Eduard Čech

Über einen kurventheoretischen Satz von Ayres

Erg. Koll. Wien 5 (1933), 24-25

haben. Die Abbildung φ läßt sich nun auch folgendermaßen definieren. Ist p ein beliebiger Punkt eines Simplexes $(i_0, \ldots, i_{n-1}, 2_n)$, so bestimmt p eindeutig einen Punkt p' von $(i_0, \ldots, i_{n-1}) \subset M_{n-1}$ und eine Zahl s mit $0 \leqq s \leqq 1$, so daß p die Strecke mit den Endpunkten p' und 2_n im Verhältnis $s:(1-s)$ teilt; sind nun $x_1, \ldots, x_{2n-1}$ die Koordinaten des Punktes $\varphi_s(p') \subset R_{2n-1}$, so hat $\varphi(p)$ die Koordinaten $x_1, \ldots, x_{2n-1}, s, 0$; analog hat, wenn der Punkt q des Simplexes $(i_0, \ldots, i_{n-1}, 3_n)$ die Strecke mit den Endpunkten $q' \subset (i_0, \ldots, i_{n-1})$ und 3_n im Verhältnis $t:(1-t)$ teilt und $\varphi_{-t}(q')$ die Koordinaten $x_1, \ldots, x_{2n-1}$ hat, der Punkt $\varphi(q)$ die Koordinaten $x_1, \ldots, x_{2n-1}, t, t$. Damit also für zwei Punkte p und q von M_n die Verbindungsstrecke von $\varphi(p)$ und $\varphi(q)$ parallel zur x_{2n+1}-Achse sei, ist notwendig und hinreichend, daß $s=t>0$ und $\varphi_s(p')=\varphi_{-t}(q')$ sei. Nun hat die Gleichung $\varphi_t(p')=\varphi_{-t}(q')$ mit $t>0$ genau $2k+1$ Lösungen t, p', q'; dabei sind p' und q' innere Punkte zweier fremder $(n-1)$-dimensionaler Simplexe von M_{n-1} und t ist <1, so daß die zugehörigen $2k+1$ Punkte p und q innere Punkte fremder n-dimensionaler Simplexe von M_n sind. Damit ist alles bewiesen.

12. Im Vorangehenden wurde der Kürze halber der Abbildungsgrad von $\varphi(A_{2n})$ bloß mod. 2 betrachtet. Da A_{2n}, wie man leicht beweisen kann, nicht nur ein Zyklus mod. 2, sondern ein gewöhnlicher Zyklus (übrigens sogar eine Mannigfaltigkeit) ist, so kann man auch mit Orientierung arbeiten. Weitere Ergebnisse aus dem Problemenkreis der topologischen Einbettungen werden den Gegenstand weiterer Mitteilungen bilden.

63. Kolloquium (17. V. 1933).

Čech (Brünn): *Über einen kurventheoretischen Satz von Ayres.* (Nach brieflicher Mitteilung.)

Für einen metrischen Raum K sei K^n_ν die Menge derjenigen Punkte von K, die eine Umgebung U mit $\delta(U)<\frac{1}{\nu}$ und mit höchstens n-punktigem $K.B(U)$ besitzen[1]). Der Durchschnitt $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} K^n_\nu$ ist die Menge K^n aller Punkte höchstens n-ter Ordnung von K. Ayres bewies folgenden Satz[2]): *Für jeden metrischen Raum K und für $n=3, 4, \ldots$ ist die Menge $K^{2n-3}-K^{n-1}$ nulldimensional*[3]) *oder leer.* Der Ayressche Beweis wurde von Menger in seinem Buche „*Kurventheorie*" (1932), S. 115, ausführlich dargestellt. Im Folgenden möchte ich darauf hinweisen, daß im Falle eines separablen Raumes K unter Verwendung des Summensatzes der Dimensionstheorie für separable Räume der ganze Beweis schon mit Hilfe der von Menger zum Beweise eines Hilfssatzes (Kurventheorie, S. 117), verwendeten Methode ohne die bei Menger folgende rekursive Konstruktion geführt

[1]) $\delta(U)$ bedeutet den Durchmesser, $B(U)$ die Begrenzung von U.
[2]) Trans. Amer. Math. Soc., *33* (1931), S. 253—256.
[3]) Im Menger-Urysohnschen Sinn.

werden kann. Da die Menge K_ν^{n-1} in K offen ist, ist $K^{2n-3}-K_\nu^{n-1}$ ($\nu=1,2,\dots$ ad inf.) in $K^{2n-3}-K^{n-1}=\sum_{\nu=1}^{\infty}(K^{2n-3}-K_\nu^{n-1})$ abgeschlossen. Nach dem Summensatz der Dimensionstheorie[4]) hat man also nur zu beweisen, daß $K^{2n-3}-K_\nu^{n-1}$ für jedes ν nulldimensional oder leer ist. Sei also p ein Punkt von K^{2n-3} und sei Z_0 eine vorgelegte Umgebung von p. Man hat eine Umgebung Z' von p mit den Eigenschaften $Z'\subset Z_0$ und $K^{2n-3}.B(Z')\subset K_\nu^{n-1}$ anzugeben. Es gibt eine Umgebung $Z \Subset Z_0$ von p, deren Begrenzung mit K einen endlichen (sogar höchstens $(2n-3)$-punktigen) Durchschnitt hat. Falls $K^{2n-3}.B(Z)$ leer ist, setzen wir $Z'=Z$. Sonst seien q_j $(1\leq j\leq c)$ die endlich vielen Punkte von $K^{2n-3}.\mathrm{B}(Z)$. Wie bei Menger (l. c. S. 117) bestimmen wir Umgebungen Q_j von q_j mit den Eigenschaften 1*), 2*), 3*), 4*), wobei jedoch 1*) jetzt aussagt, daß p nicht in $\overline{Q}_j$ liegt und in 2*) $\varepsilon=\frac{1}{\nu}$ zu setzen ist. Man hat dann (l.c., S.118) $\delta(V_{h_j})<\frac{1}{\nu}$, $\delta(W_{i_j})<\frac{1}{\nu}$ und die Mengen $K.B(V_{h_j})$, $K.B(W_{i_j})$ sind höchstens $(n-1)$-punktig; folglich ist $K.V_{h_j}\subset K_\nu^{n-1}$, $K.W_{i_j}\subset K_\nu^{n-1}$. Wir definieren Z' wie l. c., S. 118 (**). Dann ist $(p)\subset Z'\subset Z_0$ und (l. c., S. 119, Zeile 17) $K^{2n-3}.B(Z')\subset\sum_{j=1}^{a}K.V_{h_j}+\sum_{j=1}^{b}K.W_{i_j}\subset K_\nu^{n-1}$.

Gödel, Menger, Wald: *Diskussion über koordinatenlose Differentialgeometrie.*

Um die Aussage, daß die Riemannschen Räume sich im Kleinen wie euklidische Räume verhalten (daß „für unendlich benachbarte Punkte Riemannscher Räume die euklidische Geometrie gelte") im Sinne des von Menger (Math. Ann., *103*, vgl. auch diese Ergebn., *2*, S. 22) entwickelten Programmes einer koordinatenlosen Differentialgeometrie zu präzisieren, wären die zur metrischen Kennzeichnung der euklidischen Räume dienenden Determinanten („Volumsdeterminanten") geeignet. Setzen wir für vier Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 eines metrischen Raumes

$$D(p_1, p_2, p_3, p_4)=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & (p_i\,p_j)^2 \end{vmatrix}_{(i,j=1,2,3,4)}$$

wo $p_i p_j$ den Abstand von p_i und p_j bezeichnet, so ist die Ebene unter den metrischen Räumen nach Menger (Math. Ann., *100*, S. 113 und diese Ergebn., *1*, S. 20 f.) dadurch gekennzeichnet, daß sie vollständig, konvex und konvex nach außen ist und daß für je vier ihrer Punkte $D(p_1, p_2, p_3, p_4)=0$ gilt. Zur Kennzeichnung Gaußscher Flächen müßte statt dessen die Tatsache herangezogen werden, daß für Punktequadrupel, die gegen einen Punkt konvergieren, der Wert

[4]) Die Voraussetzung der Separabilität brauche ich, da sonst die Giltigkeit des Summensatzes nicht feststeht.