Vojtěch Jarník

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln

Sprawozdanie z I. Kongresu Matematyków Krajów Słowianskich,
Warszawa 1929, pp. 244--245

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500721

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln.

Von

Vojtěch Jarník (Praha).

Es sei $k \geqq 8$, k gerade, $x > 0$, x ganz. Der Inhalt der k-dimensionalen Kugel $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2 \leqq x$ werde mit $I_k(x)$, die Anzahl der Gitterpunkte in dieser abgeschlossenen Kugel mit $A_k(x)$ bezeichnet. Wir fragen: inwieweit lässt sich $A_k(x)$ für grosse x durch $I_k(x)$ approximieren? Das heisst: Wir setzen $P_k(x) = A_k(x) - I_k(x)$ und untersuchen die Eigenschaften der Folge

$$P_k(1),\ P_k(2),\ P_k(3), \ldots;$$

oder — was sachlich dasselbe bedeutet, formal aber einfacher ist — wir setzen $\varrho_k(x) = \frac{P_k(x)}{x^{\frac{k}{2}-1}}$ und untersuchen die Eigenschaften der Folge

$$\varrho_k(1),\ \varrho_k(2),\ \varrho_k(3), \ldots. \tag{1}$$

Bekanntlich ist diese Folge beschränkt, aber divergent. Es entstehen also ganz natürlich die beiden folgenden Fragen:

Erstens. Wie sieht die Menge N_k aller Häufungswerte der Folge (1) aus? Offenbar ist N_k beschränkt und abgeschlossen. Weiter kann man noch zeigen, dass die Menge N_k *perfekt* ist.

Zweitens. Wie sehen die konvergenten Teilfolgen der Folge (1) aus? Diese Frage wird in einer gewissen Hinsicht vollständig durch die beiden folgenden Sätze beantwortet:

Satz 1. *Es sei* $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$, x_n *ganz,* $x_n - x_{n-1}$ *beschränkt.*

Dann ist die Folge

$$\varrho_k(x_1),\ \varrho_k(x_2),\ \varrho_k(x_3),\ \dots$$

divergent.

Und dieser Satz lässt sich nicht verschärfen, denn es gilt noch der

Satz 2. *Es sei* ξ *ein Punkt von* N_k*; es sei* $f(x) > 0$ *für* $x > 0$, $f(x) \to +\infty$ *für* $x \to +\infty$. *Dann gibt es eine Folge* $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$, *so dass*

$$x_n \text{ ganz},\ x_n - x_{n-1} = O(f(n)),\ \lim_{n=\infty} \varrho_k(x_n) = \xi.$$

Wegen der Einzelheiten verweise ich auf meine Abhandlung, die sich in der Mathemathischen Zeitschrift im Druck befindet (inzwischen erschienen im Band 30 (1929): V. Jarník, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, S. 768—786).