) dělíme číslem c; po další úpravě vyjde

$$8a^2 - 2ac - 3c^2 = 0 . \tag{7}$$

Rovnice (7) je kvadratická rovnice pro poměr $\dfrac{a}{c}$; jejím řešením dostaneme

$$\frac{a}{c} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{16} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{3}{4} \\[2ex] -\dfrac{1}{2} \end{array} \right. .$$

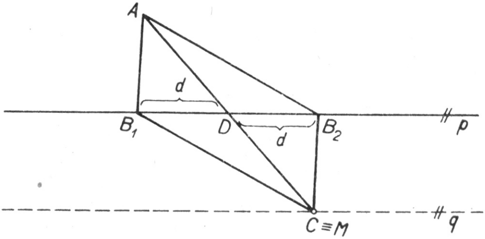
Záporný kořen nevyhovuje; je tedy $a : c = 3 : 4$.

Zkouška se provede obrácením postupu.

4. Sú dané dva body A, M, priamka p, ktorá ich oddeľuje, a kladné číslo d. Zostrojte trojuholník ABC tak, aby vrchol B ležal na priamke p, ťažnica t_b mala dĺžku d a ležala na priamke p a aby priamka BC obsahovala bod M.

Riešenie. Označme D stred strany AC. Vrchol C je obrazom bodu D v rovnoľahlosti $\varkappa$ so stredom A a koeficientom 2. Preto leží vrchol C na priamke $q \parallel p$, ktorá je obrazom priamky p v rovnoľahlosti $\varkappa$.

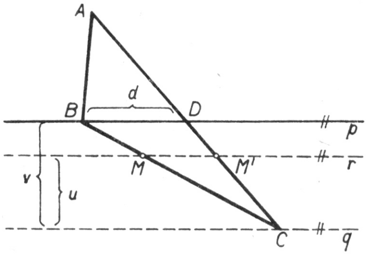
1. Ak leží bod M na priamke q, je $C \equiv M$. Zostrojíme priesečník D priamok AC, p a na priamke p dva body B_1, B_2 tak, aby bolo $B_1D = B_2D = d$ (obr. 57). Úloha má dve riešenia.



Obr. 57.

2. Ak neleží bod M na priamke q, vedieme ním priamku $r \parallel q$. Ak je $\triangle ABC$ riešením úlohy, pretne priamka r priamku AC v bode M' (obr. 58) a platí

$$\triangle CBD \sim \triangle CMM' \, ;$$



Obr. 58.

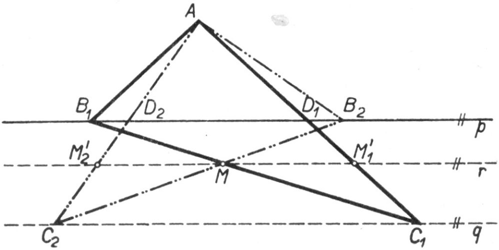
skadiaľ

$$MM' : BD = CM : CB = u : v \, , \qquad (1)$$

kde v je vzdialenosť rovnobežiek p, q, u je vzdialenosť rovnobežiek q, r. Ak v (1) dosadíme $BD = d$, dostaneme

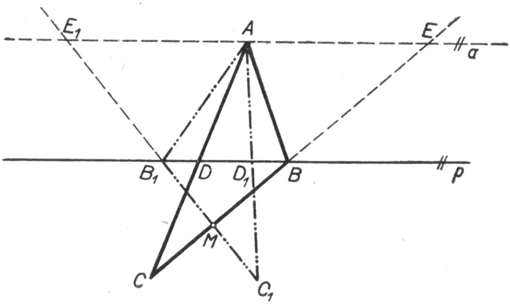
$$MM' = \frac{du}{v},$$

z čoho vieme zostrojiť úsečku MM', bod M' a vrcholy C, B. Úloha má tiež v tomto prípade 2 riešenia (obr. 59). Bod M môže ležať mimo pásu (pq).



Obr. 59.

Iné riešenie. Rozbor: Predpokladajme, že sme hľadaný trojuholník ABC zostrojili (obr. 60). Stred strany AC označme



Obr. 60.

D. Platí $D = p \, . \, AC$, $BD = d$. Bodom A veďme priamku $a \parallel p$. Jej priesečník s priamkou $BM \equiv BC$ označme E. Platí

$$EB : BC = AC : DC = 1 \, .$$

Z toho vyplýva, že $EB = BC$, čo znamená, že ťažnica BD je strednou priečkou trojuholníka AEC a teda platí

$$AE = 2 \, DB = 2d \, .$$

Z toho vyplýva konštrukcia: Bodom A vedieme priamku a rovnobežnú s priamkou p. Na priamke a zostrojíme bod E, pre ktorý platí $AE = 2d$. Priesečník priamky EM s priamkou p označíme B. Tento priesečník vždy existuje, pretože podľa predpokladu body A, M a teda aj body E, M ležia v opačných polrovinách s hraničnou priamkou p. Na polpriamke BM zostrojíme bod C, pre ktorý platí $BC = EB$. Body A, B, C sú vrcholmi hľadaného trojuholníka.

Dôkaz: Podľa konštrukcie body B, D a teda aj ťažnica t_b ležia na priamke p, bod M leží na priamke BC, $AE = 2d$, $BC = EB$ a $AE \parallel p$. Z toho ďalej vyplýva, že $AD : DC = EB : BC = 1$ a teda $AD = DC$. To znamená, že bod D je stredom úsečky AC, bod B je stredom úsečky EC a ťažnica BD je strednou priečkou trojuholníka ACE. Podľa vlastností strednej priečky je $BD = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} 2d = d$.

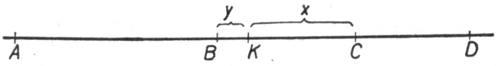
Zostrojený trojuholník vyhovuje teda všetkým podmienkam úlohy.

Diskusia: Na priamke a existujú dva rôzne body, ktorých vzdialenosť od bodu A je $2d$. Z toho vyplýva, že úloha má dve riešenia.

Riešila *Sabina Sitárová*, žiačka II. roč. SVŠ v Turčianskych Tepliciach

3. *KATEGORIE C*

1. Pri priamej ceste ležia za sebou štyri obce A, B, C, D. Medzi obcami B, C je križovatka K. Táto križovatka leží uprostred medzi A, D a v tretine cesty z C do A. Vzdialenosť CD je menšia než 10 km, zato vzdialenosť AB je väčšia než 16 km. Vzdialenosti každých dvoch miest v km sú vyjadrené celými číslami. Vypočítajte ich.



Obr. 61.

Riešenie (obr. 61): Označme $KC = x$, $BK = y$. Potom je $AK = 2 \,.\, CK = 2x$ a teda $CD = DK - CK = x$. Ďalej je $AB = AK - BK = 2x - y$, $AD = 4x$.

Okrem toho platí $CD < 10$, $AB > 16$, t. j.

$$x < 10\,, \tag{1}$$

$$2x - y > 16\,. \tag{2}$$

Z (2) vyplýva

$$x > \frac{16 + y}{2} > 8\,. \tag{3}$$

Z (1) a (3) dostaneme $x = 9$ a ďalej z (2) potom je $y < 2$.

Je teda $x = 9$, $y = 1$, t. j.

$AB = 17$, $BC = 10$, $CD = 9$, $AD = 36$.

Výsledok overíme skúškou.

2. Je dána soustava dvou rovnic o dvou neznámých x, y:

$$\left.\begin{aligned} (a - 1)\,x + 2y &= 3b - 1\,, \\ (b + 4)\,x + 4y &= 3a - 2\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Zvětšíme-li každý z parametrů a, b o jednu, dostaneme novou soustavu, která má nekonečně mnoho řešení. Vypočtěte parametry a, b a řešení soustavy (1).

Řešení. Nová soustava zní

$$\begin{aligned} ax + 2y &= 3b + 2\,, \\ (b + 5)x + 4y &= 3a + 1\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Podle textu úlohy má soustava (2) nekonečně mnoho řešení. Je tedy druhá rovnice (2) dvojnásobkem první rovnice (2) (viz koeficienty při y). Platí tedy

$$\begin{aligned} b + 5 &= 2a\,, \\ 3a + 1 &= 2(3b + 2)\,, \end{aligned} \tag{3}$$

po úpravě

$$\begin{aligned} 2a - b &= 5\,, \\ a - 2b &= 1\,. \end{aligned}$$

Soustava (3) má jediné řešení $a = 3$, $b = 1$; to jsou hledané hodnoty parametrů a, b.

Dosadíme-li $a = 3$, $b = 1$ do (1), dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x + y &= 1\,, \\ 5x + 4y &= 7\,. \end{aligned} \tag{4}$$

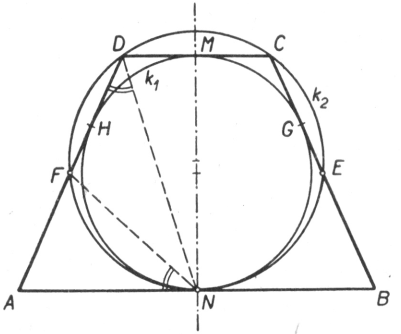
Soustava (4) má jediné řešení $x = 3$, $y = -2$.

3. Rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ má tyto vlastnosti:

1. jeho základna CD má délku 1;
2. lze mu vepsat kružnici;
3. kružnice, která prochází vrcholy C, D a dotýká se přímky AB, prochází středy obou ramen.

a) Vypočtěte délky AB, $BC = AD$.

b) Sestrojte lichoběžník $ABCD$.



Obr. 62.

Řešení (obr. 62). a) Označme délky stran lichoběžníka obvyklým způsobem $AB = a$, $BC = AD = b$; podle textu úlohy je $CD = 1$. Body E, F jsou po řadě středy ramen BC, AD a body G, H po řadě dotykové body kružnice k_1 na těchto ramenech. Z vlastnosti tečen kružnice plyne

$$AH = BG = AN = BN = \frac{a}{2}, \qquad (1)$$

$$DH = CG = DM = CM = \frac{1}{2}; \qquad (2)$$

přitom M, N jsou po řadě středy základen CD, AB. Protože je $AH + DH = BG + CG = b$, plyne z (1), (2) $\frac{a}{2} + \frac{1}{2} = b$, neboli

$$a + 1 = 2b. \qquad (3)$$

$\sphericalangle FNA$ je úsekový úhel nad týmž obloukem FN jako obvodový úhel $\sphericalangle FDN$. Proto platí podle věty *uu*

$$\triangle ADN \sim \triangle ANF. \qquad (4)$$

Z (4) plyne $AD : AN = AN : AF$, neboli $b : \frac{a}{2} = \frac{a}{2} : \frac{b}{2}$, tj.

$$a^2 = 2b^2 . \tag{5}$$

Dosadíme-li do (5) z (3), dostaneme

$$2a^2 = (a + 1)^2 ,$$

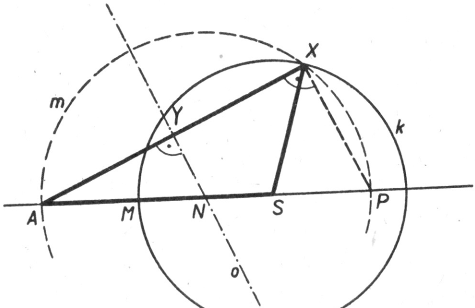
tj.

$$a^2 - 2a - 1 = 0 . \tag{6}$$

Rovnice (6) má jediný kladný kořen $a = 1 + \sqrt{2}$; z (3) vypočteme $b = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

b) Sestrojíme rovnoramenný lichoběžník, jehož strany mají délky $a = 1 + \sqrt{2}$, $b = d = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $c = 1$. Tento lichoběžník lze sestrojit, neboť je $a - c = \sqrt{2}$, $b > a - c$, $b < b + (a - c)$. Obrácením postupu se přesvědčíme, že sestrojený lichoběžník má žádané vlastnosti.

4. Je daná kružnica $k \equiv (S; r)$ a bod A ležiaci zvonku mimo nej. M je priesečník úsečky AS a kružnice k. Zostrojte troj-



Obr. 63.

uholník ASX tak, aby vrchol X ležal na kružnici k a aby os strany AX rozpolovala úsečku SM. Preveďte diskusiu úlohy.

Riešenie (obr. 63): Označme N stred úsečky SM, Y stred úsečky AX. Ďalej označme P bod polpriamky AS, pre ktorý platí $AP = 2\,AN$. Potom priamka $o \equiv YN$ je strednou priečkou trojuholníka APX. Je teda $PX \parallel YN$ a preto

$$PX \perp AX\,. \tag{1}$$

Podľa (1) leží bod X na kružnici m, zostrojenej nad priemerom AP, a súčasne tiež na kružnici k. Z tohto rozboru vyplýva konštrukčný predpis: Zostrojíme body N, P, kružnicu m a určíme spoločné body k, m.

Skúška vyplýva z obrátenia postupu rozboru.

Diskusia. Označme $AS = d$. Potom je

$$AN = d - \frac{r}{2}\,. \tag{2}$$

Riešiteľnosť úlohy závisí na existencii spoločných bodov kružníc $k \equiv (S; r)$, $m \equiv (N; AN)$, pričom je $SN = \frac{r}{2}$. Úloha je riešiteľná práve vtedy, keď sa obe kružnice pretínajú (bod X nesmie ležať na priamke AS), a má potom dve riešenia. Podmienka riešiteľnosti vzhľadom na vzťah (2) teda je

$$\left|d - \frac{r}{2} - r\right| < \frac{r}{2} < d - \frac{r}{2} + r = d + \frac{r}{2}\,. \tag{3}$$

Pravá nerovnosť vo vzťahu (3) platí vždy. Podmienka riešiteľnosti je teda

$$\left|d - \frac{3}{2}\,r\right| < \frac{r}{2}\,,$$

t. j. jednak $d - \frac{3}{2} r < \frac{1}{2} r$ čiže $d < 2 r$, jednak $\frac{3}{2} r - d <$ $< \frac{r}{2}$ čiže $d > r$, čo zrejme platí. Podmienka riešiteľnosti je teda

$$r < d < 2r .$$

4. *KATEGORIE D*

1. Jsou-li a, b libovolná dvě čísla, pak platí

$$(a^2 + b^2)^3 - (a^3 + b^3)^2 \geqq 0 . \qquad (1)$$

Dokažte a zjistěte, pro která a, b nastane rovnost.

Řešení. Na levé straně vztahu (1) vypočítáme mocniny dvojčlenů a upravíme. Dostaneme

$$3a^4b^2 - 2a^3b^3 + 3a^2b^4 \geqq 0 .$$

neboli

$$a^2b^2(3a^2 - 2ab + 3b^2) \geqq 0 . \qquad (2)$$

V závorce na levé straně vztahu (2) vytvoříme druhou mocninu dvojčlenu $(a - b)$, takže platí

$$a^2b^2 \, [(a - b)^2 + 2a^2 + 2b^2] \geqq 0 . \qquad (3)$$

Zřejmě lze postup obrátit, tj. z nerovnosti (3) dostaneme postupně (2) a pak (1). Proto vztahy (3) i (1) platí pro táž čísla a, b.

Rovnost ve vztahu (1) nastane tedy právě tehdy, když nastane rovnost ve vztahu (3), tj. platí-li aspoň jeden ze vztahů:

$$a^2b^2 = 0; \; (a - b)^2 + 2a^2 + 2b^2 = 0 . \qquad (4)$$

První rovnost je splněna, je-li aspoň jedno z čísel a, b rovno nule. Druhá rovnost je splněna jen v případě, že obě čísla a, b jsou zároveň rovna nule; výraz na levé straně je pro libovolná čísla a, b, z nichž aspoň jedno je od nuly různé, kladný. Protože a^2b^2 pro libovolná nenulová čísla a, b je kladný, dostáváme celkem tento **výsledek:**

Je-li aspoň jedno z čísel a, b rovno nule, platí ve vztazích (3) i (1) rovnost, není-li žádné z čísel a, b rovno nule, je výraz na levých stranách ve (3) i (1) kladný.

2. Představte si, že píšeme za sebou všecky násobky čísla tři s koeficienty 1, 2, 3, 4, ... Dostanete tak sled číslic

$$3\ 6\ 9\ 12\ 15\ 18\ 21\ 24\ldots\ . \tag{1}$$

Zjistěte, která číslice je na dvoutisícím místě sledu (1).

Řešení. Jednociferné násobky jsou tři, totiž čísla 3, 6, 9, a zaberou celkem tři místa ve sledu (1).

Dvojciferných násobků je celkem

$$\frac{99 - 9}{3} = 30\ ,$$

neboť 9 je největší jednociferný násobek a 99 největší dvojciferný násobek čísla 3. Tyto násobky zaberou ve sledu (1) celkem $2 \,.\, 30 = 60$ míst.

Trojciferných násobků je celkem

$$\frac{999 - 99}{3} = 300\ ;$$

protože 99 je největší dvojciferný násobek a 999 největší trojciferný násobek čísla 3. Tyto násobky zaberou ve sledu (1) celkem $3 \,.\, 300 = 900$ míst.

Čtyřciferných násobků je celkem

$$\frac{9999 - 999}{3} = 3\,000$$

a zaberou celkem $4 \,.\, 3\,000 = 12\,000$ míst ve sledu (1).

Násobky 1 až 3ciferné zaberou $3 + 60 + 900 = 963$ míst. Dvoutisící místo sledu (1) bude tedy náležet některému čtyřcifernému násobku; vypočteme kolikátému. Platí

$$2\,000 - 963 = 1\,037\,,$$

$$1\,037 = 4 \,.\, 259 + 1\,. \tag{2}$$

Ze vztahu (2) plyne, že *před* dvoutisícím místem sledu (1) je 259 čtyřciferných násobků; dvoutisící místo je tedy obsazeno první číslicí 260-tého čtyřciferného násobku tří.

Tento 260-tý čtyřciferný násobek tří je číslo

$$999 + 260 \,.\, 3\,,$$

tj. 1 779; jeho první číslice je tedy 1.

Ve sledu (1) stojí na dvoutisícím místě číslice 1.

3. Je daný pravouhlý trojuholník AMN s pravým uhlom pri vrchole A. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB tak, aby vrchol C ležal na predĺžení úsečky AN za bod A, aby priamka BC prechádzala bodom M a aby platilo

$$AC = CM - AN\,. \tag{1}$$

Riešenie. Rozbor. Na obr. 64 je znázornené predpokladané riešenie úlohy. Pretože bod C leží na predĺžení úsečky AN za bod A, platí

$$CN = CA + AN\,. \tag{2}$$

Z podmienky (1) vyplýva

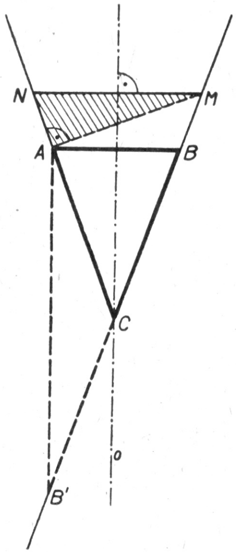
$$CM = AC + AN,$$

takže vzhľadom na vzťah (2) je

$$CN = CM.$$

Trojuholník CMN je teda rovnoramenný so základňou MN, a preto bod C leží na osi o úsečky MN.

Konštrukcia. Zostrojíme os o úsečky MN a ak existuje jej priesečník s predĺžením úsečky AN za bod A, je to hľadaný bod C. Bod B je potom priesečníkom priamky CM a kružnice $k \equiv (C; CA)$. Také body sú zrejme dva: B a B', takže dostaneme dva trojuholníky ABC a $AB'C$.



Obr. 64.

Dôkaz. Oba zostrojené trojuholníky sú zrejme rovnoramenné s vrcholom C proti základni. Ak bod C leží na predĺžení úsečky AN za bod A, prechádza priamka BC (prípadne $B'C$) bodom M. Pretože bod C leží na osi úsečky MN, platí $CM = CN$ a pretože bod C je na predĺžení úsečky AN za bod A, dostaneme

$$AC = CN - AN = CM - AN,$$

čo je vzťah (1), ktorý je platný pre oba trojuholníky ABC a $AB'C$.

Diskusia. Ak je pravouhlý trojuholník AMN rovnoramenný, ide os o bodom A, takže $A \equiv C$ a úloha nemá riešenie.

Ak je $AN > AM$, leží bod A vo vnútri polroviny oM a body A, N ležia v opačných polrovinách s hranicou o. Preto priesečník osi o s priamkou AN leží medzi bodmi A, N a nesplňuje podmienku úlohy.

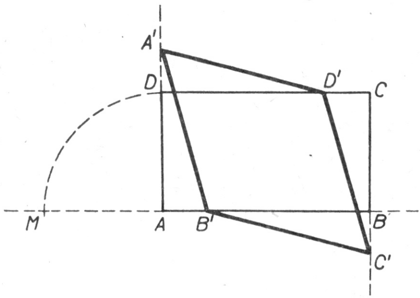
Ak je

$$AM > AN\,, \tag{3}$$

pretne os o priamku AN v bode $C \neq A$, ktorý leží na predĺžení úsečky AN za bod A. Vtedy dostaneme dve riešenia. Podmienkou riešiteľnosti je tedy splnenie nerovnosti (3).

4. Je dán obdélník $ABCD$, jehož strany mají délky $AB = a$, $BC = b$, $a > b$. Na polopřímkách BA, CB, DC, AD sestrojte po řadě body B', C', D', A' tak, aby platilo $AA' = BB' = CC' = DD'$ a aby $A'B'C'D'$ byl kosočtverec.

Vypočtěte nejprve velikost úseku $AA' = x$ a pak kosočtverec sestrojte.



Obr. 65.

Řešení. Budiž $A'B'C'D'$ kosočtverec (obr. 65). Označme $AA' = BB' = CC' = DD' = x$. Pak je $AB' = CD' = |a - x|$ (nevíme, zda je $a > x$ nebo $x > a$); obdobně je $BC' = DA' = |b - x|$. Podle Pythagorovy věty je

$$BB'^2 + BC'^2 = B'C'^2\,,$$

$$CC'^2 + CD'^2 = C'D'^2\,. \tag{1}$$

Protože je $B'C' = C'D'$, plyne z (1)

$$BB'^2 + BC'^2 = CC'^2 + CD'^2;$$

protože je $BB' = CC'$, máme

$$(b - x)^2 = (a - x)^2 . \tag{2}$$

Odtud plyne $a - x = b - x$ nebo $a - x = x - b$. První rovnost je vyloučena, poněvadž je $a > b$. Z druhé rovnosti plyne

$$x = \frac{1}{2}(a + b) . \tag{2}$$

Obrácením postupu zjistíme, že $A'B'C'D'$ je při takto zvoleném x skutečně kosočtverec. Vzorec (2) zároveň ukazuje, že je

$$b < x < a ,$$

tj. body C', A' leží vně obdélníka, B', D' na jeho stranách (viz obr. 65).

Konstrukce. Na polopřímce opačné k AB sestrojíme bod M tak, aby bylo $AM = b$. Pak je $BM = a + b$ a B' je středem úsečky BM, neboť je $BB' = \frac{1}{2} BM = \frac{1}{2}(a + b)$. Další body A', C', D' snadno doplníme.

Poznámka. Předpokládáme-li, že na obr. 65 je znázorněno řešení úlohy, zjistíme, že

$$\triangle B'BC' \cong \triangle C'CD'$$

(podle věty *Ssu*, neboť oba trojúhelníky jsou pravoúhlé a platí $B'B = C'C = x$, $B'C' = C'D'$). Proto je

$$BC' = CD',$$

tj. $|a - x| = |b - x|$ a obdobnou úvahou jako v uvedeném řešení zjistíme platnost vzorce (2).