Lerch, Matyáš: Scholarly works

Matyáš Lerch

Deux théorèmes d'Arithmétique

Věstník Král. čes. spol. nauk, II. tř., 1887, 683–688

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501610

Terms of use:

© Akademie věd ČR, 1887

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Deux théorèmes d'arithmétique.

Par M. Lerch, docent à l'école polytechnique tchèque de Prague.

(Présenté par M. Ed. Weyr dans la séance du 9 Décembre 1887).

En représentant par $\psi(\alpha, \beta)$ le nombre des diviseurs de α supérieurs à β nous allons démontrer les deux formules suivantes:*)

$$\sum_{\rho=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \psi(n-\rho, \rho) = n, \qquad \left[\frac{n}{2}\right] = E\left(\frac{n}{2}\right), \tag{1}$$

$$\sum_{\rho=0}^{n} \psi(n+\rho, \rho) = 2n. \tag{2}$$

1. La première de ces deux formules s'obtient en égalant les coefficients de x^n des développements suivant les puissances croissantes de x de deux membres de l'équation

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{(1-x^\nu)(1-x^{\nu+1})}, \tag{a}$$

qui résulte immédiatement de l'identité évidente

$$1 - \frac{1+x}{1-x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{\nu+1}}{1-x^{\nu+1}} - \frac{1+x^\nu}{1-x^\nu}\right).$$

D'après les formules

$$\frac{x^\nu}{1-x^\nu} = \sum_{\mu=1}^{\infty} x^{\mu\nu}$$

$$\frac{1}{1-x^{\nu+1}} = \sum_{\rho=0}^{\infty} x^{\rho(\nu+1)}$$

l'équation (a) deviendra

*) Le symbole $E(x)$ représente le plus grand nombre entier contenu dans x.

$$(a') \qquad \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \sum_{\mu,\nu,\varrho} x^{\mu\nu+\varrho(\nu+1)},$$

d'où il suit que n est le nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$\mu\nu + \varrho(\nu+1) = n,$$

ou ce qui est la même chose, de l'équation

$$(\mu+\varrho)\nu = n - \varrho; \begin{pmatrix} \varrho = 0,\ 1,\ 2\ldots \\ \mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3\ldots \end{pmatrix}$$

Or on voit que ce nombre est la somme dans le premier membre de l'équation (1) qui par là est démontrée.

2. De ce qui précède il résulte que la somme

$$1+2+3+\ldots+r = \frac{r(r+1)}{2}$$

est le nombre des systèmes de nombres entiers $(\mu,\ \nu,\ \varrho)$ qui satisfont à l'inégalité

$$\mu\nu + \varrho(\nu+1) \leqq r, \begin{pmatrix} \mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3,\ldots \\ \varrho = 0,\ 1,\ 2,\ldots \end{pmatrix};$$

or ce nombre est évidemment exprimé par la somme

$$\frac{r(r+1)}{2} = \sum_{\mu,\nu} \left\{ E\left(\frac{r-\mu\nu}{\nu+1}\right) + 1 \right\}, \ (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

qui s'étend aux systèmes de nombres μ, ν tels que $r \geqq \mu\nu$ et dont le nombre s'exprime évidemment par la somme

$$\sum_{n=1}^{r} \vartheta(n),$$

en représentant par $\vartheta(n)$ le nombre des diviseurs de n. Donc nous aurons

$$(b) \qquad \frac{r(r+1)}{2} = \sum_{n=1}^{r} \vartheta(n) + \sum_{\mu,\nu} E\left(\frac{r-\mu\nu}{\nu+1}\right).$$

Posant, pour abréger, $E\left(\frac{r}{\mu}\right)=\left[\frac{r}{\mu}\right]$

et

(c)
$$K_\mu=\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{r}{\mu}\right]} E\left(\frac{r-\mu\nu}{\nu+1}\right),$$

il vient

(d)
$$K_\mu=\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{r}{\mu}\right]} E\left(\frac{r+\mu}{\nu+1}-\mu\right)=\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{r}{\mu}\right]} E\left(\frac{r+\mu}{\nu+1}\right)-\mu E\left(\frac{r}{\mu}\right).$$

Or il est clair, d'après les principes connus, qu'en représentant par $\chi(\alpha,\ \beta)$ le nombre des diviseurs de α non supérieurs à β, il vient

$$\sum_{\nu=1}^{\left(\frac{r}{\mu}\right)} E\left(\frac{r+\mu}{\nu+1}\right)=\sum_{n=1}^{r+\mu}\left\{\chi\left(n, \frac{r+\mu}{\mu}\right)-1\right\},$$

d'où

(e)
$$\sum_{\nu=1}^{\left(\frac{r}{\mu}\right)} E\left(\frac{r+\mu}{\nu+1}\right)=\sum_{n=1}^{r+\mu}\chi\left(n,\ \frac{r+\mu}{\mu}\right)-r-\mu.$$

En représentant par $\Theta(n)$ la somme des diviseurs de n, on voit que

$$\sum_{\mu=1}^{r} \mu E\left(\frac{r}{\mu}\right)=\sum_{n=1}^{r}\Theta(n),$$

de sorte qu'il vient selon (c), (d) et (e)

$$\sum_{\mu,\nu} E\left(\frac{r-\mu\nu}{\nu+1}\right)=\sum_{\mu=1}^{r} K_\mu$$
$$=\sum_{\mu=\nu}^{r}\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{r}{\mu}\right]} E\left(\frac{r+\mu}{\nu+1}\right)-\sum_{n=1}^{r}\Theta(n)$$
$$=\sum_{\mu=1}^{r}\sum_{n=1}^{r+\mu}\chi\left(n,\ \frac{r+\mu}{\mu}\right)-r^2-\frac{r(r+1)}{2}-\sum_{n=1}^{r}\Theta(n);$$

il s'ensuit d'après la formule (b)

$$(f)\quad r^2+r(r+1)+\sum_{n=1}^{r}[\Theta(n)-\vartheta(n)]=\sum_{\mu=1}^{r}\sum_{n=1}^{r+\mu}\chi\left(n,\ \frac{r+\mu}{\mu}\right).$$

En substituant dans cette formule $r-1$ à la place de r et en retranchant membre à membre, on obtient

$$(g)\qquad 4r-1+\Theta(r)-\vartheta(r)$$

$$=\sum_{n=1}^{2r}\chi(n,2)+\sum_{\mu=1}^{r-1}\chi\left(r+\mu,\ \frac{r+n}{\mu}\right)+\sum_{\mu=1}^{r-1}\sum_{n=1}^{r+\mu-1}\left\{\chi\left(n,\frac{r+\mu}{\mu}\right)-\chi\left(n,\frac{r+\mu-1}{\mu}\right)\right\}.$$

Or d'après la définition de la fonction χ il vient $\chi(n,\ 2)=1,\ 2,$ suivant que n est impair ou pair et il s'ensuit

$$(h)\qquad \sum_{n=1}^{2r}\chi(n,2)=3r.$$

D'ailleurs, on voit que

$$(i)\qquad \chi\left(r+\mu,\ \frac{r+\mu}{\mu}\right)=\psi(r+\mu,\ \mu-1);$$

car si le nombre $r+\mu$ a un diviseur non supérieur à $\frac{r+\mu}{\mu}$, il a nécessairement un second non inférieur à μ.

Nous allons déterminer la double somme qui figure dans le second membre de l'équation (g). La différence

$$\chi\left(n,\ \frac{r+\mu}{\mu}\right)-\chi\left(n,\ \frac{r+\mu-1}{\mu}\right)$$

diffère de zéro dans le seul cas où la différence

$$E\left(\frac{r+\mu}{\mu}\right)-E\left(\frac{r+\mu-1}{\mu}\right)$$

est égale à l'unité et où le nombre $E\left(\frac{r+\mu}{\mu}\right)$ est un diviseur de n;

dans se cas sa valeur est égale à l'unité. Or, on voit que l'expression

$$E\left(\frac{r+\mu}{\mu}\right)-E\left(\frac{r+\mu-1}{\mu}\right)$$

n'est l'unité que si μ est nn des diviseurs de r, de sorte que nous aurons, dans ce cas,

$$E\left(\frac{r+\mu}{\mu}\right)=\frac{r+\mu}{\mu};$$

ce nombre doit diviser n si la différence en question ne doit pas s'évanouir. La double somme considérée se réduit donc à la suivante

$$\sum_{\delta}\sum_{n=1}^{r+\delta-1} f(\delta,\, n)$$

où $f(\delta,\, n)=1,\ 0$ suivant que n est un multiple de $\frac{r+\delta}{\delta}$ ou non, et où δ parcourt tous les diviseurs de r à l'exception de $\delta=r$. Or la somme

$$\sum_{n=1}^{r+\delta-1} f(\delta,\, n)$$

est égale au nombre des termes $1,\ 2,\ 3, \ldots\ r+\delta-1$ qui sont divisible par $\frac{r+\delta}{\delta}$; posant $\frac{r}{\delta}=\delta'$ ce nombre-là s'exprime par la quantité

$$E\left(\frac{r+\delta-1}{\delta'+1}\right)=E\left(\frac{\delta\delta'+\delta-1}{\delta'+1}\right)=\delta-1,$$

et nous aurons, par conséquent,

$$(j)\qquad \sum_{\mu=1}^{r-1}\sum_{n=1}^{r+\mu-1}\left\{\chi\left(n,\ \frac{r+\mu}{\mu}\right)-\chi\left(n,\ \frac{r+\mu-1}{\mu}\right)\right\}$$

$$=\sum_{\delta}(\delta-1)=\Theta(r)-\vartheta(r)-r+1.$$

Des formules (*g*), (*h*), (*i*), (*j*) on conclut

$$(k)\qquad 2r-2=\sum_{\mu=1}^{r-1}\psi(r+\mu,\ \mu-1).$$

En se rappelant la formule

$$\psi(2r,\ r-1)=2,$$

l'équation (*k*) nous donne

$$(k')\qquad 2r=\sum_{\mu=1}^{r}\psi(r+\mu,\ \mu-1)=\sum_{\varrho=0}^{r-1}\psi(r+\varrho+1,\ \varrho).$$

Or on a

$$\psi(2r+1,\ r)=1,$$
$$\psi(2r+2,\ r+1)=1,$$

et par conséquent l'équation (*k'*) deviendra

$$2r+2=\sum_{\varrho=0}^{r+1}\psi(r+\varrho+1,\ \varrho);$$

celle-ci se reduit à la formule (2) en posant $n=r+1$.

Remarque. Le théorème exprimé par l'équation (1) ne diffère que par la forme d'un résultat de M. *Catalan.* Je reviendrai sur ce sujet dans une addition à la présente note, qui sera présentée à la Société dans une des prochaines séances.

Le 20. janvier 1888.

44.

Nová geologická pozorování v Radnickém okolí.

Podává J. Kušta, předloženo dne 9. prosince 1887.

S tabulkou.

I. Silurský ostrůvek Třemošenské droby s otisky u Lohovic.

Třemošenské slepence a droby, které zvláště na jihovýchodní straně českého siluru veliké prostranství zaujímají, objevují se na kraji severozápadním pouze v úzkém pruhu a to u známého silur-