V. Řešení soutěžních úloh III. kola kategorie A

1. Nechť a, b, c jsou reálná čísla. Dokažte, že existují nezáporná čísla x, y, z, ne všechna rovná nule, která splňují nerovnosti

$$cy - bz \geqq 0\,,$$
$$az - cx \geqq 0\,,$$
$$bx - ay \geqq 0\,.$$

ŘEŠENÍ. Je zřejmé, že cyklickou záměnou čísel a, b, c a zároveň x, y, z se soustava nezmění. Lze se tedy v řešení omezit na tyto případy:

1. $a = b = c = 0$ nebo $a = b = 0$, $c \neq 0$, pak $x = y = 0$, $z = 1$ je řešením;
2. $a = 0$, $bc \neq 0$, pak

   pro $b > 0$, $c > 0$ je $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ řešení,
   pro $b > 0$, $c < 0$ je $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ řešení,
   pro $b < 0$, $c > 0$ je $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$ řešení,
   pro $b < 0$, $c < 0$ je $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ řešení.
3. $abc \neq 0$, pak

   pro $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ nebo $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$

je

   $x = |a|$, $y = |b|$, $z = |c|$ řešení,
   pro $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$ je $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$
   řešení,

pro $a > 0, b < 0, c < 0$ je $x = 0, y = 0, z = 1$ řešení.

JINÉ ŘEŠENÍ. Zavedeme označení:

$$a = k_0, \quad b = k_1, \quad c = k_2,$$
$$x = t_0, \quad y = t_1, \quad z = t_2.$$

Máme soustavu

$$k_2t_1 - k_1t_2 \geqq 0,$$
$$k_0t_2 - k_2t_0 \geqq 0,$$
$$k_1t_0 - k_0t_1 \geqq 0,$$

kterou lze po zavedení úmluvy, že pro každé celé číslo i položíme

$$k_{i+3} = k_i \quad \text{a} \quad t_{i+3} = t_i\,,$$

psát v jednotném tvaru

$$k_{i+1}t_i - k_it_{i+1} \geqq 0\,. \tag{1}$$

1. Předpokládejme, že čísla k_0, k_1, k_2 jsou všechna buď nezáporná, nebo nekladná, přičemž nejsou všechna rovna nule. Pak existuje řešení soustavy (1)

$$t_i = |k_i|\,,$$

protože pro každé i

$$k_{i+1}|k_i| - k_i|k_{i+1}| = 0\,.$$

Platí totiž

$$k_{i+1}\,.\,|k_i| - k_i|k_{i+1}| = k_i\,.\,k_{i+1}\,.\,\mathrm{sgn}\, k_i - k_ik_{i+1}\,.\,\mathrm{sgn}\, k_{i+1} =$$
$$= k_ik_{i+1}(\mathrm{sgn}\, k_i - \mathrm{sgn}\, k_{i+1}) = 0^\star)\,,$$

neboť a) jsou-li k_i, k_{i+1} čísla různá od nuly, pak podle předpokladu $\mathrm{sgn}\, k_i = \mathrm{sgn}\, k_{i+1}$;

---

*) Funkce (signum, tj. znamení) je definována pro každé reálné číslo takto:

$$\mathrm{sgn}\, x = \begin{cases} 1\,, & \text{je-li } x > 0 \\ 0\,, & \text{je-li } x = 0 \\ -1\,, & \text{je-li } x < 0\,. \end{cases}$$

b) je-li jedno z čísel k_i, k_{i+1} rovno nule, pak $k_i k_{i+1} = 0$.

2. Nechť nenastane případ 1. Pak nutně existuje takový index j, že $k_j \geqq 0$ a přitom $k_{j+1} \leqq 0$.

Nyní volme

$$t_j = 0\,, \quad t_{j+1} = 0\,, \quad t_{j-1} = 1\,.$$

Pak ze soustavy

$$\begin{aligned} k_j t_{j-1} - k_{j-1} t_j &\geqq 0\,, \\ k_{j+1} t_j - k_j t_{j+1} &\geqq 0\,, \\ k_{j-1} t_{j+1} - k_{j+1} t_{j-1} &\geqq 0\,. \end{aligned}$$

Po dosazení za t_j, t_{j+1}, t_{j-1} dostáváme

$$k_j \geqq 0\,, \qquad -k_{j+1} \geqq 0\,,$$

což platí. Tím je důkaz proveden i v případě 2.

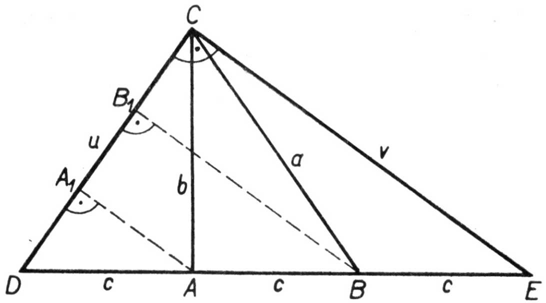
Řešil Miroslav Kmošek,
2a. gymnasium, tř. kpt. Jaroše, Brno

2. K trojúhelníku ABC jsou na přímce AB sestrojeny body $D \neq B$ a $E \neq A$ tak, že $DA = BE = AB$.

Určete nutnou a postačující podmínku pro délky úseček $a = BC$, $b = AC$, aby existoval takový trojúhelník ABC, že úhel DCE je pravý.

ŘEŠENÍ (obr. 45). Nechť $\sphericalangle\, DCE$ je pravý. Označme $CD = u$, $CE = v$, A_1 patu kolmice z bodu A na přímku CD, B_1 patu kolmice z bodu B na přímku CD. Protože $AA_1 = \frac{1}{3}v$, $BB_1 = \frac{2}{3}v$, $A_1C = \frac{2}{3}u$, $B_1C = \frac{1}{3}u$, plyne z Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky BB_1C, AA_1C a DEC, že

$$a^2 = \frac{1}{9}u^2 + \frac{4}{9}v^2\,, \tag{1}$$



Obr. 45

$$b^2 = \frac{4}{9}u^2 + \frac{1}{9}v^2, \tag{2}$$

$$c^2 = \frac{1}{9}u^2 + \frac{1}{9}v^2. \tag{3}$$

Nyní je

$$4a^2 = \frac{4}{9}u^2 + \frac{16}{9}v^2 > b^2$$

a obdobně

$$4b^2 = \frac{16}{9}u^2 + \frac{4}{9}v^2 > a^2.$$

Celkem

$$\frac{a}{2} < b < 2a. \tag{4}$$

Ukažme, že podmínka (4) je i postačující. Splňují-li totiž kladná čísla a, b podmínku (4), má kladné řešení u, v soustava rovnic (1) a (2):

$$u^2 = \frac{3}{5}(4b^2 - a^2),$$

$$v^2 = \frac{3}{5}(4a^2 - b^2)\,.$$

Je-li c kladné číslo ze vztahu (3), lze sestrojit trojúhelník DEC o stranách délek $DE = 3c$, $CD = u$, $CE = v$, a platí, že $\sphericalangle\, DCE$ je pravý. Body A a B, které dělí stranu DE na tři stejné části ($DA = AB = BE = c$), tvoří s bodem C trojúhelník, který má strany a, b, jak plyne opakováním úvahy ze začátku řešení.

ZÁVĚR. Podmínka (4) je nutná a postačující. Lze ji také psát ve tvaru

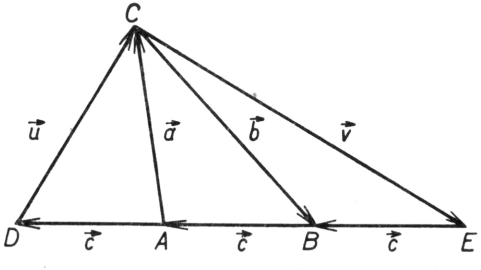
$$\max(a, b) < 2\min(a, b)\,.$$

INÉ RIEŠENIE. Označme

$$\overrightarrow{BA} = \vec{c}\,, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{a}\,, \quad \overrightarrow{CB} = \vec{b}\,, \quad \overrightarrow{DC} = \vec{u}\,, \quad \overrightarrow{CE} = \vec{v}\,.$$

Potom

$$\overrightarrow{AD} = \vec{c}\,, \quad \overrightarrow{EB} = \vec{c}\,.$$



Obr. 46

Predpokladajme, že existujú také dĺžky úsečiek a, b, aby existoval $\triangle\, ABC$ tej vlastnosti, že $\sphericalangle\, DCE$ je pravý.

Potom platí (obr. 46)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 . \tag{1}$$

Zrejme platí:

$$\vec{u} = \vec{a} - \vec{c}, \quad \vec{v} = \vec{b} - \vec{c}, \tag{2a, b}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{\mathbf{o}}, \tag{2c}$$

kde $\vec{\mathbf{o}}$ je nulový vektor. Podľa (1), (2a), (2b) platí

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \cdot \vec{c} = 0 . \tag{3}$$

Podľa (2c) je

$$\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} \tag{4}$$

čiže

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{c} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b}) . \tag{5}$$

Po dosadení zo (4) a (5) do (3) dostaneme teda

$$5\vec{c} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

čiže

$$5c^2 = a^2 + b^2 . \tag{6}$$

Naopak, ak v $\triangle\ ABC$ platí (6), potom sa obrátením postupu presvedčíme, že $\sphericalangle\ DCE = 90°$.

Aby sme mohli zostrojiť $\triangle\ ABC$ požadovaných vlastností, musí platiť

$$|a - b| < c < a + b ,$$

t.j.

$$a^2 + b^2 - 2ab < c^2 < a^2 + b^2 + 2ab$$

a vzhľadom na (6) súčasne

$$c^2 = \frac{1}{5}(a^2 + b^2) .$$

Stadiaľ máme

$$a^2 + b^2 - 2ab < \frac{1}{5}(a^2 + b^2) < a^2 + b^2 + 2ab$$

čiže

$$4a^2 + 4b^2 - 10ab < 0\,,$$
$$4a^2 + 4b^2 + 10ab > 0\,.$$

Druhá z týchto nerovností je pre každé kladné a, b splnená. Po úprave prvej nerovnosti na tvar

$$2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\,.\left(\frac{a}{b}\right) + 2 < 0$$

dostaneme

$$\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2\,. \tag{7}$$

Keďže všetky úpravy, ktorými sme dostali podmienku (7), boli ekvivalentné, stačí splnenie tejto podmienky k tomu, aby existovalo c tak, že

$$|a - b| < c < a + b \quad \text{a} \quad 5c^2 = a^2 + b^2\,,$$

t.j., že trojuholník ABC možno zostrojiť a uhol DCE je pravý.

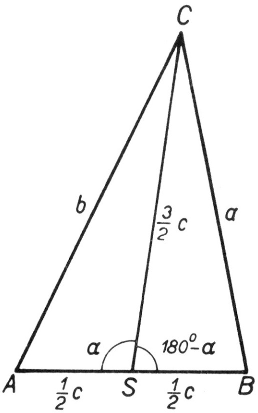
Hľadanou nutnou a postačujúcou podmienkou je teda splnenie nerovností (7).

Riešil Štefan Sakáloš
3. d, SVŠ Prievidza

POZNÁMKA. K rovnosti (6) lze samozřejmě dojít také bez užití vektorového počtu.

Označme S střed úsečky AB. Bod C zřejmě leží na Thaletově půlkružnici nad průměrem DE, a proto (viz obr. 47).

$$CS = t_c = \frac{3}{2}c\,.$$



Obr. 47

Podle kosinové věty v $\triangle\ ASC$ platí

$$b^2 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{9}{4}c^2 - \frac{3}{2}c^2 \cos \alpha ,$$

obdobně v $\triangle\ BCS$

$$a^2 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{9}{4}c^2 + \frac{3}{2}c^2 \cos \alpha ,$$

takže

$$a^2 + b^2 = 5c^2 .$$

Tato podmínka je nutná a postačující, aby těžnice t_c v $\triangle\ ABC$ měla velikost $\frac{3}{2}c$, tj. aby $\sphericalangle\ DCE$ byl pravý.

3. Jsou dána přirozená čísla 2, 3, 4, 5, . . . , $n - 1$, n, kde $n \geqq 96$. Rozdělíme-li je libovolně do dvou skupin, pak vždycky aspoň v jedné z nich je možno najít dvě (různá) čísla a současně jejich součin. Dokažte.

Nalezněte příklad, který ukazuje, že věta neplatí pro $n = 95$.

ŘEŠENÍ. Nejprve se budeme zabývat případem $n \geqq 96$. Abychom odvodili spor, budeme předpokládat, že čísla je možno rozdělit do dvou skupin A a B tak, že žádná z nich neobsahuje současně dvě čísla i jejich součin. Bez újmy obecnosti lze předpokládat, že číslo 2 patří do A. Nyní rozlišíme čtyři případy.

I. Číslo 3 a 4 patří též do A. Pak součiny $2 . 3 = 6$, $2 . 4 = 8$ a $3 . 4 = 12$ jsou ve skupině B. Součiny $6 . 8 = 48$ a $8 . 12 = 96$ náleží tedy do A. Avšak 2, 48 a 96 nemohou současně být v A a to je spor.

II. Dále probereme případ, že 3 je ve skupině A a 4 v B. Potom součin $2 . 3 = 6$ je v B, součin $4 . 6 = 24$ je v A. Kam patří číslo 8? Rozhodně ne do A, neboť je $3 . 8 = 24$; leží tedy v B. Součin $6 . 8 = 48$ ukazuje, že by 48 mělo být v A, avšak $2 . 24 = 48$ — to je spor.

III. Případ, že 3 je v B a 4 je v A, se řeší podobně. Součin $2 . 4 = 8$ patří do B, součin $3 . 8 = 24$ do A. O čísle 6 nyní snadno rozhodneme, že musí patřit do B, neboť $4 . 6 = 24$. Zase je tu spor, neboť $6 . 8 = 48$, $2 . 24 = 48$.

IV. Konečně nechť čísla 3 a 4 obě patří do B. Pak $3 . 4 = 12$ je v A a číslo 6 musí být v B. Rovnosti $2 . 12 = 24$ a $4 . 6 = 24$ ukazují znova spor. Důkaz pro $n \geqq 96$ je tedy podán.

Pro $n = 95$ tvrzení neplatí. Rozdělme čísla např. tak, že do první skupiny dáme

2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 32, 37, 43, 47, 48, 49, 53, 54, 56, 59, 60, 61, 66, 67, 70, 71, 72, 73, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 88, 89, 90,

a do druhé

6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 50, 51, 52, 55, 57, 58, 62, 63, 64, 65, 68, 69, 74, 75, 76, 77, 85, 86, 87, 91, 92, 93, 94, 95;

žádná skupina neobsahuje dvě čísla a současně jejich součin.

4. Dokažte, že existujú reálne čísla A, B tak, že rovnosť

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg} k \, . \operatorname{tg}(k - 1) = A \, . \operatorname{tg} n + B \, . \, n$$

platí pre každé prirodzené číslo n.

RIEŠENIE. Zo známého vzorca $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta}$, ktorý platí pre všetky také dvojice uhlov α, β, pre ktoré je definovaná funkcia tangens, pričom $\alpha - \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + m\pi$, kde m je celé číslo, vyplýva $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \,.\, \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$, z čoho

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) \,.\, \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}(\alpha - \beta). \quad (1)$$

Pre každé prirodzené číslo k zrejme platí: $k \neq (2m + 1) \,.\, \dfrac{\pi}{2}$, kde m je celé číslo, pretože číslo na pravej strane je iracionálne. Pre každé prirodzené číslo k je teda $\operatorname{tg} k$ definované a ak v (1) zvolíme špeciálne $\alpha = k$, $\beta = k - 1$, dostaneme:

$$\operatorname{tg} 1 \,.\, \operatorname{tg} k \,.\, \operatorname{tg}(k - 1) = \operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k - 1) - \operatorname{tg} 1 \,. \quad (2)$$

Ak teraz v (2) volíme postupne $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ a všetky takto získané rovnosti sčítame, dostaneme:

$$\operatorname{tg} 1 \,.\, s_n = (\operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg} 1) + (\operatorname{tg} 3 - \operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 1) + \ldots + (\operatorname{tg} n - \operatorname{tg}(n - 1) - \operatorname{tg} 1), \quad \text{kde}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg} k \,.\, \operatorname{tg}(k - 1),$$

čiže $\operatorname{tg} 1 \,.\, s_n = \operatorname{tg} n - \operatorname{tg} 1 - (n - 1)\operatorname{tg} 1$, z čoho (vzhľadom na to, že zrejme $\operatorname{tg} 1 \neq 0$) máme

$$s_n = \frac{1}{\operatorname{tg} 1} \cdot \operatorname{tg} n - n \,. \quad (3)$$

Správnosť (3) pre každé prirodzené číslo n ľahko dokážeme matematickou indukciou:

a) Pre $n = 1$ je $s_1 = \operatorname{tg} 1 \,.\, \operatorname{tg} 0 = 0$ a z 3) máme

$$s_1 = \frac{1}{\operatorname{tg} 1} \cdot \operatorname{tg} 1 - 1 = 0 \,.$$

b) Nech (3) platí pre nejaké prirodzené číslo m. Potom

$$s_{m+1} = \frac{1}{\operatorname{tg} 1} \cdot \operatorname{tg} m - m + \operatorname{tg}(m + 1) \,.\, \operatorname{tg} m =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} m + \operatorname{tg} 1 \,.\, \operatorname{tg}(m + 1) \,.\, \operatorname{tg} m}{\operatorname{tg} 1} - m$$

a s použitím (2) pre $k = m + 1$ ďalej platí

$$s_{m+1} = \frac{\operatorname{tg} m + \operatorname{tg}(m + 1) - \operatorname{tg} m - \operatorname{tg} 1}{\operatorname{tg} 1} - m =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg} 1} \cdot \operatorname{tg}(m + 1) - (m + 1) \,,$$

čo dostaneme taktiež z (3) pre $n = m + 1$. Tým je dôkaz skončený.

POZNÁMKA. Úspěšní řešitelé této úlohy postupovali většinou tak, že předpokládali, že požadovaná reálná čísla A, B existují, a za tohoto předpokladu je určili ze soustavy rovnic:

$$\sum_{k=1}^{1} \operatorname{tg} k \,.\, \operatorname{tg} (k - 1) = A \,.\, \operatorname{tg} 1 + B \,,$$

$$\sum_{k=1}^{2} \operatorname{tg} k \,.\, \operatorname{tg} (k - 1) = A \,.\, \operatorname{tg} 2 + 2B \,.$$

Pomocí vypočtených čísel A, B, pak z rovnosti uvedené v textu úlohy získali vzorec

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg} k \,.\, \operatorname{tg} (k - 1) = \frac{1}{\operatorname{tg} 1} \cdot \operatorname{tg} n - n \,,$$

který pak dokázali pro každé přirozené číslo n stejně jako v autorském řešení matematickou indukcí.

JINÉ ŘEŠENÍ. Předpokládejme nejprve, že existují taková reálná čísla A, B, že rovnost

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg}(k-1) = A \cdot \operatorname{tg} n + B \cdot n \tag{1}$$

platí pro jisté přirozené číslo n. Má-li (1) platit pro táž čísla A, B, též pro $n+1$ musí být správná rovnost

$$A \cdot \operatorname{tg}(n+1) + B(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg}(k-1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg}(k-1) + \operatorname{tg} n \cdot \operatorname{tg}(n+1),$$

čili musí platit

$$\begin{aligned} A \cdot \operatorname{tg}(n+1) + Bn + B = \\ = A \cdot \operatorname{tg} n + Bn + \operatorname{tg} n \cdot \operatorname{tg}(n+1). \end{aligned} \tag{2}$$

Čísla n a $n+1$ jsou přirozená, a proto jsou jejich tangenty vždy definovány. Úpravou rovnosti (2) dosazením ze známého vzorce

$$\operatorname{tg}(n+1) = \frac{\operatorname{tg} n + \operatorname{tg} 1}{1 - \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} n}$$

dostáváme

$$\frac{A(\operatorname{tg} n + \operatorname{tg} 1) + B(1 - \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} n)}{1 - \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} n} =$$

$$= \frac{(A - A \cdot \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} n + \operatorname{tg} n + \operatorname{tg} 1) \cdot \operatorname{tg} n}{1 - \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} n}$$

a protože $\operatorname{tg}(n+1)$ je definován, je $1 - \operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{tg} n \neq 0$, a tedy lze poslední rovnost upravit na tvar

$$(1 - A \,.\, \text{tg}\, 1) \,.\, \text{tg}^2 n + (\text{tg}\, 1 + B \,.\, \text{tg}\, 1) \,.\, \text{tg}\, n - \\ - (A \,.\, \text{tg}\, 1 + B) = 0 \,. \tag{3}$$

Má-li vztah (3) platit pro všechna n, tj. pro všechny příslušné tg n, stačí, aby všechny koeficienty v mnohočlenu proměnné tg n na levé straně rovnosti (3) byly nulové, tedy

$$A \,.\, \text{tg}\, 1 = 1 \quad \text{a} \quad B = -1 \,.$$

Takové A existuje, neboť tg $1 \neq 0$.

Nyní si ověříme, zda s těmito koeficienty A a B platí rovnost (1) i pro $n = 1$. Pak skutečně platí, neboť

$$\text{tg}\, 1 \,.\, \text{tg}\, 0 = 0$$

a

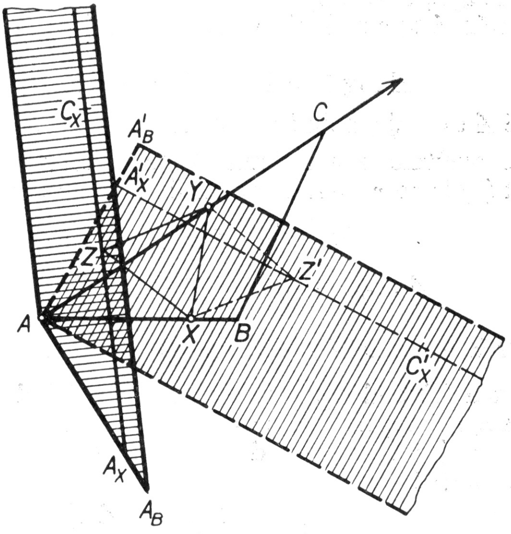
$$A \,.\, \text{tg}\, 1 + B \,.\, 1 = 1 - 1 = 0 \,.$$

ZÁVĚR. Pro reálné koeficienty $A = \dfrac{1}{\text{tg}\, 1}$ a $B = -1$ platí vztah (1) podle principu matematické indukce pro všechna n, neboť platí pro $n = 1$ a z platnosti pro přirozené číslo n, jak bylo výše dokázáno, plyne platnost (1) pro číslo $n + 1$.

Řešil Andrej Kugler
3. g, SVVŠ, ul. W. Piecka, Praha

5. Je daný trojuholník ABC. Zvolíme bod X úsečky AB a bod $Y \neq X$ polpriamky AC a zostrojíme v rovině ABC rovnostranný trojuholník XYZ. Vyšetrite množinu **M** vrcholov Z všetkých takto zostrojených trojuholníkov XYZ, keď bod X prebieha úsečku AB a bod Y polpriamku AC. Vyšetrite tiež prípad, keď $\sphericalangle BAC = 60°$.

RIEŠENIE. Každý bod Z vznikne otočením bodu Y okolo bodu X o 60° v kladnom alebo zápornom zmysle (obr. 48). Pretože všetky body Y vyplňujú polpriamku AC, vyplnila body Z množinu všetkých bodov všetkých polpriamok $A_X C_X$ a $A'_X C'_X$, ktoré vzniknú otočením polpriamky AC o 60° v kladnom alebo zápornom zmysle okolo všetkých bodov X úsečky AB.

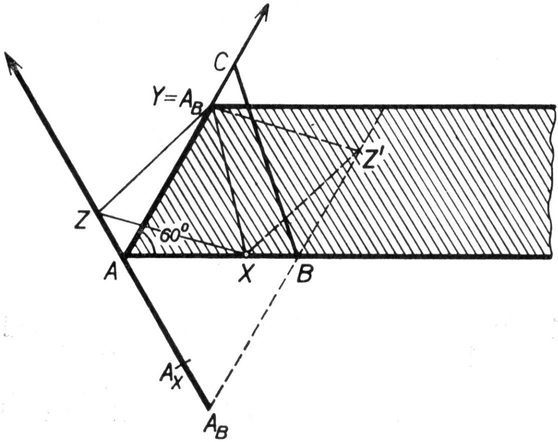


Obr. 48

Otočíme najskôr bod A okolo bodu X do polôh A_X, A'_X. Body A_X, A'_X sú zrejme vrcholy rovnostranných trojuholníkov AXA_X, AXA'_X. Pretože bod A_X vznikol otočením bodu A okolo X o 60° v kladnom zmysle, vznikol bod A'_X otočením bodu A okolo X o 60° v zápornom zmysle. Množinu všetkých bodov A_X dostaneme ako obraz AA_B úsečky AB v otočení okolo stredu A o 60° v zápornom zmysle. Teraz už ľahko doplníme polpriamky

$A_X C_X$. Ich množina vyplní akýsi „*polpás*" roviny (je to prienik pásu roviny s istou polrovinou; na obr. 48 je vyznačený tučne a vyšrafovaný).

Analogicky dostaneme druhý „*polpás*". Je to množina všetkých bodov všetkých polpriamok $A'_X C'_X$, ktoré vznikli otočením polpriamky AC okolo X o 60°, ale

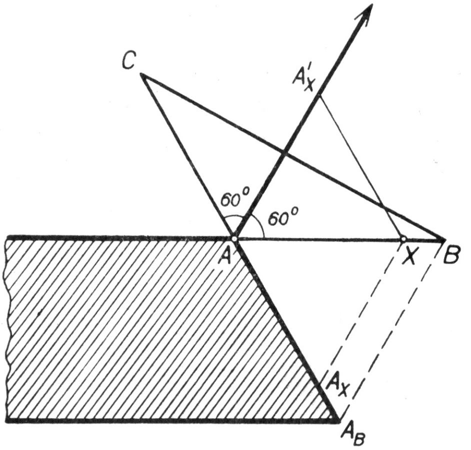


Obr. 49

v zápornom zmysle. Koncové body A'_X polpriamok $A'_X C'_X$ vyplnila úsečku AA'_B. Vyšetrovaná množina **M** je v prípade, keď $\sphericalangle BAC \neq 60°$ zjednotenie oboch „polpásov", ale bez bodu A.

Ak je $\sphericalangle BAC = 60°$, je nahradený jeden z „polpásov" polpriamkou so začiatkom v A_B (na obr. 49 je to $A_B C_B$) a bod A potom patrí do množiny **M**.

Ak je $\sphericalangle BAC = 120°$, je tiež jeden z „polpásov" nahradený polpriamkou, ale bez jej začiatočného bodu A (obr. 50).

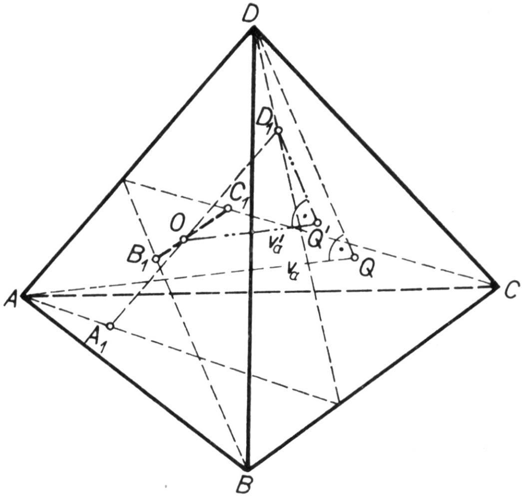


Obr. 50

6. Je dán čtyřstěn $ABCD$ a libovolný jeho vnitřní bod O. Bodem O vedeme příčky rovnoběžné s jeho hranami (jejich krajní body leží ve stěnách čtyřstěnu). Pak platí, že součet poměrů délek těchto příček a délek s nimi rovnoběžných hran čtyřstěnu je roven 3. Dokažte.

ŘEŠENÍ. Veďme bodem O příčku $A_1D_1 \parallel AD$, A_1 leží ve stěně ABC, D_1 ve stěně DBC; C_1, D_1 jsou krajní body příčky vedené bodem O a rovnoběžné s CB; C_1 leží ve stěně ACD a B_1 ve stěně ABD. Čtyřstěny $O(BCD)$, $A(BCD)$ mají společnou podstavu BCD, a tudíž poměr jejich objemů se rovná poměru délek jejich výšek $v'_a : v_a$. Ale z podobných trojúhelníků $\triangle ADQ \sim \triangle OD_1Q'$ plyne (viz obr. 51) $v'_a : v_a = OD_1 : AD$. Je tedy

$$\frac{\text{objem } O(BCD)}{\text{objem } A(BCD)} = \frac{OD_1}{AD}\,; \qquad (1)$$



Obr. 51

čtyřstěny $O(ABC)$ a $D(ABC)$ mají společnou podstavu ABC a jejich objemy jsou v poměru

$$\frac{\text{objem } O(ABC)}{\text{objem } D(ABC)} = \frac{OA_1}{AD}. \tag{1'}$$

Sečtením (1) a (1′) dostaneme

$$\frac{\text{objem } O(BCD) + \text{objem } O(ABC)}{\text{objem } A(BCD)} =$$

$$= \frac{OD_1 + OA_1}{AD} = \frac{A_1D_1}{AD}. \tag{2}$$

Výměnou vrcholů $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow D$ dostaneme z (2)

$$\frac{\text{objem } O(ABD) + \text{objem } O(ACD)}{\text{objem } A(BCD)} = \frac{B_1C_1}{BC}. \tag{2'}$$

Sečtením (2) a (2′) máme

$$\frac{\text{součet objemů čtyřstěnů } [O(ABC) + O(BCD) + O(CDA) + O(ABD)]}{\text{objem čtyřstěnu } A(BCD)} =$$

$$= \frac{A_1D_1}{AD} + \frac{B_1C_1}{BC} = 1\,. \qquad (3)$$

Podobné vztahy platí pro další dvojice protějších hran čtyřstěnu

$$\frac{A_2B_2}{AB} + \frac{C_2D_2}{CD} = 1\,, \qquad (3')$$

$$\frac{B_3D_3}{BD} + \frac{A_3C_3}{AC} = 1\,. \qquad (3'')$$

Sečtením (3), (3′), (3″) dostaneme

$$\frac{A_1D_1}{AD} + \frac{B_1C_1}{BC} + \frac{A_2B_2}{AB} + \frac{C_2D_2}{CD} + \frac{B_3D_3}{BD} + \frac{A_3C_3}{AC} = 3\,.$$

JINÉ ŘEŠENÍ (obr. 52). Veďme bodem O příčku $A_1A_2 \parallel AD$. Potom rovina určená body A, D, A_1, O, A_2 protne hranu BC v bodě X. Z podobnosti trojúhelníků $\triangle XA_1A_2$, $\triangle XAD$ vyplývá

$$\frac{A_1A_2}{AD} = \frac{XA_1}{XA}\,. \qquad (1)$$

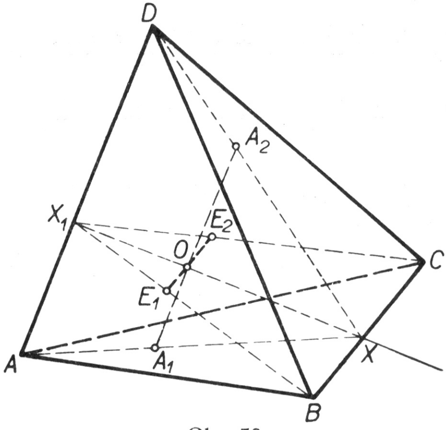
Veďme nyní přímku OX a její průsečík s hranou AD označme X_1. Z podobnosti trojúhelníků vyplývá

$$\frac{XA_1}{XA} = \frac{XO}{XX_1}$$

a ze vztahu (1) dostáváme

$$\frac{A_1A_2}{AD} = \frac{XO}{XX_1}\,. \qquad (2)$$

Jediná hrana čtyřstěnu, která je mimoběžná s hranou AD, je hrana BC. Veďme bodem O příčku $E_1E_2 \parallel BC$. Rovina určená rovnoběžkami E_1E_2 a BC obsahuje zřejmě také



Obr. 52

body O, X, a proto i bod X_1. Z podobnosti trojúhelníků $\triangle X_1E_1E_2$, $\triangle X_1BC$ plyne

$$\frac{E_1E_2}{BC} = \frac{X_1E_1}{X_1B},$$

protože

$$\frac{X_1E_1}{X_1B} = \frac{X_1O}{X_1X};$$

dostáváme

$$\frac{E_1E_2}{BC} = \frac{X_1O}{X_1X}. \tag{3}$$

Sečtením rovností (2), (3) dostaneme

$$\frac{A_1A_2}{AD} + \frac{E_1E_2}{BC} = \frac{XO + X_1O}{X_1X} = 1. \tag{4}$$

Dokázali jsme, že součet poměrů $\frac{A_1A_2}{AD}$ a $\frac{E_1E_2}{BC}$ je roven 1. Podobně dokážeme tento vztah pro další dvě dvojice příček a hran, tj. že

$$\frac{\text{příčka rovnob. s } BD}{BD} + \frac{\text{příčka rovnob. s } AC}{AC} = 1, \qquad (5)$$

$$\frac{\text{příčka rovnob. s } CD}{CD} + \frac{\text{příčka rovnob. s } AB}{AB} = 1. \qquad (6)$$

Sečtením rovností (4), (5), (6) dostáváme tvrzení, které jsme měli dokázat.

Řešil Miloš Paleček
3.S. gymnasium, Křenová ul., Brno