EQUADIFF 6

Rolf Klötzler

Zur analytischen Lösung alter und neuer geometrischer Optimierungsprobleme

In: Jaromír Vosmanský and Miloš Zlámal (eds.): Equadiff 6, Proceedings of the International Conference on Differential Equations and Their Applications held in Brno, Czechoslovakia, Aug. 26 - 30, 1985. J. E. Purkyně University, Department of Mathematics, Brno, 1986. pp. [451]--458.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/700130

ZUR ANALYTISCHEN LÖSUNG ALTER UND NEUER GEOMETRISCHER OPTIMIERUNGSPROBLEME

R. KLÖTZLER
Karl-Marx-Universität Leipzig, Sektion Mathematik
7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz, DDR

Section D

In Verbindung mit den klassischen Zugängen der Variationsrechnung hat die Theorie gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen zu geometrischen Fragestellungen erfolgreich und klärend zu wirken vermocht. Die umfangreiche Theorie der Minimalflächen legt dafür z.B. ein beredtes Zeugnis ab. Andererseits finden wir in dem Buche "Theorie der konvexen Körper" von T. Bonnesen und W. Fenchel [3] aus dem Jahre 1934 die Bemerkung, daß zu vielen Optimierungsaufgaben über Kenngrößen konvexer Körper die Variationsrechnung nur in sehr bescheidenem Maße wirksam werden konnte. Die Ursache dafür wird darin gesehen, daß zu dieser Zeit zur Lösung von Problemen mit Ungleichungsrestriktionen keine ausreichenden Theorien und Erfahrungen zur Verfügung standen und daß weiterhin die bekannten Sätze der Variationsrechnung i.allg. nur hinreichende Aussagen über lokale Optima lieferten; der Geometer sucht aber in der Regel globale Optima. Die großen Erfolge, die H. Minkowski [14], W. Blaschke [2] und andere (vgl. [3]) bei geometrischen Optimierungsaufgaben zu konvexen Körpern im ersten Drittel dieses Jahrhunderts erzielen konnten, beruhen in erster Linie auf der Entdeckung von Konvexitätseigenschaften wichtiger geometrischer Zielfunktionale, auf dem Einsatz des zentralen Begriffs der Stützfunktion eines konvexen Körpers und auf unterschiedlichen kunstvollen Zusatzüberlegungen. Der Mangel eines systematischen analytischen Zugangs zu solchen Fragestellungen blieb aber zugleich Ursache dafür, daß wir gegenwärtig selbst bei ganz elementar erscheinenden Optimierungsproblemen der Ebene noch zahlreiche ungeklärte Fragen vorfinden (vgl. [5]).

Mit der heutigen Steuerungstheorie für Funktionen von einer Variablen und ihrem zentralen Theorem des Pontrjaginschen Maximumprinzips vermögen wir zwar jetzt auch Probleme mit Ungleichungsrestriktionen zu packen und notwendige Optimalitätsbedingungen aufzustellen, der Nachweis globaler Optimalitätseigenschaften bleibt aber dennoch über die Lösung des sog. Syntheseproblems recht schwierig. Für Funktionen von mehreren Variablen fehlen sogar adäquate Formen des Pontrjaginschen Maximumprinzips und auch für den Fall, daß Steuerungen nicht als gewöhnliche Funktionen, sondern als Distributionen auftreten. Aber gerade vor diese Situation wird man schon bei geometrischen Optimierungsaufgaben im E^2 gestellt. Nach [2] läßt sich jede konvexe beschränkte Menge B des E^2 eindeutig durch seine 2π-periodische Stützfunktion h darstellen, zu der über dem Grundraum $\overset{\circ}{C}(0,2\pi)$ das distributive Funktional des Krümmungsradius $\rho := \ddot{h} + h$ größer oder gleich Null ist. Umgekehrt bildet jede Funktion h dieser Eigenschaften die Stützfunktion einer konvexen beschränkten Menge $B \subset E^2$. Für streng konvexe Bereiche B ist $h \in W_1^2(0,2\pi)$ und ρ im Sinne von [4] ein reguläres Funktional; wir bezeichnen in diesem Falle h als eine reguläre Stützfunktion. Damit führen geometrische Optimierungsaufgaben zu konvexen Mengen des E^2 analytisch formuliert zu Aufgaben des Typs

$$J(h) \to \operatorname*{Min}_{A} \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \ddot{h} + h \geq 0 \tag{1}$$

im distributiven Sinne. A ist dabei der durch den speziellen Aufgabencharakter bestimmte zulässige Bereich der h .
Beschränkt man sich hingegen in der Beschreibung eines solchen Optimierungsproblems ausschließlich auf reguläre Stützfunktionen, so kann an die Stelle von (1) sachgemäß nur die Ersatzaufgabe

$$J(h) \to \inf_{A \cap W_1^2(0,2\pi)} \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \ddot{h} + h \geq 0 \tag{1'}$$

treten. Im Grenzelememt h_0 einer konvergenten Minimalfolge h_n zu (1') haben wir dann die Lösung von (1) zu sehen.

Ein Mittel zur Lösung solcher Probleme bietet heute eine verallgemeinerte Dualitätstheorie von Steuerungsproblemen nach W.F.Krotov [13] und R.Klötzler [6] . Auf der EQUADIFF 4 wurden deren theoretische Grundlagen bereits vorgestellt. Wir greifen im weiteren auf die ausgereifteren und erweiterten Darstellungen von [1] und [7] zurück.

1. Theoretische Grundlagen der Dualitätstheorie bei Steuerungsproblemen

Wir betrachten mehrdimensionale Steuerungsprobleme der Gestalt

$$J(x,u) = \int_{\Omega} f(t,x(t),u(t))\, dt \rightarrow \inf \tag{2}$$

mit Zustandsfunktionen $x \in X$ und Steuerfunktionen $u \in U(x)$, welche die Zustandsgleichungen

$$x^i_{t\alpha} = g^i_\alpha(t,x,u) \quad \text{auf } \Omega \quad (i=1,\dots,n;\ \alpha=1,\dots,m)$$

und Nebenbedingung $b(x) = 0$ auf einer niederdimensionalen Punktmenge $R \subset \bar{\Omega}$ mit $\dim R < \dim \Omega = m$ erfüllen. Ω und G seien (im starken Sinne von C.B.Morrey) Lipschitzgebiete des E^m bzw. E^{m+n}, f, b und g^i_α seien stetig und

$$X = \{x \in W^{1,n}_p(\Omega) \mid (t,x(t)) \in G \ \forall t \in \Omega\},$$

$$U(x) = \{u \in L^r_p(\Omega) \mid u(t) \in V(t,x(t)) \text{ fast überall auf } \Omega\}.$$

Dabei ist $p > m$ und V im Sinne von Joffe/Tichomirov eine normale mengenwertige Abbildung von $\bar{G}$ in den E^r.

Ein zulässiges Paar (x,u) zu (2) heißt ein Prozeß.

$H(t,\xi,v,y) := -f(t,\xi,v) + y^\alpha_i\, g^i_\alpha(t,\xi,v)$ bildet die Pontrjagin-Funktion zu (2) und

$$\mathcal{H}(t,\xi,y) := \sup_{v \in V(t,\xi)} H(t,\xi,v,y)$$

die zugeordnete Hamilton-Funktion.
Dann gilt unter Berufung auf [1] und [7] folgendes aus drei Sätzen bestehendes theoretisches Grundgerüst.

Satz 1 (Dualitätstheorem):
Es sei (x,u) ein Prozeß und $S = (S^1,\dots,S^m)$ eine vektorwertige Funktion mit folgenden Eigenschaften.

1. Es existiert eine (von S abhängige) Zerlegung von Ω in endlich viele starke Lipschitzgebiete $\Omega_j(S)$, so daß S stetig differenzierbar ist auf jedem $G_j(S) = \{(t,\xi) \in G \mid t \in \Omega_j(S)\}$ und stetig auf $\bar{G}_j(S)$ fortgesetzt werden kann. Außerdem sei $R \subset \bigcup_j \partial\Omega_j(S)$.

2. Auf jedem $G_j(S)$ genügt die Funktion S der Hamilton-Jacobischen Differentialungleichung

$$S^{\alpha}_{t^{\alpha}}(t,\xi) + \mathcal{H}(t,\xi,S_{\xi}(t,\xi)) \leq 0 \qquad \forall (t,\xi) \in G_j(S) \quad . \tag{3}$$

Dann gilt die Dualitätsbeziehung

$$J(x,u) \geq \hat{L}(S) := \inf_{\zeta \in Q} \left(\sum_j \int_{\partial\Omega} S^{\alpha}(t,\zeta(t))\, n^j_{\alpha}(t)\, do \right) \quad , \tag{4}$$

wobei $n^j = (n^j_1,\dots,n^j_m)$ der äußere Normaleneinheitsvektor von $\partial\Omega_j$ im Punkte t ist und

$$Q := \{ \ \zeta \in C(\bar{\Omega}) \mid (t,\zeta(t)) \in \bar{G} \ \text{ und } \ b(\zeta) = 0 \ \text{ auf } \ R \, \} \ .$$

Satz 2 (Optimalitätskriterium):
Es gilt $J(x,u) = \hat{L}(S)$ genau dann für einen Prozeß (x,u) und ein zulässiges S im Sinne von Satz 1, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind.

a) $H(t,x(t),u(t),S_{\xi}(t,x(t))) = \mathcal{H}(t,x(t),S_{\xi}(t,x(t)))$ auf jedem Ω_j , (5a)

b) $S^{\alpha}_{t^{\alpha}}(t,x(t)) + \mathcal{H}(t,x(t),S_{\xi}(t,x(t))) = 0$ auf jedem Ω_j , (5b)

c) $$L(S) = \sum_j \int_{\partial\Omega_j} S^{\alpha}(t,x(t))\, n^j_{\alpha}(t)\, do \quad . \tag{5c}$$

Unter diesen Bedingungen ist (x,u) optimal .

Satz 3 (Minimalfolgen-Test)
Es sei S eine Funktion im Sinne von Satz 1, für die $\mathcal{H}(\cdot,\cdot,S_{\xi}(\cdot,\cdot))$ beschränkt und stetig ist in jedem $G_j(S)$. x sei Grenzfunktion (bzgl. Konvergenz dem Maße nach) einer Folge von Zustandsfunktionen x_k zu Prozessen (x_k,u_k). Es gelte (5b) und (5c).
Dann sind die beiden nachstehenden Aussagen äquivalent.

I. Es gilt $\lim_{k\to\infty} J(x_k,u_k) = \hat{L}(S)$, so daß (x_k,u_k) eine Minimalfolge bildet.

II. $$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} H(t,x_k,u_k,S_{\xi}(t,x_k))\, dt = \int_{\Omega} \mathcal{H}(t,x(t),S_{\xi}(t,x(t)))\, dt, \tag{6a}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum \int_{\partial\Omega_j} [\, S^{\alpha}(t,x_k) - S^{\alpha}(t,x) \,]\, n^j_{\alpha}(t)\, do \ = 0 \quad . \tag{6b}$$

Diese drei Sätze bilden die technische Grundlage einer häufig erfolgreichen Heuristik zur Ermittlung optimaler Lösungen von (2) oder von Minimalfolgen. Dazu wählt man zunächst gewisse Ansätze für $S(t,\xi)$

- in vielen Fällen genügen schon lineare oder quadratische Funktionen bzgl. ξ .Mit diesen liefern die Eigenschaften (3) und (5b) zunächst notwendige Bedingungen in Gestalt lokaler Kuhn-Tucker-Bedingungen für x auf Ω ,die man als verallgemeinerte kanonische Differentialgleichungen der Hamilton-Jacobischen Theorie auffassen kann. Aus (4) und (5c) erhalten wir lokale Kuhn-Tucker-Bedingungen für x auf $\partial\Omega_j$ und damit auch auf R ,die wir als verallgemeinerte Transversalitätsbedingungen anzusprechen haben. Die in ξ nichtlinearen Glieder von S bestimmen wir nachträglich so, daß die Bedingungen (3)/(5b) und (4)/(5c) in der Tat erfüllt werden.

Wir skizzieren nachstehend einige Aufgabenklassen, an denen diese einheitliche Behandlungsmethode zum Erfolg führte. Es sind darunter zahlreiche Aufgaben, für die aus unterschiedlichen Überlegungen heraus schon an anderer Stelle optimale Lösungen ermittelt wurden. Bedeutsam erscheint uns, daß aber auch manches bisher ungelöste Problem dadurch seine Klärung fand.

2. Beispiele analytisch gelöster geometrischer Optimierungsprobleme

a) Das Inpolygon kleinsten Umfangs zu gegebenem konvexen n-Eck P_n (Problem von J. Steiner und H.A. Schwarz).

Diese Aufgabe führt analytisch auf die Lösung des Problems

$$\int_0^{2\pi} h(\varphi)\cdot d\varphi \to \inf$$

unter den Nebenbedingungen $\ddot{h} + h \geq 0$, $h(0) = h(2\pi)$ und $h(\varphi_i) = a_i$ ($i = 1,\ldots,n$) .

Über einen linearen S-Ansatz bzgl ξ läßt sich das zugeordnete Steuerungsproblem mittels des Satzes 3 auf eine semi-infinite lineare Optimierungsaufgabe zurückführen und damit analytisch und rechentechnisch lösen (vgl. [8] und [11]).

b) Konvexe Bereiche größten Umfangs bei gegebener Dicke Δ und vorgeschriebenem Durchmesser D .

Diese Aufgabe führt auf die Lösung des Problems

$$\int_0^{\pi} [h(\varphi) + h(\varphi+\pi)]\, d\varphi \to \sup$$

unter den Bedingungen $\Delta \leq h(\varphi)+h(\varphi+\pi) \leq D, \ddot{h} + h \geq 0, h(0)=h(\pi)= \Delta/2$.

Die Ermittlung der gesamten Lösungsmannigfaltigkeit gelang hier bereits mit linearem S-Ansatz bzgl. ξ . Über diese und verwandte Aufgaben vgl. im Detail [1] .

c) Das spezielle isoperimetrische Einbettungsproblem: Finde zu P_n einen eingeschlossenen konvexen Bereich vorgegebenem Umfangs 1 mit maximalem Flächeninhalt.

Diese Aufgabe führt analytisch auf das Problem

$$(1/2) \cdot \int_0^{2\pi} (h^2(\varphi) - \dot{h}^2(\varphi)) \, d\varphi \rightarrow \sup$$

unter den Nebenbedingungen $\ddot{h} + h \geq 0$, $\int_0^{2\pi} h(\varphi) \, d\varphi = 1$, $h(0)=h(2\pi)$ und $h(\varphi_i) \leq a_i$ ($i = 1,\dots,n$) .

Seine Lösung entspricht geometrisch einem Kreis in P_n oder der konvexen Hülle aller in P_n eingeschlossenen Kreise ein und desselben wohlbestimmten Radius (vgl. [8]) .

d) Das Inpolygon kleinsten Durchmessers zu gegebenem konvexen n-Eck P_n

Diese Aufgabe führt auf die Lösung des Problems

$$\int_0^{2\pi} z(\varphi) \, d\varphi \rightarrow \inf$$

unter den Nebenbedingungen $\dot{z} = 0$, $\ddot{h} + h \geq 0$, $z \geq h(\varphi) + h(\varphi+\pi)$ und $h(0) = h(2\pi)$, $h(\varphi_i) = a_i$ ($i = 1,\dots,n$).

Speziell für das Dreieck P_3 mit nicht überstumpfen Winkeln ergibt sich geometrisch eine optimale Figur in Gestalt eines speziellen gleichseitigen Indreiecks B . Es ist dadurch charakterisiert einen Punkt zu enthalten, von dem aus die Lote auf die Seiten von P_3 gerade durch die Eckpunkte von B hindurchgehen. Seine Konstruktion läßt sich mit Zirkel und Lineal ausführen.

Im allgemeinen Fall läßt sich in Analogie zu a) das zugeordnete Steuerungsproblem wiederum auf eine semi-infinite lineare Optimierungsaufgabe zurückführen (vgl. im einzelnen [12]).

e) Finde jene ebene Kurve C vorgegebener Länge, so daß deren konvexe Hülle größte Dicke besitzt (Problem der universalen Rettungskurven).

Analytisch ist diese Aufgabe dem nachstehenden parametrischen Steuerungsproblem äquivalent

$$\int_0^{\pi} h(\varphi) \, d\varphi \rightarrow \inf$$

unter den Nebenbedingungen $\ddot{h} + h \geq 0, \dot{h}(0)=\dot{h}(\pi)=0, h(0)=h(\pi)= \alpha$, $h(\varphi) + \alpha |\cos\varphi| \geq \Delta$ zu gegebener Konstanten $\Delta > 0$ und freiem Parameter α.
Für die optimale Kurve C ergibt sich conv C als ein spezielles Yamanouti-Dreieck (vgl. im einzelnen [9]).

Hinsichtlich mehrdimensionaler Probleme vgl. [1] und den Nachweis, daß im E^n für $n \geq 3$ nur die Kugel vom Durchmesser Δ der konvexe Bereich kleinster Oberfläche bei gegebener Dicke Δ ist [10] .

Literatur

[1] Andrejewa, J.A. und R.Klötzler: *Zur analytischen Lösung geometrischer Optimierungsaufgaben mittels Dualität bei Steuerungsproblemen I,II.* ZAMM 64,35-44,147-154 (1984).

[2] Blaschke, W.: *Kreis und Kugel.* Leipzig: Teubner-Verlag 1916.

[3] Bonnesen, T. und W. Fenchel: *Theorie der konvexen Körper.* Berlin: Springer-Verlag 1934.

[4] Gelfand, I.M. und G.E.Schilow: *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) I,II.* Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1960, 1962.

[5] Jaglom, J.M. und W.G.Boltjanski: *Konvexe Figuren.* Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956.

[6] Klötzler, R.: *On a general conception of duality in optimal control*, EQUADIFF IV, Proceedings, Prague, 1977. Lecture Notes in Mathematics 703.

[7] Klötzler, R.: *Globale Optimierung in der Steuerungstheorie.* ZAMM 63 (1983), T 305- T 312.

[8] Klötzler, R.: *Geometrical applications of duality in optimal control.* Mathematical Methods in Operations Research, Sofia 1983, 52-69.

[9] Klötzler, R.: *Universale Rettungskurven I.* Zeitschr.f.Analysis und ihre Anwendungen 1986 (im Druck).

[10] Klötzler, R.: *Konvexe Bereiche kleinster Oberfläche bei gegebener Dicke.* Zeitschrift f. Analysis und ihre Anwendung 4 (4) 1985, 373-383.

[11] Klötzler,R.und H.Rudolph: *Zur analytischen und algorithmischen Behandlung eines geometrischen Optimierungsproblems von J.Steiner.* Math. Operationsforschung und Statistik, Ser. Optimization 1985 (im Druck).

[12] Klötzler,R.: *Inpolygone kleinsten Durchmessers.* Math. Operationsforschung und Statistik, Ser. Optimization 1986 (in Vorbereitung).

[13] Кротов,В.Ф. и В.И.Гурман: Методы и задачи оптималного управления. Москва Наука 1973.

[14] Minkowski,H.: *Theorie der konvexen Körper,* Gesammelte Abhandlungen Bd.2,131-229., Leipzig und Berlin:Teubner-Verlag 1911.