

A. Goldman

Measures vectorielles, mesures cylindriques et propriété de Radon-Nikodym

In: Zdeněk Frolík (ed.): Abstracta. 4th Winter School on Abstract Analysis. Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, 1976. pp. 91–94.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/701051>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic, 1976

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

FOURTH WINTER SCHOOL (1976)

MESURES VECTORIELLES, MESURES CYLINDRIQUES ET PROPRIÉTÉ  
DE RADON-NIKODYM

A. GOLDMAN

Notation:  $\vec{m}: \Sigma \rightarrow E$  ( ) est une mesure vectorielle à valeur dans un espace localement convexe séparé  
 $p$  - est une probabilité sur  $(T, \Sigma)$ ,  $p(T) = 1$   
 On suppose  $\vec{m} \ll p$  ( $p(A) = 0 \Rightarrow \vec{m}(A) = \vec{0}$  ).  
 On note  $\forall A \in \Sigma$  par

$$S_A = \left\{ \frac{\vec{m}(B)}{p(B)} ; B \subset A ; B \in \Sigma, p(B) \neq 0 \right\}.$$

On suppose que  $S_T$  est borné dans  $E$ .

Pour toute partie  $N = \{x'_1, \dots, x'_n\} \subset E'$  on note

$$E \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad T \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\Pi_N : x \longrightarrow (x'_i(x)) \quad \text{et} \quad f_N : t \longrightarrow (f_{x'_i}(t))$$

(avec  $x'_i \circ \vec{m} = f_{x'_i} \circ p$  ).

La mesure cylindrique  $\lambda$  associée à  $(\vec{m}, p)$  est définie par  $\lambda(\Pi_N^{-1}(B)) = p(f_N^{-1}(B)) \forall B$  borelien de  $\mathbb{R}^n$ .

Proposition: Soit  $(\vec{m}, p)$  comme ci dessus, il existe toujours une densité scalairement mesurable  $\vec{f}: T \rightarrow (E', \sigma(E', E'))$   
 Corollaire (Metivier). Si  $\forall \epsilon > 0$  il existe  $\tilde{D}_\epsilon$  disque faiblement compact dans  $E$  et  $A \subset T$  tels que:  $p(T-A) \leq \epsilon$

et  $S_A \subset D_\varepsilon$  alors il existe  $\vec{f}: T \rightarrow E$ .

**Théorème: I)** Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $A \in \Sigma$ ,  $B \subset E$  tels que  $\mu(T - A) \leq \varepsilon$  et  $S_A \subset B$ . Alors  $\lambda(\Pi_N^{-1}(\overline{\Pi_N(B)})) \geq 1 - \varepsilon \quad \forall N$ .

II) Inversement soit  $B$  un disque de  $E$  tel que

$\lambda(\Pi_N^{-1}(\overline{\Pi_N(B)})) \geq 1 - \varepsilon$ , alors il existe  $A \in \Sigma$  tel que  $\mu(T - A) \leq \varepsilon$  et  $S_A \subset \overline{B}$ .



**Théorème (Kupka - Pelloumail).** Si  $\forall \varepsilon > 0$  il existe  $A \subset T$  et  $K$ -compact faible de  $E$  tels que  $\mu(T - A) \leq \varepsilon$  et  $S_A \subset K$  alors il existe une densité faible



**Théorème (Hebert).** Si  $\forall \varepsilon > 0$  il existe  $A \subset T$  et  $K$ -compact faible métrisable tel que  $\mu(T - A) \leq \varepsilon$  et  $S_A \subset K$  alors il existe  $\vec{f}: T \rightarrow E$  totalement mesurable

### $\sigma$ -dentsbilité

**Def.:** Soit  $D \subset E$  on note par  $\sigma D = \{ \sum \lambda_m x_m ; \sum \lambda_m = 1, \lambda_m > 0, (x_m) \subset D \text{ et la somme existe} \}$

**Def.:** Soit  $D \subset E$  on dira que  $D$  est  $K$ - $\sigma$ -dentsble si pour tout  $V(0)$  dans  $E$  il existe  $x \in D$  et  $K$ -compact de  $E$  tels que  $x \notin \sigma(D \setminus (K + V(0)))$ .

**Théorème:** Les conditions suivantes sont équivalentes

a)  $\forall \varepsilon > 0, \forall V(0)$  il existe  $K_\varepsilon^V$ -compact tel que  $\lambda^*(K_\varepsilon^V + V) \geq 1 - \varepsilon$

b)  $\forall \varepsilon > 0, \forall V(0)$  - " -  $G_\varepsilon^V$  sous-espace vectoriel de dimension finie tel que  $\lambda^*(G_\varepsilon^V + V) \geq 1 - \varepsilon$

c)  $\forall \varepsilon > 0, \forall V(0)$  il existe  $A \in \Sigma$ , tel que  $\mu(T - A) \leq \varepsilon$  et  $S_A \subset K + V$  ( $K$ -compact)

d)  $\forall \varepsilon > 0, \forall V(0)$  il existe  $A \in \Sigma$ , - " -  
 $\mu(T - A) \leq \varepsilon$  et  $S_A \subset G + V$  avec  $G$  sous-espace vectoriel de dimension finie.

Théorème: Soit  $(\vec{m}, \mu)$  tel que  $\forall A \in \Sigma$  il existe  $B \subset A$   $B \in \Sigma$   $p(B) \neq 0$  vérifiant:  $S_B$  est  $K$ - $\sigma$ -dentable. Alors les conditions du théorème précédent sont réalisées.



Théorème: Si  $E$  est un Banach et si  $\forall A \in \Sigma \exists B \subset A$  tel que  $S_B$  soit  $K$ - $\sigma$ -dentable alors il existe  $\vec{f}: T \rightarrow E$  totalement mesurable.

Théorème: Soit  $E$  quasi-compact. On a les équivalences.

a) Tout borné  $B$  de  $E$  est  $K$ - $\sigma$ -dentable.

b) Tout  $\lambda$  provenant d'un couple  $(\vec{m}, \mu)$  vérifie la condition de Prokhorov affaiblie

$$(\forall \varepsilon, \forall V, \exists K_\varepsilon^V : \lambda^*(K_\varepsilon^V + V) \geq 1 - \varepsilon).$$

### Problèmes

Problème 1. Supposons qu'il existe  $\vec{f}: T \rightarrow E$ ,  $\lambda$  vérifie-t-elle la condition de Prokhorov affaiblie.

Réponse non. Exemple (E. Thomas)  $[0,1] \rightarrow L^\infty$

$$\vec{f}: t \rightarrow 1_{[t,1]}$$

Soit  $\vec{m}(A) = \int_A \vec{f} d\mu$ . Alors on a:

$\alpha$ )  $\vec{m}$  est une mesure à valeur dans  $(\mathbb{L}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ .

$\beta$ )  $\vec{f}$  est une densité faible.

$\gamma$ )  $\lambda \neq$  de Radon

Problème 2. Soit  $E$  complet tel que tout borné est  $\delta$ -dentable existe-t-il une densité faible

La réponse est non!

Exemple. Soit  $\Omega \subset [0,1]$   $\mu_*(\Omega) = 0$ ,  $\mu^*(\Omega) = 1$ . On considère la mesure vectorielle  $\vec{m}: \mathcal{B}([0,1]) \longrightarrow M^\infty(\Omega)$

$$A \longrightarrow \vec{m}(A)$$

$$(\vec{m}(A))(B) = \mu^*(A \cap B)$$

(avec  $\mu \equiv$  mesure de Lebesgue).  $M^\infty(\Omega)$  est l'espace de Rome. Alors on a:

$\alpha$ )  $\vec{m} \ll \mu$

$\beta$ )  $M^\infty(\Omega)$  est complet et tout borné  $B$  de  $E$  est  $\delta$ -dentable

$\gamma$ ) Il n'existe pas de densité faible.