Matyáš Lerch

Sur un théorème arithmétique de Zolotarev

Bulletin int. de l'Ac. Prague 3 (1896), 34–37

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501494

distance d'un degré; entre $1-1\frac{1}{2}^0$ de distance, elle s'élargit brusquement pour former une bande 10' de largeur et $5\frac{1}{2}^0$ de longueur. L'angle de position de la queue plus courte (du nord) a 330^0 à sa première moitié et 350^0 à sa deuxième. L'angle de position de la queue principale est de 304^0 à peu près.

Prague le 10 janvier 1896.

Sur un théorème arithmétique de Zolotarev.

Par M. Lerch.

(Présenté le 13 mars 1896.)

Dans les Nouvelles Annales de Mathématiques de 1872*) un savant russe, M. Zolotarev, a démontré un théorème très intéressant, concernant la classe de permutation qu'on obtient en remplaçant dans la série

$$k, 2k, 3k, \ldots (p-1)k \tag{1}$$

où p est supposé premier et k non divisible par p, chaque terme par son plus petit reste positif pris par rapport au module p.

En attribuant à une permutation comme caractère le nombre $+1$ ou -1 suivant que le nombre des dérangements est pair ou impair, le théorème de Zolotarev s'exprime comme il suit:

La permutation à laquelle se réduit la série (1) *a pour caractère le symbol* $\left(\frac{k}{p}\right)$.

Nous allons généraliser la question en prenant pour p un nombre composé quelconque, pair ou impair, naturellement positif, et en supposant k premier avec p. Pour une quantité positive ξ je représente par $\Re(\xi)$ son plus petit reste positif qui résulte en retranchant de la quantité ξ sa partie entière $[\xi]$. Au contraire j'emploi la lettre $R(\xi)$ pour représenter le reste qui est le plus petit en valeur absolu, qu'on trouve en retranchant de la quantité réelle (positive ou négative) l'entier le plus approché.

La permutation que nous aurons à considérer peut être remplacée par la suivante

$$\Re\left(\frac{k}{p}\right), \Re\left(\frac{2k}{p}\right), \Re\left(\frac{3k}{p}\right), \ldots \Re\left(\frac{(p-1)k}{p}\right); \tag{1a}$$

ses dérangements provenant des différences négatives de la forme

$$\Re\left(\frac{\nu k}{p}\right) - \Re\left(\frac{\nu' k}{p}\right), \quad (\nu > \nu' = 1, 2, 3, \ldots p-2),$$

il faut chercher le signe du produit de toutes ces différences, positives ou négatives.

---

*) 2me série, t. XI, p. 354.

Remarquons que pour deux quantités positives ξ et ξ', dont la première est la plus grande, l'expression

$$[\xi]-[\xi']-[\xi-\xi']$$

est zéro ou un suivant que la différence $\Re(\xi)-\Re(\xi')$ est positive ou négative. Cela étant, le caractère $\left(\frac{k}{p}\right)$ de la suite (1^a) sera donné, évidemment, par l'expression

$$\left(\frac{k}{p}\right)=(-1)^{\sum\limits_{\nu=2}^{p-1}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu-1}\left\{\left[\frac{\nu k}{p}\right]-\left[\frac{\nu' k}{p}\right]-\left[\frac{\nu-\nu'}{p}k\right]\right\}}.$$

Or on a évidemment

$$\sum_{\nu=2}^{p-1}\sum_{\nu'=1}^{\nu-1}\left[\frac{\nu-\nu'}{p}k\right]=\sum_{\nu=2}^{p-1}\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\left[\frac{\mu k}{p}\right],$$

ce qui réduit notre exposant à la somme

$$\sum_{\nu=2}^{p-1}\sum_{\nu'=1}^{\nu-1}\left[\frac{\nu k}{p}\right]=\sum_{\nu=2}^{p-1}(\nu-1)\left[\frac{\nu k}{p}\right],$$

augmentée d'un nombre paire; or les termes $\nu=3,5,7,\ldots$ étant pairs, il ne reste que la somme qui provient des termes où ν est pair

$$\sum_{\mu=1}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}\left[\frac{2\mu k}{p}\right];$$

on a par conséquent

$$\left(\frac{k}{p}\right)=(-1)^{\sum\limits_{\mu=1}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}\left[\frac{2\mu k}{p}\right]}. \tag{2}$$

On obtient une expression bien connue, en employant l'identité évidente

$$(-1)^{[2x]}=\text{sgn.}\,R(x),$$

les lettres sgn. exprimant qu'il faut prendre le *signe* de la quantité $R(x)$ qui suit. Il vient de la sorte

$$\left(\frac{k}{p}\right)=\text{sgn.}\prod_{\mu=1}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}R\left(\frac{\mu k}{p}\right), \tag{3}$$

et c'est cette expression dont Kronecker a démontré l'identité avec le symbole $\left(\frac{k}{p}\right)$ généralisé par Jacobi, en supposant toutesfois p impair.

Lorsque p est pair, la somme

$$\sum_{\mu=1}^{\frac{p}{2}-1}\left[\frac{2\mu k}{p}\right]$$

devient égale à $\frac{1}{2}(k-1)\left(\frac{p}{2}-1\right)$, et on a les théorèmes suivants:

Soit k un entier, premier avec $2m$; la permutation qui résulte en réduisant, suivant le module $2m$, les termes de la série

$$k, 2k, 3k, \ldots (2m-1)k,$$

a pour caractère le nombre $(-1)^{\frac{(k-1)(m-1)}{2}}$.

Soit m un entier impair et positif, et k un entier premier avec m; la permutation qui résulte en réduisant, suivant le module m, les termes de la suite

$$k, 2k, 3k, \ldots (m-1)k,$$

a pour caractère le symbole $\left(\frac{k}{p}\right)$ *pris dans le sens de Jacobi.*

2. On sera conduit à une détermination un peu différente, en partant de la propriété élémentaire des déterminants.

Posons

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & \ldots a'_{p-1} \\ a''_1 & a''_2 & \ldots a''_{p-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(p-1)} & a_2^{(p-1)} & \ldots a_{p-1}^{(p-1)} \end{vmatrix},$$

et représentons par $\varDelta_k$ le déterminant qui résulte en remplaçant les éléments $a_\nu^{(\mu)}$ par $a_{k\nu}^{(\mu)}$, les indices $k\nu$ étant supposés réduits par rapport au module p. En désignant toujours par $\left(\frac{k}{p}\right)$ le caractère de la permutation (1ª), on voit que nous aurons

$$\varDelta_k = \left(\frac{k}{p}\right)\varDelta.$$

J'obtiens par conséquant une expression de $\left(\frac{k}{p}\right)$, en choisissant d'une manière convenable les quantités $a_\nu^{(\mu)}$. En posant $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ prenons $a_\nu^{(\mu)} = \omega^{\mu\nu}$. On trouve aisément

$$\varDelta = \varphi(\omega) = \omega^s \prod_{\nu=1}^{p-2} (\omega^\nu - 1)^{p-\nu-1}, \quad s = 1 + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \cdots + \binom{p}{2},$$

et par conséquent

$$\varDelta_k = \varphi(\omega^k) = \omega^{ks} . \prod_{\nu=1}^{p-2} (\omega^{k\nu} - 1)^{p-\nu-1}.$$

Il s'ensuit

$$\left(\frac{k}{p}\right) = \omega^{(k-1)s} \prod_{\nu=1}^{p-2} \left(\frac{\omega^{k\nu}-1}{\omega^\nu - 1}\right)^{p-\nu-1}$$

ce qui se réduit à la forme

$$\left(\frac{k}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(k-1)(p-1)p} \prod_{\nu=1}^{p-2} \left(\frac{\sin\frac{k\nu\pi}{p}}{\sin\frac{\nu\pi}{p}}\right)^{p-\nu-1}$$

ou puisqu'il ne s'agit que du signe,

$$\left(\frac{k}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(k-1)(p-1)p} \operatorname{sgn.} \prod_{\lambda} \sin \frac{k\lambda\pi}{p},$$

λ prenant les valeurs entières entre zéro et $p-1$, de la même parité que p.

Si donc p est paire et $=2m$, on a

(3) $$(-1)^{\frac{(k-1)(m-1)}{2}} = \operatorname{sgn.} \prod_{\mu=1}^{m-1} \sin \frac{\mu k \pi}{m},$$

et pour m impair

(4) $$\left(\frac{k}{m}\right) = (-1)^{\frac{(k-1)(m-1)}{2}} . \operatorname{sgn.} \prod_{\lambda} \sin \frac{k\lambda\pi}{m}, \qquad (\lambda = 1, 3, 5, \dots m-2).$$

En faisant usage de la formule évidente

$$\operatorname{sgn} \sin z\pi = \operatorname{sgn.} R\left(\frac{z}{2}\right),$$

on aura donc la formule suivante

(5) $$\left(\frac{k}{m}\right) = (-1)^{\frac{(k-1)(m-1)}{2}} \operatorname{sgn.} \prod_{\lambda} R\left(\frac{k\lambda}{2p}\right), \qquad (\lambda = 1, 3, 5, \dots m-2)$$

ou bien

(6) $$\left(\frac{k}{m}\right) = (-1)^{\frac{(k-1)(m-1)}{2} + \sum_{\lambda}\left[\frac{k\lambda}{m}\right]}.$$

Sur une espèce de séries semiconvergentes.

Par **M. Lerch.**

(Présenté le 13 mars 1896.)

1. Soit $f(z)$ une série de la forme

$$f(z) = \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots$$

ocnvergente pour les valeurs de z suffisamment grandes, et considérons la somme

$$F(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f(a+n),$$

où l'on suppose que ou la partie imaginaire de a soit suffisamment grande, ou la partie réelle soit assez grande et positive, pour que toutes les quantités $a+n$ se trouvent à l'intérieur du domaine de convergence de la série $f(z)$.

Il s'agit d'obtenir une valeur approchée de la fonction $F(a)$, la convergence de la série qui la définit étant bien large. J'emploi pour ce but l'expression

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu \left[\frac{1}{z^\nu} - \frac{1}{(z+1)^\nu}\right],$$