Mnohostěny

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

MNOHOSTĚNY

27

Vydal ÚV Matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

STANISLAV HORÁK

mnohostěny

PRAHA
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali prof. dr. A. Urban a dr. Antonín Vrba

1. kapitola

ČTYRSTĚN

I. Studium prostorových útvarů je podstatně složitější a těžší než studium rovinných útvarů. Je to způsobeno jednak tím, že si prostorové útvary obtížněji představujeme a znázorňujeme, i tím, že se tu předpokládá znalost planimetrie.

Nejjednodušším mnohoúhelníkem v rovině je trojúhelník. Říká se mu proto *simplex* v rovině. Nejjednodušším mnohostěnem v prostoru je čtyrstěn; je to simplex v prostoru. Jeho definice je tato:

Čtyrstěn $ABCD$, kde body A, B, C, D neleží v rovině, je průnik poloprostorů $ABCD$, $ACDB$, $ABDC$, $BCDA$.

Z definice plyne, že čtyrstěn je omezen čtyřmi trojúhelníkovými stěnami. Čtyrstěn má čtyři vrcholy a šest hran. Hrany jsou buď různoběžné, nebo mimoběžné. Zvláštní důležitost mají mimoběžné hrany (budeme jim též říkat protější nebo protilehlé) a proto si hned řekneme, které to jsou. Ve čtyrstěnu $ABCD$ to jsou tyto tři dvojice hran:

$$AB, CD; \quad AC, BD; \quad AD, BC.$$

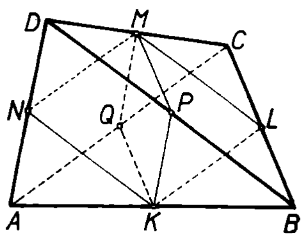
Roviny, které omezují čtyrstěn, dělí prostor na 15 částí. Jedna část je čtyrstěn sám. To je také jediná konečná část. Další části rozdělíme do tří skupin a z každé části popíšeme přesně vždy jednu.

V první skupině, která obsahuje čtyři části prostoru, je část, která je průnikem poloprostorů $ABDC$, $BCDA$, *CADB* a poloprostoru opačného k poloprostoru *ABCD*. Této části prostoru budeme stručně říkat „nad stěnou *ABC*“. Podobně dostaneme části prostoru nad stěnami *ABD*, *ACD*, *BCD*. — V další skupině je šest částí prostoru a popíšeme tu opět jednu. Je to průnik poloprostorů *BCDA*, *ACDB* a poloprostorů opačných k poloprostorům *ABCD*, *ABDC*. Tuto část prostoru budeme stručně nazývat „nad hranou *AB*“. Dalších pět částí je postupně nad hranami *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD*. V poslední skupině jsou čtyři části prostoru, z nichž jedna je průnikem poloprostorů opačných k poloprostorům *BCDA*, *ABDC*, *ABCD*. Je to trojhran s vrcholem *B*, neobsahující daný čtyřstěn. Další tři trojhrany dostaneme podobně; mají vrcholy *A*, *C*, *D*.

Než přistoupíme k řešení příkladů, které nás blíže seznámí s vlastnostmi čtyřstěnů, řekneme si, že v jednotlivých příkladech — pokud to nebude výslovně řečeno — nebudeme předpokládat kolmost dvou stěn čtyřstěnu, nebo že jde o pravidelný čtyřstěn.

Příklad 1. Dokažte, že úsečky spojující středy protějších hran čtyřstěnu, se vzájemně půlí.

Důkaz (obr. 1). Daný čtyřstěn je *ABCD*. Středy hran *AB*, *BC*, *AC*, *AD*, *BD*, *CD* označme po řadě *K*, *L*, *Q*,



Obr. 1

N, P, M. Všimněme si nejdříve čtyřúhelníku $KLMN$. Mluvíme hned o čtyřúhelníku, neboť body K, L, M, N neleží v přímce. Dokonce ani tři z těchto čtyř bodů neleží v přímce. Proto jsme oprávněni mluvit o čtyřúhelníku. Zatím ovšem nevíme, zda je rovinný; může být zborcený a o takovém se zmíníme později.

O stranách čtyřúhelníku $KLMN$ platí

$$KL \parallel AC, \qquad MN \parallel AC,$$

a také

$$KL = \frac{1}{2} AC, \qquad MN = \frac{1}{2} AC,$$

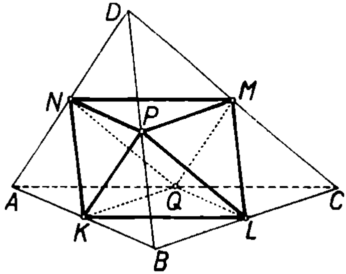
neboť to jsou střední příčky v trojúhelníku ABC resp. v trojúhelníku ADC. Čtyřúhelník $KLMN$ je tedy rovnoběžník a jeho úhlopříčky KM, LN — jež jsou vlastně spojnicemi středů dvou protějších hran čtyrstěnu — se vzájemně půlí.

Stejným způsobem se dá dokázat, že i čtyřúhelník $KPMQ$ je rovnoběžník a jeho úhlopříčky KM, PQ (jsou to opět spojnice středů dvou protějších hran čtyrstěnu) se vzájemně půlí. Avšak zmíněné dva rovnoběžníky mají úhlopříčku KM společnou a poněvadž každá úsečka má právě jeden střed, procházejí spojnice KM, LN, PQ jediným bodem, který je jejich středem, a právě to jsme měli dokázat.

Příklad 2. Body K, L, M, N, P, Q z předešlého příkladu jsou vrcholy osmistěnu, který má tyto dvě vlastnosti: a) ke každé jeho hraně existuje právě jedna hrana s ní rovnoběžná a s ní shodná, b) objem tohoto osmistěnu je roven polovině objemu daného čtyrstěnu.

Důkaz (obr. 2). a) V důkazu 1. příkladu jsme ukázali, že

$$KL \parallel MN \parallel AC \quad \text{a zároveň} \quad KL = MN.$$



Obr. 2

Žádná další hrana osmistěnu nemůže již být s hranou AC rovnoběžná, neboť všechny další hrany jsou buď s hranou AC různoběžné, nebo mimoběžné.

Dodejme k tomu, že zmíněné body jsou skutečně vrcholy osmistěnu, neboť žádné tři z nich neleží v přímce a žádných pět v rovině. Zbývá dokázat tu část věty, která mluví o objemu.

b) Objem čtyrstěnu $ABCD$ označme V a objem osmistěnu V_8. Všimněme si, že náš osmistěn odděluje od daného čtyrstěnu čtyrstěny $AKQN$, $BLKP$, $CQLM$, $MNPD$. Objem každého tohoto odděleného čtyrstěnu je roven $\frac{1}{8}V$, neboť např. ve čtyrstěnu $AKQN$ je podstava

$$AKQ = \frac{1}{4}ABC$$

a příslušná výška z vrcholu N je rovna polovině výšky čtyrstěnu $ABCD$ z vrcholu D. Z obdobného důvodu jsou objemy dalších tří čtyrstěnů též rovny $\frac{1}{8}V$ a proto

$$V_8 = V - 4 . \frac{1}{8} V = \frac{1}{2} V.$$

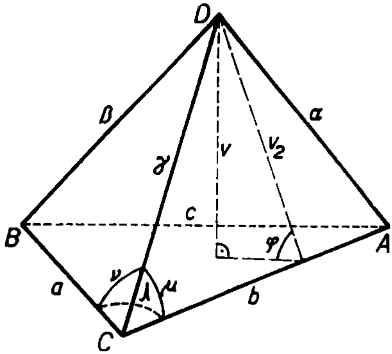
Příklad 3. Hrany daného čtyrstěnu $ABCD$ označme $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, a to tak, aby skupiny hran $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ byly protější. Potom objem V čtyrstěnu je dán vzorcem

(a α β γ a, b, c tvořily trojúhelník)

$$\begin{aligned} 144\, V^2 = {} & a^2\alpha^2(-a^2 + b^2 + c^2 - \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \\ & + b^2\beta^2(a^2 - b^2 + c^2 + \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2) + \\ & + c^2\gamma^2(a^2 + b^2 - c^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) + \\ & - [(a\, b\, c)^2 + (a\beta\gamma)^2 + (b\alpha\gamma)^2 + (c\alpha\beta)^2]. \end{aligned}$$

Dokažte.

Důkaz (obr. 3). Vyjdeme ze známého vzorce pro objem jehlanu



Obr. 3

$$V = \frac{1}{3} (ABC) v,$$

kde v je výška daného čtyrstěnu procházející vrcholem D a (ABC) je obsah $\triangle\, ABC$. Označme ještě v_2 výšku stěny

ACD jdoucí vrcholem D a φ úhel stěn ABC, ACD, $\sphericalangle ACB = \lambda$, $\sphericalangle ACD = \mu$, $\sphericalangle BCD = \nu$. Potom

$$v = v_2 . \sin \varphi = \gamma \sin \mu \sin \varphi .$$

Poněvadž

$$(ABC) = \frac{1}{2} ab \sin \lambda ,$$

nabude vzorec pro objem tvaru

$$V = \frac{1}{6} ab\, \gamma \sin \lambda \sin \mu \sin \varphi .$$

Ze sférické geometrie je známa kosinová věta (viz např. Jiří Kůst, *Sférická trigonometrie*, str. 20, věta 2,2)

$$\cos \nu = \cos \lambda \cos \mu + \sin \lambda \sin \mu \cos \varphi ,$$

z níž plyne

$$\cos \varphi = \frac{-\cos \lambda \cos \mu + \cos \nu}{\sin \lambda \sin \mu} .$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sin^2 \lambda \sin^2 \mu - (\cos \lambda \cos \mu - \cos \nu)^2}}{\sin \lambda \sin \mu} =$$

$$= \frac{\sqrt{(1 - \cos^2 \lambda)(1 - \cos^2 \mu) - (\cos \lambda \cos \mu - \cos \nu)^2}}{\sin \lambda \sin \mu} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \lambda - \cos^2 \mu - \cos^2 \nu + 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu}}{\sin \lambda \sin \mu} .$$

Potom

$$(6\, V)^2 = a^2 b^2 \gamma^2 (1 - \cos^2 \lambda - \cos^2 \mu - \cos^2 \nu +$$
$$+ 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu .$$

Z trojúhelníků ABC, ACD, BCD postupně dostaneme (podle kosinové věty pro rovinný trojúhelník)

$$\cos\lambda = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$\cos\mu = \frac{b^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2b\gamma},$$

$$\cos\nu = \frac{a^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2a\gamma}.$$

Tyto výrazy dosadíme do předcházející rovnice. Po menší úpravě a po umocnění dojdeme k rovnici

$$\begin{aligned}144\, V^2 = 4a^2b^2\gamma^2 - a^2(b^2 + \gamma^2 - \alpha^2)^2 - \\ - \gamma^2(a^2 + b^2 - c^2)^2 - b^2(a^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2 + \\ + (b^2 + \gamma^2 - \alpha^2)(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - \beta^2 + \gamma^2).\end{aligned}$$

To je již v podstatě náš vzorec. Jen je ještě potřeba provést naznačené početní výkony a vytknout.

Zvláštní případy. a) Jestliže $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma$, dostaneme pravidelný trojboký jehlan, jehož objem tedy je

$$V = \frac{1}{12}\, a^2 \sqrt{3\, a^2 - a^2}.$$

b) Jestliže $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$, dostáváme čtyrstěn, jehož mimoběžné hrany jsou vždy shodné. Tohoto čtyrstěnu si později všimneme podrobněji. Pro jeho objem platí

$$\begin{aligned}72\, V^2 = a^4(- a^2 + b^2 + c^2) - \\ - (b^2 - c^2)^2(- a^2 + b^2 + c^2) = \\ = (- a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2).\end{aligned}$$

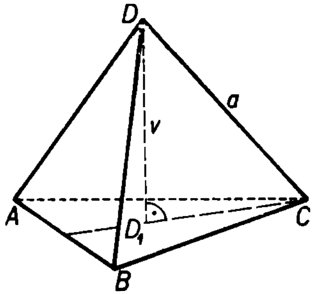
Příklad 4. Objem pravidelného čtyrstěnu vypočítejte nejdřív ze vzorce odvozeného na str. 8, v němž položíte $a = b = c = \alpha = \beta = \gamma$ a potom přímo.

Řešení. a) Hned dosazujeme

$$144\, V^2 = a^4(2a^2) + a^4(2a^2) + a^4(2a^2) - 4a^6 = 2a^6,$$

$$V = \frac{1}{12}\, a^3 \sqrt{2}\,.$$

b) V obr. 4 je znázorněn pravidelný čtyrstěn $ABCD$, jehož hrany mají délku a. Úsečka $DD_1 = v$ je jeho tělesová výška a úsečka CD_1 je rovna dvěma třetinám stěnové výšky, tedy



Obr. 4

$$CD_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{3} \sqrt{3}\,.$$

Na pravoúhlý trojúhelník CDD_1 použijeme Pythagorovy věty:

$$DD_1{}^2 = CD^2 - CD_1{}^2,$$

$$v^2 = a^2 - \left(\frac{a}{3} \cdot 3\right)^2,$$

$$v = a \sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

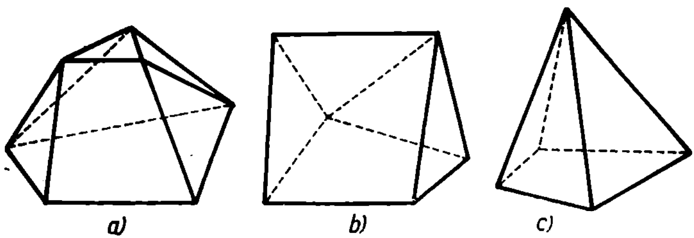
Objem pravidelného čtyrstěnu je tudíž

$$V = \frac{1}{3} \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \,.\, a \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2},$$

což souhlasí s dřívějším výsledkem.

Nechť jsou dány dva konvexní mnohoúhelníky, ležící v různých rovnoběžných rovinách. Průnik všech poloprostorů, určených stranou jednoho mnohoúhelníka a jedním vrcholem druhého mnohoúhelníka — přičemž tento poloprostor obsahuje všechny vrcholy obou mnohoúhelníků — je těleso zvané prismatoid či hranolec. K prismatoidům počítáme i tělesa, kdy místo jedné podstavy volíme úsečku rovnoběžnou s rovinou druhé podstavy (ale neležící v ní) nebo bod (neležící v rovině druhé podstavy).

V obr. 5 abc jsou tři příklady na prismatoidy.



Obr. 5

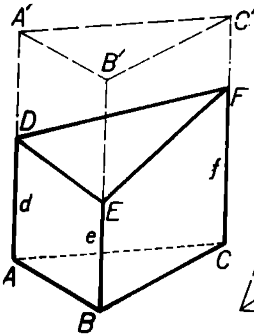
Pomocná věta 1. Jestliže podstavy prismatoidu mají obsahy P_1, P_2 a jestliže střední řez (je to řez rovinou rovnoběžnou s rovinami podstav a půlící vzdálenost v podstav) má obsah S, potom objem V prismatoidu je dán vzorcem

$$V = \frac{v}{6} (P_1 + P_2 + 4S).$$

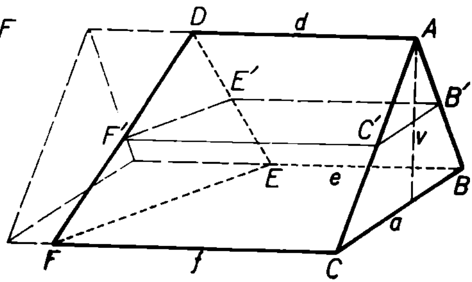
Větu nebudeme dokazovat, i když důkaz je elementární. Dodejme však, že věta platí i pro případy typu 5b), 5c), neboť stačí položit $P_2 = 0$.

Pomocná věta 2. Budiž dán přímý hranol trojboký, který je seříznut rovinou σ, neprocházející žádným vnitřním bodem ani jedné z podstav. Objem V seříznutého tělesa je pak roven jedné třetině součinu velikosti podstavy a součtu pobočných hran.

Vysvětlení. Na obr. 6 je znázorněn přímý trojboký



Obr. 6



Obr. 7

hranol $ABCA'B'C'$ a ten je seříznut rovinou σ tak, že vzniklo těleso $ABCDEF$. Označíme-li P velikost podstavy ABC a položíme-li $AD = d$, $BE = e$, $CF = f$, platí podle vyslovené věty

$$V = \frac{1}{3} P(d + e + f).$$

Důkaz pomocné věty 2 (obr. 7). Objem našeho tělesa budeme počítat jako objem prismatoidu, který je určen podstavou $BCFE$ (to je buď pravoúhlý lichoběžník, nebo obdélník) a úsečkou AD místo druhé podstavy. Výška v prismatoidu je rovna výšce stěny ABC, sestrojené z vrcholu A. Obsah středního řezu $B'C'F'E'$ označíme S. Pak platí

$$V = \frac{v}{6}(BCFE + 0 + 4S).$$

Ale

$$BCFE = \frac{1}{2}a(e+f),$$

$$S = \frac{1}{2}(C'F' + B'E')\frac{a}{2} = \frac{1}{2}(f+d+e+d)a,$$

$$V = \frac{1}{6}av \,.\, \frac{1}{2}(e+f+f+d+e+d) =$$

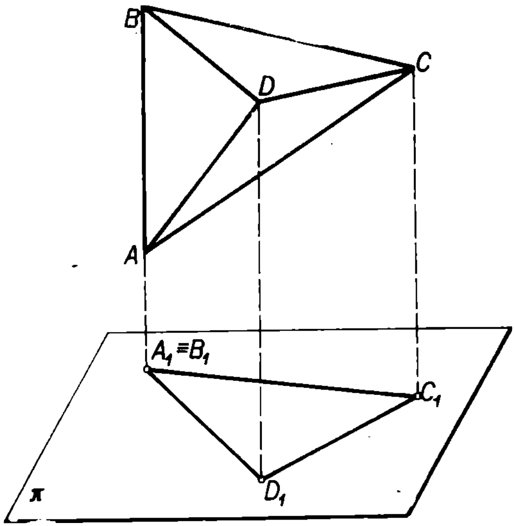
$$= \frac{1}{6}av(d+e+f) = \frac{1}{3}P(d+e+f),$$

jak jsme měli dokázat.

Poznámka. Výraz $\frac{1}{3}(d+e+f)$ je – jak se dá dokázat – vzdálenost těžiště T stěny DEF od stěny ABC (od podstavy ABC). Vyslovená věta se potom dá formulovat jinak. Pokuste se o to.

Příklad 5. Je dán čtyrstěn $ABCD$ a rovina π kolmá k hraně AB. Pravoúhlým průmětem čtyrstěnu do roviny π je trojúhelník $A_1C_1D_1$, jehož obsah označíme R. Dokažte, že objem V čtyrstěnu $ABCD$ je

$$V = \frac{1}{3}R \,.\, AB.$$



Obr. 8

Důkaz (obr. 8). Trojúhelník $A_1C_1D_1$ je řídicím trojúhelníkem hranolové plochy, jejíž směr je dán promítacími přímkami $AA_1 \equiv BB_1$, CC_1, DD_1. Objem V čtyrstěnu $ABCD$ je roven rozdílu objemů těles $A_1C_1D_1BCD$, $A_1C_1D_1ACD$, které dovedeme vypočítat podle pomocné věty 2. Platí tedy

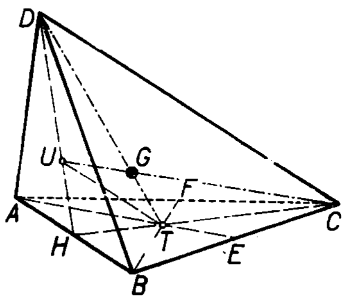
$$V = \frac{1}{3} R(BB_1 + CC_1 + DD_1) - \frac{1}{3} R(AA_1 + CC_1 + DD_1) = \frac{1}{3} R(BB_1 - AA_1) = \frac{1}{3} R.AB,$$

a tím je tvrzení dokázáno.

V geometrii trojúhelníka jste se seznámili s těžnicemi. I ve čtyrstěnu jsou přímky zvané těžnice; jsou to přímky, spojující vrchol čtyrstěnu s těžištěm protější stěny. Podle toho každý čtyrstěn má čtyři těžnice. Říkáme jim někdy tělesové těžnice na rozdíl od stěnových těžnic. Těžnicí rozumíme také někdy úsečku, omezenou vrcholem a těžištěm protější stěny. K omylu nemůže dojít, neboť z kontextu je vždy patrno, co je míněno slovem těžnice.

Příklad 6. Dokažte, že všechny těžnice čtyrstěnu procházejí jediným bodem (těžištěm čtyrstěnu), který každou těžnici dělí v poměru 3 : 1, přičemž větší díl je při vrcholu.

D ů k a z (obr. 9). V daném čtyrstěnu $ABCD$ označme



Obr. 9

T, U těžiště stěn ABC, ABD. Těžnice CT stěny ABC a těžnice DU stěny ABD se protínají ve středu H hrany AB. Proto těžnice CU, DT čtyrstěnu leží v téže rovině. Jsou různoběžné; jejich společný bod označíme G. (Těžnice CU, DT nemohou být rovnoběžné. V trojúhelníku CDH je totiž bod U resp. bod T vnitřním bodem strany DH resp. strany CH. Proto úsečky CU, DT mají společný bod, který je vnitřním bodem trojúhelníka CDH.) Všimněme si přitom, že

$$\triangle HUT \sim \triangle HDC$$

a také

$$\triangle GUT \sim \triangle GCD,$$

neboť $UT \parallel DC$. Z první podobnosti dostaneme

$$HU : HD = UT : DC$$

a tedy

$$UT : DC = 1 : 3.$$

Z podobnosti druhých dvou trojúhelníků plyne

$$GT : GD = UT : DC.$$

Tudíž platí

$$GT : GD = 1 : 3.$$

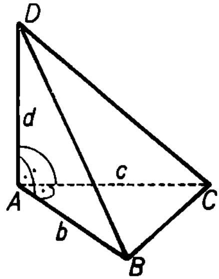
Dokázali jsme tak, že těžnice CU, DT jsou různoběžné a že jejich průsečík G dělí každou tuto těžnici v poměru $1 : 3$. Avšak stejně se dá dokázat, že se těžnice CU protíná s těžnicí jdoucí vrcholem A nebo vrcholem B. Průsečík však dělí každou těžnici v poměru $1 : 3$; musí to být tedy bod G, čímž je důkaz proveden.

Poznámka. Bod G je těžištěm čtyrstěnu i ve fyzikálním smyslu.

Příklad 7. Je dán čtyrstěn $ABCD$, o jehož hranách platí: $AD \perp AB$, $AD \perp AC$, $AB \perp AC$. Dokažte, že druhá mocnina obsahu stěny BCD je rovna součtu druhých mocnin obsahů zbývajících tří stěn.

Řešení (obr. 10). Označme

$$AB = b, \quad AC = c, \quad AD = d.$$



Obr. 10

Potom

$$BC = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad CD = \sqrt{c^2 + d^2}, \quad BD = \sqrt{b^2 + d^2}.$$

Obsahy jednotlivých stěn jsou

$$ABC = \frac{1}{2}\,bc, \quad ABD = \frac{1}{2}\,bd, \quad ACD = \frac{1}{2}\,cd$$

a odtud

$$ABC^2 + ABD^2 + ACD^2 = \frac{1}{4}\,(b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2). \qquad \text{(a)}$$

Zbývá vypočítat obsah stěny BCD. Označíme-li $\sphericalangle\, BDC = \delta$,

můžeme psát

$$BCD = \frac{1}{2}\,BD\,.\,CD\,.\sin\delta =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 + d^2)\,(c^2 + d^2)}\,.\sin\delta\ .$$

Z kosinové věty, použité na trojúhelník BCD, plyne

$$BC^2 = CD^2 + BD^2 - 2.CD.BD.\cos\delta.$$

Dosadíme a upravíme

$$b^2 + c^2 = c^2 + d^2 + b^2 + d^2 - 2.CD.BD.\cos\delta$$

$$\cos\delta = \frac{d^2}{\sqrt{(c^2 + d^2)(b^2 + d^2)}}.$$

Nyní již můžeme počítat $\sin\delta$:

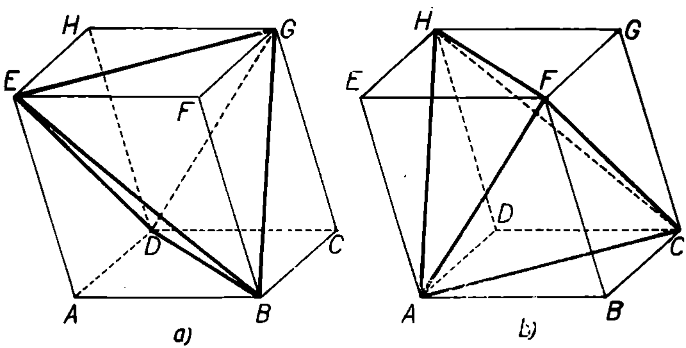
$$\sin^2\delta = 1 - \cos^2\delta = \frac{b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2}{(c^2 + d^2)(b^2 + d^2)}.$$

Dosadíme-li do vzorce pro obsah trojúhelníka BCD, obdržíme

$$BCD^2 = \frac{1}{4}(b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2),$$

a to je výraz z rovnice (a).

V obr. 11a, b je znázorněn rovnoběžnostěn a do něho



Obr. 11

je dvěma různými způsoby vepsán čtyrstěn. Pro přehlednost je obrázek narýsován dvakrát. (Danému rovnoběžnostěnu vepsat čtyrstěn znamená sestrojit čtyrstěn tak, aby v každé stěně rovnoběžnostěnu ležela právě jedna hrana čtyrstěnu, a to tak, že každá hrana čtyrstěnu je stěnovou úhlopříčkou rovnoběžnostěnu.) Poněvadž oba čtyrstěny, které lze danému rovnoběžnostěnu vepsat, jsou shodné, můžeme se zabývat vždy pouze jedním z nich.

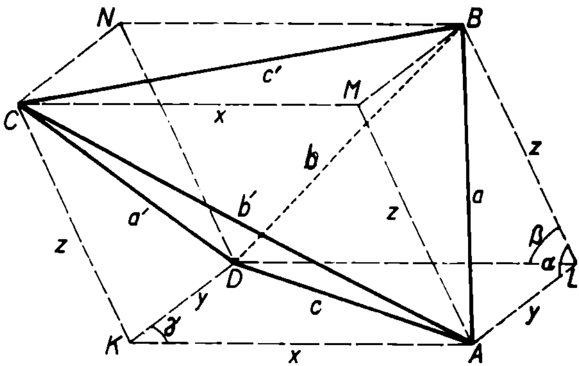
My však budeme používat obrácené cesty, tj. danému čtyrstěnu opíšeme rovnoběžnostěn a pomocí něho budeme studovat vlastnosti čtyrstěnu. To si také hned ukážeme na dvou příkladech, ale před tím uvedeme návod, jak lze danému čtyrstěnu opsat rovnoběžnostěn. Jsou tu dva způsoby.

První způsob spočívá v tom, že hranou AB daného čtyrstěnu $ABCD$ vedeme rovinu rovnoběžnou s protilehlou hranou CD a hranou CD vedeme rovinu rovnoběžnou s hranou AB. Podobně hranou AC (AD) vedeme rovinu rovnoběžnou s hranou BD (BC) a hranou BD (BC) vedeme rovinu rovnoběžnou s AC (AD). Tím dostaneme šest rovin, které omezují rovnoběžnostěn opsaný danému čtyrstěnu. Přitom hrany čtyrstěnu jsou stěnovými úhlopříčkami rovnoběžnostěnu.

Jiný způsob je tento: Středem H hrany AB vedeme rovnoběžku s hranou CD a na ni od bodu H naneseme v obou smyslech úsečku délky $\frac{1}{2} CD$. Dostaneme tak body H_1, H_2. Potom středem K hrany CD vedeme rovnoběžku s hranou AB a na ni od bodu K naneseme v obou smyslech úsečku délky $\frac{1}{2} AB$. Získané body označíme K_1, K_2. Rovnoběžníky AH_1BH_2, DK_1CK_2 jsou shodné, leží v rovinách navzájem rovnoběžných (a různých) a ke každé straně jednoho existují s ní rovnoběžné strany druhého. Oba rovnoběžníky jsou protější stěny hledaného rovnoběžnostěnu $AH_1BH_2K_1CK_2D$.

Příklad 8. Je dán čtyrstěn $ABCD$. Vypočtěte vzdálenost středů protějších hran AB, CD.

Řešení (obr. 12). Danému čtyrstěnu opišme rovnoběžnostěn; označíme jej $ALDKMBNC$. Pro stručnost zavedeme toto označení:



Obr. 12

$$AB = a, \quad BD = b, \quad AD = c,$$
$$CD = a', \quad AC = b', \quad BC = c',$$
$$AK = LD = BN = MC = x,$$
$$AL = MB = CN = KD = y,$$
$$AM = LB = DN = KC = z,$$
$$\sphericalangle\, ALB = \alpha, \quad \sphericalangle\, BLD = \beta, \quad \sphericalangle\, AKD = \gamma.$$

Je vidět, že vzdálenost středů hran AB, CD je rovna x. Z trojúhelníků ALB, KDC postupně plyne

$$a^2 = y^2 + z^2 - 2yz.\cos\alpha,$$
$$a'^2 = y^2 + z^2 + 2yz.\cos\alpha.$$

Odtud

$$y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(a^2 + a'^2). \tag{1}$$

Podobně dospějeme k dalším dvěma rovnicím

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{1}{2}(c^2 + c'^2), \\ x^2 + z^2 &= \frac{1}{2}(b^2 + b'^2). \end{aligned} \tag{2}$$

Tím jsme dospěli k soustavě tří rovnic o třech neznámých. Jejich řešením dostaneme

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + b'^2 + c'^2 - a^2 - a'^2}\,.$$

Běží tu o vzdálenost a proto při odmocnině bereme znaménko $+$. Kromě toho musí platit

$$b^2 + c^2 + b'^2 + c'^2 - a^2 - a'^2 > 0.$$

Tato nerovnost je skutečně splněna, jak se přesvědčíme, dosadíme-li do rovnic (1), (2).

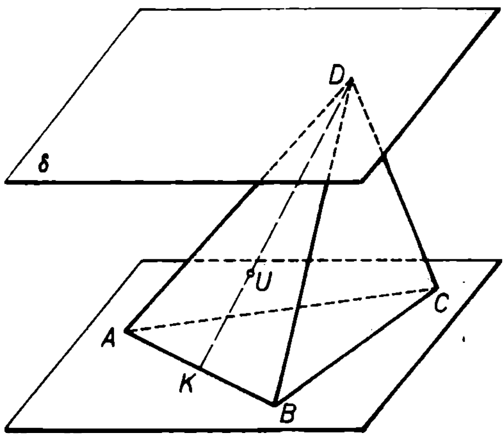
Příklad 9. Dokažte, že oba čtyrstěny, které jsou vepsány témuž rovnoběžnostěnu různými způsoby, jsou shodné.

Důkaz (obr. 11a, b). Všimněme si nejprve toho, že oba čtyrstěny nemají společný žádný vrchol. Osm vrcholů daného rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$ je tedy rozděleno do dvou skupin: B, D, E, G a H, F, C, A. Body první skupiny jsou vrcholy jednoho čtyrstěnu, body druhé skupiny jsou vrcholy druhého čtyrstěnu. Zároveň vidíme, že vrcholy jednoho čtyrstěnu jsou souměrně sdružené s vrcholy druhého čtyrstěnu podle středu rovnoběžnostěnu. Oba čtyrstěny jsou podle toho přímo shodné. To znamená, že jeden z nich lze přemístit tak, aby splynul s druhým. Tím je důkaz proveden.

Příklad 10. Je dána množina všech čtyrstěnů, které mají společnou stěnu ABC a vrchol D v rovině δ rovnoběžné s rovinou ABC. Jaká je množina všech těžišť pobočné stěny ABD?

Řešení (obr. 13). Střed hrany AB označme K a těžiště stěny ABD označme U. Víme, že platí

$$KU = \frac{1}{3} KD.$$



Obr. 13

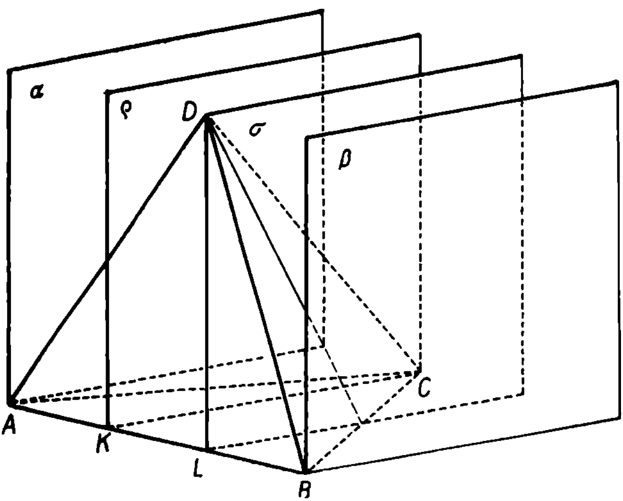
Poněvadž vrchol D se pohybuje v rovině δ, pohybuje se U v rovině μ, která je s rovinou ABC rovnoběžná a je od ní vzdálena třetinu vzdálenosti roviny δ od roviny ABC a leží mezi rovinami ABC, δ.

Mějme obráceně v rovině μ bod U'. Přímka KU' protne rovinu δ v bodě D', o němž platí

$$KD' = 3 . KU'.$$

Bod U' je proto těžištěm trojúhelníka ABD', tj. je těžištěm pobočné stěny ABD' čtyrstěnu $ABCD'$. Dokázali jsme tak, že množina všech těžišť U je rovina μ.

Příklad 11. Je dán čtyrstěn $ABCD$. Body A, B, C, D proložte čtyři roviny navzájem rovnoběžné tak, aby vzdálenosti každých dvou sousedních rovnoběžných rovin si byly rovny.



Obr. 14

Řešení (obr. 14). Hranu AB daného čtyrstěnu rozdělme na tři shodné části AK, KL, LB. Rovina ϱ proložená přímkou CK rovnoběžně s přímkou DL a rovina σ proložená přímkou DL rovnoběžně s přímkou CK jsou již dvě žádané roviny, procházející vrcholy C a D. Zbývající dvě roviny jsou s nimi rovnoběžné a procházejí vrcholy A, B. Tyto roviny označíme α, β.

Nalezené roviny ϱ, σ, α, β vyhovují požadavkům úlohy, neboť a) jsou navzájem rovnoběžné, b) na přímce AB, která je protíná po řadě v bodech A, K, L, B, vytínají úseky AK, KL, LB, pro něž platí

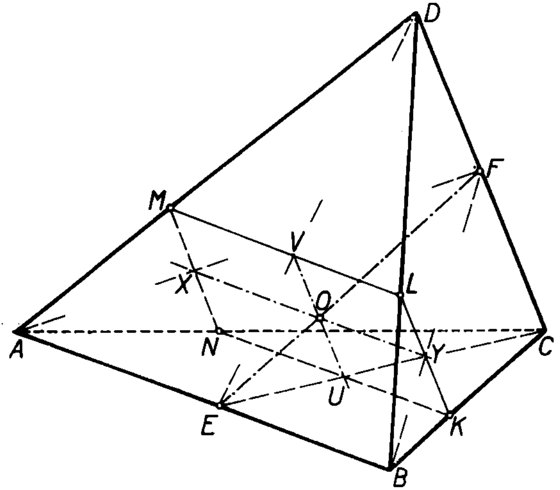
$$AK = KL = LB.$$

Tím máme zaručeno, že vzdálenosti každých dvou sousedních rovin si jsou rovny.

Mohli jsme však spojit též body C, L a D, K a pak přímkou CL vést rovinu rovnoběžnou s přímkou DK a přímkou DK vést rovinu rovnoběžnou s CL. Takovýmto způsobem bychom došli k nové čtveřici rovin, vyhovujících podmínkám úlohy. Snadno usoudíme, že úloha má dvanáct různých řešení.

Příklad 12. Je dán čtyrstěn $ABCD$. Dokažte, že množina středů všech rovnoběžníků, v nichž je daný čtyrstěn proťat rovinami rovnoběžnými s hranami AB, CD, je úsečka s výjimkou jejích krajních bodů, která spojuje středy těchto dvou hran.

Důkaz (obr. 15). Střed hrany AB (CD) označme E (F). Z množiny zmíněných řezů zvolme rovnoběžník $KLMN$, kde K, L, M, N jsou po řadě vnitřní body hran BC, BD, AD, AC. Středy hran AB (CD) jsou E (F). Přímka AF protíná úsečku MN v jejím středu X, přímka BF protíná úsečku KL v jejím středu Y. Úsečka XY je střední příčka v rovnoběžníku $KLMN$. Podobně přímka CE (DE)

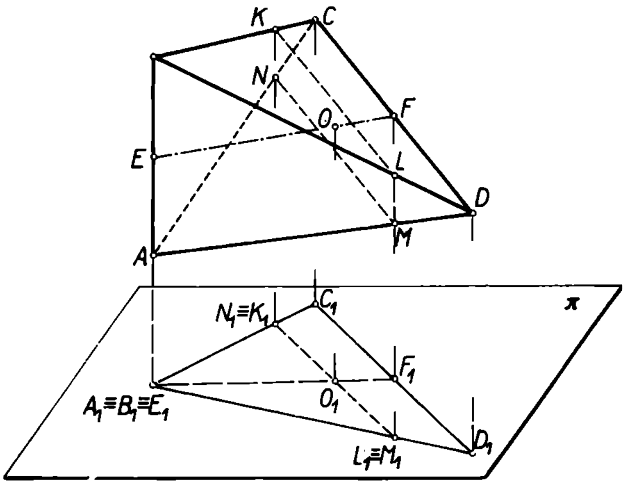


Obr. 15

půlí úsečku KN (LM) v bodě U (V). Úsečka UV je střední příčka v rovnoběžníku $KLMN$. Body A, X, F, Y, B, E leží v rovině ϱ a body C, U, E, V, D, F leží v rovině $\sigma \neq \varrho$. Průsečnicí obou těchto rovin je přímka EF. Střední příčky XY, UV se protínají nutně na přímce EF v bodě O.

Obráceně. Zvolme vnitřní bod O' úsečky EF a veďme jím rovinu rovnoběžnou s hranami AB, CD. Ta protne hrany BC, BD, AD, AC postupně v bodech K', L', M', N', jež jsou vnitřními body uvedených hran a proto $K'L'M'N'$ je rovnoběžník. Podle předešlého má tento rovnoběžník svůj střed na přímce EF, ale tato přímka má s rovinou $K'L'M'N'$ pouze jeden společný bod, a to je O'. Tím je důkaz proveden.

Jiný důkaz. Právě uvedenou větu lze dokázat jednodušeji na základě vhodně zvolených průmětů. Sestrojme nejprve průmět daného čtyrstěnu tak, aby hrana AB, na níž leží bod E, se promítla do bodu $A_1 \equiv B_1 \equiv E_1$ (obr. 16a). Pak průmětem rovnoběžníka $KLMN$ je úsečka K_1L_1, kde $K_1 \equiv N_1$, $L_1 \equiv M_1$, rovnoběžná s úsečkou C_1D_1.



Obr. 16

Přitom body K_1, L_1 jsou vnitřní body úseček A_1C_1, A_1D_1. Střed O řezu se promítá do středu úsečky K_1L_1 a leží proto na té střední příčce řezu $KLMN$, v níž rovina ABF protne rovinu $KLMN$. — Promítněme po druhé daný čtyrstěn tak, aby se hrana CD promítla do bodu $C_2 \equiv D_2$. Úvahou shodnou s předešlou zjistíme, že bod O leží na té střední příčce řezu $KLMN$, v níž rovina CDE protne rovinu $KLMN$. Bod O je tedy průsečík obou středních příček, čili leží uvnitř úsečky EF.

Druhou část důkazu přenechávám čtenářům.

Příklad 13. Dokažte větu: Jestliže pata výšky, spuštěné z vrcholu D čtyrstěnu $ABCD$ na stěnu ABC, splývá se středem kružnice opsané této stěně, pak platí $AD = BD = CD$. — Dokažte, že platí i věta obrácená.

Důkaz. Patu tělesové výšky z vrcholu D označme D_1. Podle předpokladů naší úlohy platí

$$AO = BO = CO$$

a důsledek toho je, že

$$\triangle ADO \cong \triangle BDO \cong \triangle CDO,$$

neboť to jsou pravoúhlé trojúhelníky, které se shodují v odvěsnách. Ale potom se sobě rovnají i přepony:

$$AD = BD = CD$$

a důkaz je proveden.

Obráceně. Nechť platí

$$AD = BD = CD.$$

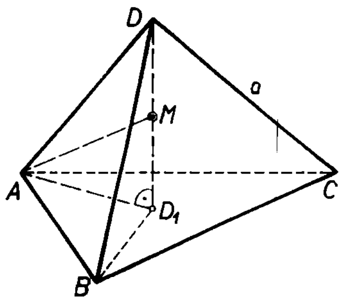
Pak trojúhelníky ADO, BDO, CDO jsou shodné, neboť jsou pravoúhlé, mají společnou odvěsnu DO a shodují se v přeponě. Podle věty *Ssu* jsou shodné a důsledek toho je, že

$$AO = BO = CO,$$

z čehož plyne, že bod O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC.

Příklad 14. Dokažte větu: Přímky, které spojují střed tělesové výšky pravidelného čtyrstěnu s vrcholy, jimiž tato výška neprochází, jsou k sobě kolmé.

Důkaz (obr. 17). V daném pravidelném čtyrstěnu $ABCD$ proložíme výšku vrcholem D; její patu označme D_1 a střed výšky označme M. Délka hrany daného čtyr-



Obr. 17

stěnu je a. Délku tělesové výšky $DD_1 = v$ jsme vypočítali v příkl. 4:

$$DD_1 = v = a\sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

Tudíž

$$MD_1 = \frac{1}{2}\,v = a\sqrt{\frac{1}{6}}\,.$$

Délka úsečky AD_1 je rovna $\frac{2}{3}$ výšky rovnostranného trojúhelníka ABC, tj.

$$AD_1 = BD_1 = CD_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}\,.$$

Délku úsečky AM vypočteme z pravoúhlého trojúhelníka AMD_1 užitím Pythagorovy věty:

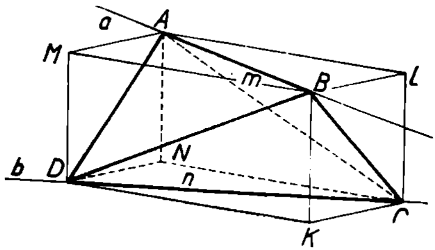
$$AM^2 = AD_1^2 + MD_1^2 = \frac{a^2}{2}\,.$$

Poněvadž $AM^2 + BM^2 = AB^2$, je trojúhelník ABM pravoúhlý. Podobně zjistíme, že i trojúhelníky BCM a ACM

jsou pravoúhlé a z toho plyne, že každá z přímek AM, BM, CM je kolmá k druhým dvěma, jak jsme měli dokázat.

Příklad 15. Jsou dány dvě mimoběžné přímky a, b a na nich jsou dány po řadě úsečky $AB = m$, $CD = n$ konstantních délek. Ukažte, že čtyrstěn $ABCD$ má stálý objem, nezávislý na poloze úseček AB, CD.

Řešení (obr. 18). Čtyrstěnu $ABCD$ opište známým způsobem (viz př. 8) rovnoběžnostěn. Jeho objem je



Obr. 18

$$V = \frac{1}{2}\, mn \,.\, \sin \omega \,.\, d,$$

kde d je výška rovnoběžnostěnu, příslušná těm stěnám, které obsahují mimoběžky a, b a ω je úhel mimoběžek a, b. Uvědomme si, že d je také vzdálenost daných dvou mimoběžek.

Opsaný rovnoběžnostěn označme $CKDNLBMA$. Odečteme-li od jeho objemu objemy čtyrstěnů $CKDB$, $ABMD$, $ABCL$, $CDNA$, dostaneme objem čtyrstěnu $ABCD$. Avšak čtyrstěny, jejichž objemy máme odečíst, mají stejné objemy, neboť mají shodné podstavy a tutéž výšku d. Objem jednoho z nich je

$$\frac{1}{2} mn . \sin \omega . \frac{d}{3} = \frac{1}{6} mnd . \sin \omega .$$

Tedy objem čtyrstěnu $ABCD$ je

$$V = mnd . \sin \omega - \frac{4}{6} mnd . \sin \omega = \frac{1}{3} mnd . \sin \omega .$$

Odtud je již patrno, že vyslovená věta je správná.

Poznámka. Při důkazu jsme použili vzorce pro obsah obecného čtyřúhelníka, který platí tím spíš pro obsah rovnoběžníka,

$$P_4 = \frac{1}{2} mn . \sin \omega ,$$

kde m, n jsou délky úhlopříček a ω je úhel jimi sevřený.

Příklad 16. Je dán čtyrstěn $ABCD$. Nechť T je libovolný jeho vnitřní bod. Přímky AT, BT, CT, DT protínají protější stěny postupně v bodech A', B', C', D'. Dokažte, že platí

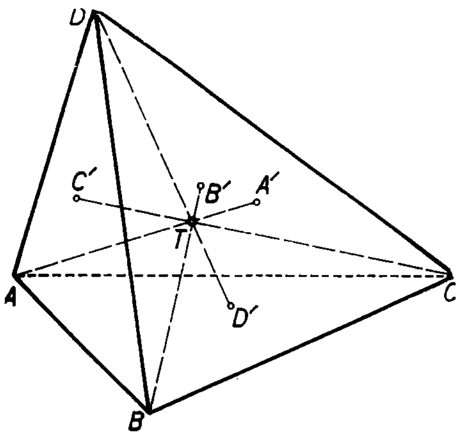
$$\frac{TA'}{AA'} + \frac{TB'}{BB'} + \frac{TC'}{CC'} + \frac{TD'}{DD'} = 1 .$$

Důkaz (obr. 19). Bod T je vrcholem čtyř čtyrstěnů: $TABC$, $TABD$, $TACD$, $TBCD$. Objemy těchto čtyrstěnů po řadě označíme V_4, V_3, V_2, V_1 a jejich výšky h_4, h_3, h_2, h_1. O objemech platí

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V , \qquad (1)$$

kde V je objem daného čtyrstěnu. Označíme-li ještě v_1, v_2, v_3, v_4 výšky daného čtyrstěnu, příslušné po řadě stěnám BCD, ACD, ABD, ABC, můžeme psát

$$\frac{V_1}{V} = \frac{BCD . h_1}{BCD . v_1} = \frac{h_1}{v_1} = \frac{TA'}{AA'} .$$



Obr. 19

Podobně získáme rovnice

$$\frac{V_2}{V} = \frac{TB'}{BB'}, \frac{V_3}{V} = \frac{TC'}{CC'}, \frac{V_4}{V} = \frac{TD'}{DD'}.$$

Sečtením všech čtyř vztahů a s použitím rovnice (1), obdržíme žádaný vztah.

V dalších řádcích si všimneme kulové plochy opsané danému čtyrstěnu a kulových ploch vepsaných danému čtyrstěnu.

Příklad 17. Dokažte: Existuje právě jedna kulová plocha, která prochází všemi vrcholy daného čtyrstěnu $ABCD$.

Důkaz. Existuje-li kulová plocha, která prochází všemi vrcholy daného čtyrstěnu, pak její střed leží současně v těchto rovinách: a) v rovině souměrnosti úsečky AB, b) v rovině souměrnosti úsečky BC, c) v rovině souměrnosti úsečky CD. Žádné dvě z těchto rovin nejsou rovnoběžné, neboť žádné dvě ze zmíněných hran nejsou rovnoběžné. Také uvedené tři roviny nejsou rovnoběžné s toutéž přímkou, neboť hrany AB, BC, CD neleží v téže rovině ani nejsou rovnoběžné s toutéž rovinou. Naše roviny souměrnosti mají tedy společný právě jeden bod, bod S, a to je střed hledané kulové plochy.

Skutečně, bod S leží v rovině souměrnosti úsečky AB a proto

$$SA = SB.$$

Leží také v rovině souměrnosti úsečky BC, tudíž

$$SB = SC.$$

Poněvadž leží ještě v rovině souměrnosti úsečky CD, je

$$SC = SD.$$

Je tedy

$$SA = SB = SC = SD$$

a bod S je od všech vrcholů čtyrstěnu stejně vzdálen a je proto středem kulové plochy, procházející všemi vrcholy čtyrstěnu $ABCD$. Je to kulová plocha opsaná danému čtyrstěnu.

Nyní si povíme o existenci vepsaných kulových ploch. Vzpomeňte si na kružnice vepsané trojúhelníku. Víte, že existují čtyři kružnice vepsané danému trojúhelníku, z nichž jedna je vepsána uvnitř a zbývající tři jsou vepsány vně. Každá z vně vepsaných kružnic se dotýká jedné strany ve vnitřním bodě a druhých dvou stran na prodloužení. U čtyřstěnu je situace obdobná i když složitější.

Příklad 18. Existuje osm kulových ploch, které jsou vepsány danému čtyrstěnu. Jedna z nich je vepsána uvnitř (dotýká se všech stěn v jejich vnitřních bodech) a ostatních sedm je vně vepsaných. Z nich zase čtyři se dotýkají vždy jedné stěny ve vnitřním bodě a zbývajících tří stěn na prodloužení. Zbývající tři kulové plochy se dotýkají všech stěn na prodloužení. Dokažte.

Poznámka. Ukazuje se, že každá kulová plocha ze zmíněné skupiny čtyř kulových ploch je vždy v té části prostoru, které jsme říkali nad stěnou. Každá kulová plocha z druhé skupiny je v části prostoru nad hranou.

Důkaz. a) Daný čtyrstěn budiž $ABCD$. Sestrojme tu rovinu souměrnosti rovin ABC, BCD, která protíná hranu AD. Sestrojme dále tu rovinu souměrnosti rovin BCD, ACD (ABD, ACD), která protíná hranu AB (BC). Žádné dvě z uvedených tří rovin souměrnosti nejsou navzájem rovnoběžné, neboť žádné dvě z hran BC, CD, AD nejsou rovnoběžné. Sestrojené tři roviny nejsou ani rovnoběžné s toutéž přímkou, neboť hrany BC, CD, AD neleží v téže rovině, ani nejsou rovnoběžné s toutéž rovinou. Uvažované tři roviny souměrnosti mají tedy společný právě jeden bod, bod O, a to je střed kulové plochy vepsané danému čtyrstěnu.

Skutečně, bod O je především vnitřní bod čtyrstěnu $ABCD$ a poněvadž leží v sestrojených rovinách souměrnosti, platí o něm*)

$$O \dashv ABC = O \dashv BCD,$$

$$O \dashv BCD = O \dashv ACD,$$

$$O \dashv ACD = O \dashv ABD.$$

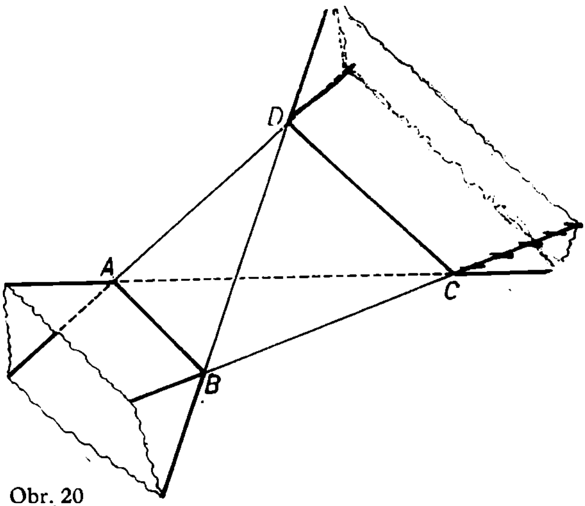
---

*) Symbol $O \dashv ABC$ nebo $O \dashv \varrho$ znamená vzdálenost bodu O od roviny ABC nebo od roviny ϱ. Podobně vzdálenost bodu O od přímky p označujeme $O \dashv p$.

Bod O má tedy od všech stěn čtyrstěnu tutéž vzdálenost a je to tedy střed vepsané kulové plochy.

b) Rovinu souměrnosti rovin ABC, BCD a rovin BCD, ACD ponechme jako v případě a), ale z rovin souměrnosti stěn ACD, ABD vezměme tu, která je pro čtyrstěn $ABCD$ styčnou rovinou, tj. tu, která má s naším čtyrstěnem společnou právě hranu AD. I tyto tři roviny mají společný jediný bod O_3, neboť jako v případě a) žádné tři roviny souměrnosti nejsou vzájemně rovnoběžné ani nejsou rovnoběžné s toutéž přímkou. Bod O_3 je tedy střed kulové plochy vně vepsané danému čtyrstěnu. Ze sestrojení plyne, že tato kulová plocha je umístěna v prostoru nad stěnou ABD.

Stejným způsobem můžeme dospět ke středům O_1, O_2, O_4 dalších tří kulových ploch.



Obr. 20

c) V obr. 20 je znázorněn čtyrstěn $ABCD$ a v něm jsou výrazněji vyznačeny části prostoru nad hranami AB, CD. Abychom sestrojili kulovou plochu vepsanou danému čtyrstěnu a současně ležící v jedné nebo ve druhé zmíněné části prostoru, sestrojíme tu rovinu souměrnosti rovin ABC, ABD, která protíná hranu CD. Pak sestrojíme tu rovinu souměrnosti rovin BCA, BCD (ADB, ADC), která je pro tento čtyrstěn rovinou styčnou. Sestrojené tři roviny souměrnosti nejsou ani spolu rovnoběžné, ani nejsou rovnoběžné s toutéž přímkou. Mají tedy společný právě jeden bod O_5. Ten leží buď v té části prostoru, která je nad hranou AB, nebo v části prostoru nad hranou CD. Dá se opět ukázat, že O_5 je střed kulové plochy vně vepsané danému čtyrstěnu.

Obdobně bychom sestrojili ještě další dva středy O_6, O_7 kulových ploch vně vepsaných danému čtyrstěnu.

Příklad 19. Vypočtěte délku poloměru kulové plochy, která je uvnitř vepsána danému čtyrstěnu $ABCD$, jako funkci délek jeho hran.

Řešení. Střed O uvnitř vepsané kulové plochy spojme s vrcholy A, B, C, D daného čtyrstěnu. Tak je čtyrstěn $ABCD$ rozdělen na čtyři čtyrstěny, jejichž podstavy jsou ABC, ABD, ACD, BCD a k nim příslušné výšky jsou shodné a rovné poloměru ϱ uvažované kulové plochy. Platí

$(ABC).\varrho + (ABD).\varrho + (ACD).\varrho + (BCD).\varrho = 3V$,
kde V je objem daného čtyrstěnu. Poněvadž objem V i obsahy jednotlivých stěn dovedeme vyjádřit jako funkce délek hran, lze vypočítat ϱ jako funkci délek hran.

Cvičení

1. Je dán rovinný čtyrúhelník $ABCD$. Úsečky, spojující středy protějších stran, se vzájemně půlí. Dokažte.

2. Čtyrstěn, jehož vrcholy jsou těžiště stěn daného čtyrstěnu $ABCD$, je s daným stejnolehlý. Co je střed stejnolehlosti a jaký je koeficient stejnolehlosti?

3. Pravidelný hranol čtyrboký $ABCDEFGH$ je rovinou σ — která není s pobočnými hranami rovnoběžná, ale protíná je ve vnitřních bodech — proťat v rovnoběžníku $A'B'C'D'$. Označíme-li $a = AA'$, $b = BB'$, $c = CC'$, $d = DD'$, dá se délka d úsečky DD' vyjádřit jako funkce délek a, b, c. Proveďte.

4. Vypočtěte objem tělesa $ABCDA'B'C'D'$ z předešlého cvičení.

5. Daný čtyrstěn $ABCD$ je rovinou σ proťat v trojúhelníku $A'B'C'$ tak, že body A', B', C' jsou vnitřními body po řadě hran AD, BD, CD. Součet těch vnitřních úhlů, které ve čtyřúhelnících $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CAA'C'$ leží při vrcholech A', B', C' je konstantní, nezávislý na poloze roviny σ. Dokažte.

6. V daném čtyrstěnu $ABCD$ platí $a = b = \alpha = \beta = 1$. (Viz příklad 3.) Dokažte, že potom součet čtverců délek zbývajících dvou hran je menší než 4. (K důkazu použijte vzorce pro objem čtyrstěnu ze str. 7.)

7. Vrcholem D čtyrstěnu $ABCD$ veďme přímky rovnoběžné s hranami AB, BC, AC. Dokažte, že tyto tři přímky leží v rovině.

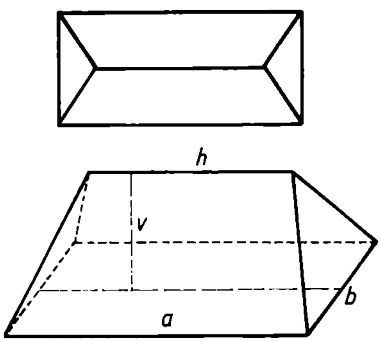
8. a) Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC. Libovolný vnitřní bod jeho základny AB označme M. Ukažte,

že součet vzdáleností bodu M od ramen trojúhelníka je nezávislý na poloze bodu M. b) Je dán pravidelný jehlan trojboký $VABC$. Na jeho podstavě je zvolen libovolný vnitřní bod M. Ukažte, že součet jeho vzdáleností od pobočných stěn jehlanu je nezávislý na poloze bodu M. (V 1. případě počítejte součet obsahů trojúhelníků AMC, BMC a v 2. případě součet objemů čtyrstěnů $MABD$, $MBCD$, $MACD$.)

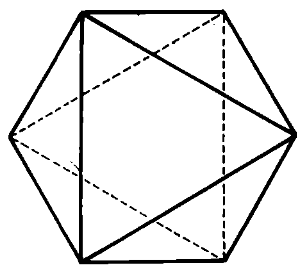
9. V daném čtyrstěnu $ABCD$ platí $AD \perp BD$, $BD \perp CD$, $AD \perp CD$. Vypočtěte délku tělesové výšky daného čtyrstěnu, která prochází vrcholem D.

10. V příkl. 8. jsme počítali vzdálenosti mimoběžných hran čtyrstěnu. Výsledku se dá také použít k výpočtu úhlu mimoběžných hran. Proveďte podrobně.

11. Vzorce pro objem prismatoidu se dá použít i k výpočtu objemu těles a) znázorněného v obr. 21 svým půdorysem a názorným průmětem; b) pravidelného osmistěnu (obr. 22). Pro kontrolu vypočtěte objem pravidelného osmi-



Obr. 21



Obr. 22

stěnu jako součet objemů dvou shodných pravidelných čtyřbokých jehlanů.

12. Je dán čtyrstěn $ABCD$. Vrcholem D je proložena přímka d rovnoběžná s rovinou ABC a kolmá k hraně AB. Zjistěte množinu všech pat výšek, spuštěných z vrcholu C na ABD, kde vrchol D probíhá všechny body přímky d.

13. V předešlém příkladu nahraďte přímku d rovinou δ, procházející vrcholem D rovnoběžně s rovinou ABC a hledejte množinu všech pat tělesových výšek jdoucích vrcholem C, kde vrchol D probíhá všechny body roviny δ.

14. Rovina, procházející jednou hranou čtyrstěnu a půlící hranu protilehlou, dělí daný čtyrstěn na dva čtyrstěny téhož objemu. Dokažte. Lze větu rozšířit v tom smyslu, že protější hranu rozdělíme na n shodných dílů?

15. Řezem čtyrstěnu rovinou, která je rovnoběžná s dvěma protějšími hranami a která přitom protíná jednu ze zbývajících hran čtyrstěnu, je rovnoběžník. Může být tento rovnoběžník obdélníkem? Jestliže ano, kdy?

16. Je dána krychle $ABCDEFGH$, jejíž hrana má délku a. Z ní je odříznut čtyrstěn $ABDE$. Uvnitř trojúhelníka BDE je zvolen bod M, jehož vzdálenosti od stěn ABD, ABE, ADE jsou po řadě x, y, z. Ukažte, že součet $x + y + z$ je nezávislý na poloze bodu M.

17. Ukažte, že tělesová výška čtyrstěnu $ABDE$ z předchozího cvičení, která prochází vrcholem A, je rovna jedné třetině tělesové úhlopříčky krychle, z níž je čtyrstěn odříznut.

18. (Týká se opět čtyrstěnu $ABDE$ ze cvič. 16.) Zvolme libovolný vnitřní bod M čtyrstěnu $ABDE$. Ukažte, že součet čtverců vzdáleností bodu M od stěn BCD, CDH, EFG

zmenšený o součet čtverců vzdáleností bodu M od zbývajících tří stěn krychle je konstantní.

19. Do kulové plochy poloměru r je vepsán čtyrstěn $ABCD$ tak, že hrana AB je průměr dané kulové plochy. Dokažte, že potom pro objem čtyrstěnu platí

$$V \leqq \frac{1}{3} r^3.$$

2. kapitola

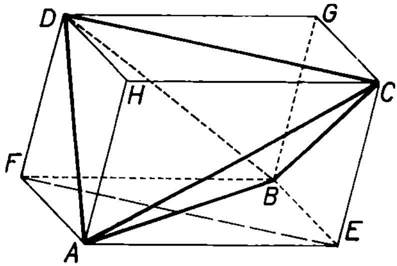
SPECIÁLNÍ ČTYRSTĚNY

1. Ortocentrický čtyrstěn

V první části této kapitoly si všimneme ortocentrického čtyrstěnu. Než však k němu dojdeme, odvodíme několik důležitých vět.

Věta 1. *Čtyrstěn buď a) nemá žádný pár protějších hran k sobě kolmých, nebo b) má právě jeden pár protějších hran k sobě kolmých, nebo c) má všechny tři páry protějších hran k sobě kolmých.*

Důkaz (obr. 23). Danému čtyrstěnu $ABCD$ opišme známým již způsobem rovnoběžnostěn $AEBFHCGD$ a všimněme si jedné jeho stěny, např. $AEBF$. Její úhlopříčka AB je hrana čtyrstěnu $ABCD$ a druhá úhlopříčka EF je rovnoběžná s hranou CD, tj. s hranou, která je k hraně



Obr. 23

AB protilehlá. Obdobné tvrzení platí o úhlopříčkách všech stěn sestrojeného rovnoběžnostěnu. Jestliže tedy dvě mimoběžné hrany čtyrstěnu jsou k sobě kolmé, projeví se to tím, že i příslušné stěnové úhlopříčky rovnoběžnostěnu jsou k sobě kolmé, což znamená, že dvě stěny rovnoběžnostěnu jsou rovnostranné rovnoběžníky. Zřejmě to platí i obráceně.

Všimněme si nyní těchto tří případů.

a) Daný čtyrstěn $ABCD$ nemá žádné dvě protější hrany k sobě kolmé a pak povrch rovnoběžnostěnu je složen vesměs z různostranných rovnoběžníků. Obráceně, jestliže povrch rovnoběžnostěnu $AEBFHCGD$ je složen vesměs z různostranných rovnoběžníků, nemá čtyrstěn $ABCD$ žádnou dvojici protějších hran k sobě kolmých.

b) Nechť daný čtyrstěn má právě jeden pár protějších hran k sobě kolmých. Potom opsaný rovnoběžnostěn má dvě a jen dvě (protější) stěny rovnostranné rovnoběžníky. Bez újmy na obecnosti můžeme říci, že to jsou hrany AB, CD. Potom však povrch rovnoběžnostěnu $AEBFHCGD$ obsahuje právě dva rovnostranné rovnoběžníky; jsou to $AEBF$ a $HCGD$.

Obráceně. Nechť povrch rovnoběžnostěnu $AEBFHCGD$ obsahuje právě dva rovnostranné rovnoběžníky. Bez újmy na obecnosti řekněme, že to jsou stěny $AEBF$, $HCGD$. To znamená, že jejich úhlopříčky AB, EF jsou k sobě kolmé a také HG, CD jsou k sobě kolmé. Tedy i hrany AB, CD čtyrstěnu jsou k sobě kolmé.

c) Nechť v daném čtyrstěnu $ABCD$ platí

$$AB \perp CD, \quad BC \perp AD.$$

Potom povrch opsaného rovnoběžnostěnu $AEBFHCGD$ obsahuje tyto rovnostranné rovnoběžníky: $AEBF$, $HCGD$ a $EBGC$, $AFDH$. Platí tudíž

$$AE = HC = CG = CE.$$

Odtud vidíme, že i zbývající dvě stěny našeho rovnoběžnostěnu jsou rovnostranné rovnoběžníky. (Nemusí být nutně shodné s předešlými.) Z toho a z obrácené věty odst. b) plyne, že i

$$AC \perp BD.$$

Daný čtyrstěn má každé dvě protější hrany navzájem kolmé.

Čtyrstěn, který jsme takto dostali, se nazývá *ortocentrický*. A hned si řekneme jednu jeho zajímavou vlastnost; všechny hrany rovnoběžnostěnu, který je opsán ortocentrickému čtyrstěnu, jsou shodné.

Z předešlého je patrno, že podle vzájemné polohy protějších hran čtyrstěnu rozdělujeme čtyrstěny do tří skupin:

a) *Čtyrstěny, u nichž žádné dvě protější hrany nejsou k sobě kolmé.*

b) *Čtyrstěny, u nichž právě dvě protější hrany jsou vzájemně kolmé.*

c) *Čtyrstěny, jejichž každý pár protějších hran leží na přímkách k sobě kolmých.*

Než přistoupíme k řešení příkladů, připomeňme si tři důležité věty, týkající se kolmosti přímky k rovině a kolmosti dvou rovin.

I. Definice kolmosti. *Přímka je kolmá k rovině, je-li kolmá ke všem přímkám této roviny.*

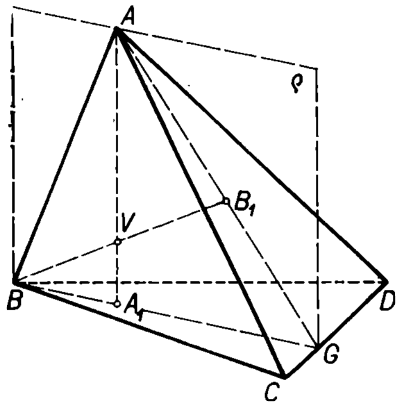
II. Kritérium kolmosti. *Přímka je kolmá k rovině, je-li kolmá ke dvěma různoběžkám této roviny.*

III. *Dvě roviny jsou navzájem kolmé, jestliže v jedné z nich leží přímka kolmá k druhé.*

Příklad 1. Jestliže hrany AB, CD daného čtyrstěnu $ABCD$ jsou k sobě kolmé, potom tělesové výšky, jdoucí vrcholy A, B, se protínají. Podobně se protínají (ne nutně v tomtéž bodě) i tělesové výšky jdoucí vrcholy C, D.

Obráceně. Jestliže tělesové výšky daného čtyrstěnu $ABCD$, jdoucí vrcholy A, B, se protínají, jsou hrany AB, CD navzájem kolmé.

D ů k a z (obr. 24). a) Podle předpokladu jsou hrany AB,



Obr. 24

CD k sobě kolmé a proto můžeme hranou AB proložit rovinu ϱ kolmou k CD. Ta protne přímku CD v bodě G. V rovině ϱ musí ležet tělesová výška čtyrstěnu jdoucí vrcholem A i vrcholem B a poněvadž obě výšky nemohou být spolu rovnoběžné (proč ?), jsou různoběžné.

Stejně se dokáže, že i tělesové výšky z vrcholů C, D jsou různoběžné.

b) Předpokládejme, že tělesové výšky daného čtyrstěnu $ABCD$, které procházejí vrcholy A, B, se protínají v bodě V. O výšce AV tedy platí

$$AV \perp BCD,$$

což podle věty I znamená, že

$$AV \perp CD.$$

Stejně o výšce z vrcholu B platí

$$BV \perp ACD \Rightarrow BV \perp CD.$$

Dokázali jsme tedy, že

$$CD \perp AV,$$
$$CD \perp BV.$$

Použijeme-li nyní věty II, znamená to, že hrana CD je kolmá k rovině ABV, tj.

$$CD \perp ABV.$$

Použijeme-li znovu věty I, máme

$$CD \perp AB,$$

jak jsme měli dokázat.

Při důkazu jsme mlčky přešli možnost, že by body A, B, V neurčovaly rovinu. To však by nastalo jedině tehdy, když by některé stěny čtyrstěnu byly k sobě kolmé. To jsme však hned na začátku první kapitoly vyloučili.

Příklad 2. V ortocentrickém čtyrstěnu procházejí všechny jeho tělesové výšky týmž bodem.

Důkaz. Daný čtyrstěn označme $ABCD$. Poněvadž hrany AB, CD jsou vzájemně kolmé, protínají se tělesové výšky procházející vrcholy A, B. Poněvadž jsou k sobě kolmé hrany AC, BD, protínají se tělesové výšky z vrcholů A, C. A poněvadž jsou kolmé i hrany AD, BC, protínají ve i tělesové výšky z vrcholů A, D. Výšky z vrcholů C, D s B, D a B, C se také protínají. Tedy každé dvě tělesové výšky daného čtyrstěnu se protínají, a to je možné jen v těchto dvou případech:

a) všechny tělesové výšky leží v téže rovině;

b) tělesové výšky neleží v téže rovině, ale procházejí týmž bodem. (*Ortocentrum čtyrstěnu.*)

První případ nastat nemůže, neboť by potom všechny vrcholy čtyrstěnu ležely v téže rovině. Nastane tudíž druhý případ a tím je naše tvrzení dokázáno.

Příklad 3. Je dán ortocentrický čtyrstěn $ABCD$. Ukažte, že tělesová výška, jdoucí vrcholem A (B, C, D) prochází ortocentrem stěny BCD (ACD, ABD, ABC).

Řešení (obr. 24). Hranou AB proložme rovinu $\varrho \perp CD$. To lze, neboť hrany AB, CD jsou navzájem kolmé. Rovina ϱ nutně obsahuje tělesovou výšku AA_1, neboť v rovině ϱ leží všechny kolmice k rovině BCD, které protínají hranu AB. Přitom (věta I)

$$BA_1 \perp CD.$$

To znamená, že přímka BA_1 je výška stěny BCD.

Stejně bychom ukázali, že CA_1 (DA_1) je výška trojúhelníka BCD, jdoucí vrcholem C (D) a odtud vyplývá, že bod A_1 je ortocentrem stěny BCD.

To, co jsme řekli o vrcholu A, platí i o vrcholech B, C, D a tak vyslovená věta je dokázána.

Příklad 4. Budiž dán ortocentrický čtyrstěn $ABCD$. Je-li V jeho ortocentrum, pak prostorový pětiúhelník $ABCDV$ má tyto vlastnosti:

a) Přímka, spojující kterékoli dva jeho vrcholy, je kolmá k rovině určené zbývajícími třemi.

b) Každý vrchol tohoto pětiúhelníka je ortocentrem čtyrstěnu, jehož vrcholy jsou zbývající čtyři vrcholy pětiúhelníka. — Dokažte.

Důkaz. a) Přímka AV (BV; CV; DV) je kolmá na stěnu BCD (ACD, ABD, ABC), neboť to je výška daného čtyrstěnu. Přímka AB je kolmá k rovině CDV, neboť je kolmá ke dvěma různoběžkám této roviny (věta II). Skutečně tu platí

$$AB \perp CD$$

(je to ortocentrický čtyrstěn) a také

$$CV \perp ABD \Rightarrow CV \perp AB$$

(věta I). Platí tedy skutečně

$$AB \perp CDV.$$

Podobně se dá dokázat, že $AC \perp BDV$, $AD \perp BCV$ a tím je důkaz dokončen.

b) Bod V je skutečně ortocentrem čtyrstěnu $ABCD$. Zde věta platí. Stačí proto dokázat, že A je ortocentrem čtyrstěnu $BCDV$.

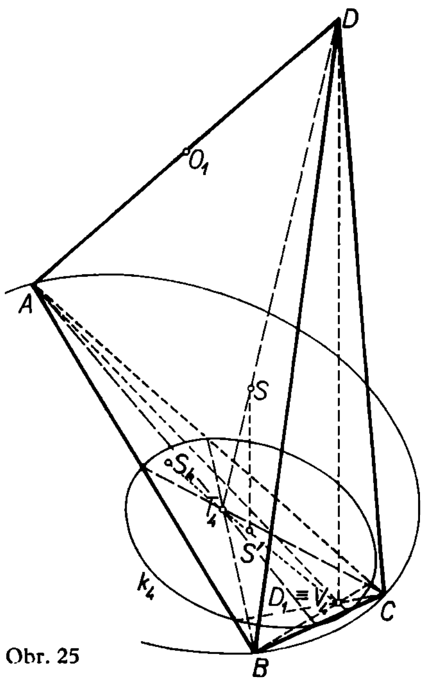
Tělesová výška čtyrstěnu $BCDV$ z vrcholu B je přímka BA, jak jsme si v předchozím odstavci dokázali, a k tomu dodejme, že bodem lze vést k rovině jedinou kolmici.

Podobně výška z vrcholu C (D) na stěnu BDV (BCV) je přímka CA (DA) a výška z vrcholu V na stěnu BCD je přímka VA. Bod A je tudíž ortocentrem čtyrstěnu $BCDV$. Tím je vlastně důkaz proveden, neboť to, co platí o bodu A a čtyrstěnu $BCDV$, platí i o bodu B (C; D) a čtyrstěnu $ACDV$ ($ABDV$; $ABCV$).

Každý trojúhelník, jehož opsaná kružnice je $k \equiv (S; r)$, má svou kružnici devíti bodů, která prochází středy stran trojúhelníka a patami výšek trojúhelníka. Obě kružnice, tj. kružnice k a kružnice devíti bodů mají své středy stejnolehlosti v průsečíku výšek a v těžišti daného trojúhelníka. Koeficient stejnolehlosti je $\frac{1}{2}$. (Viz *Kružnice*, Škola mladých matematiků, sv. 16, str. 78, př. 12.) To, co jsme si tu řekli o kružnici devíti bodů, stačí k tomu, abychom v ortocentrickém čtyrstěnu určili kulovou plochu dvanácti bodů.

Příklad 5. V ortocentrickém čtyrstěnu existuje kulová plocha, která obsahuje středy všech hran a paty stěnových výšek. (Tzv. první kulová plocha dvanácti bodů.) Její střed splývá s těžištěm daného čtyrstěnu a její poloměr je roven polovině poloměru kulové plochy, která je opsána danému čtyrstěnu.

Důkaz (obr. 25). a) Mějme dán ortocentrický čtyrstěn



Obr. 25

$ABCD$ a v jedné jeho stěně, např. v ABC, sestrojme kružnici k_4 devíti bodů. Víme, že prochází středy A', B', C' hran BC, AC, AB a patami V_1, V_2, V_3 výšek, sestrojených po řadě vrcholy A, B, C ve stěně ABC. Středem O_1 hrany AD a kružnicí k_4 je určena jediná kulová plocha χ' (bod O_1 neleží s kružnicí k_4 v téže rovině), která je rovinou ABD proťata v kružnici k_3. Tato kružnice obsahuje střed C' hrany AB, střed O_1 hrany AD a patu V_3 stěnové výšky z vrcholu D na hranu AB. Těmito třemi body je však určena kružnice devíti bodů v trojúhelníku ABD a poněvadž třemi body, které neleží v přímce, je určena jediná kružnice, je kružnice k_3 kružnicí devíti bodů v trojúhelníku ABD.

Podobně ukážeme, že plocha χ' protíná stěnu ACD (BCD) v kružnici devíti bodů k_2 (k_1) ležící v této stěně. Poněvadž tyto kružnice procházejí středy hran AC, AD, CD, BC, BD a patami stěnových výšek, prochází těmito body i kulová plocha χ'. Tím je vyslovená věta dokázána.

b) V obr. 25 je V_4 ortocentrum stěny ABC a splývá s pravoúhlým průmětem D_1 vrcholu D do roviny ABC. Body T_4 a S_4 jsou po řadě těžiště a střed opsané kružnice trojúhelníka ABC. Víme, že T_4 leží mezi S_4 a V_4 a že platí

$$V_4T_4 = 2 \,.\, T_4S_4.$$

Označme S' střed kružnice k_4 devíti bodů. Bod T_4 leží mezi body S' a S_4 a platí o něm

$$T_4S_4 = 2 \,.\, S'T_4$$

a proto S' je střed úsečky V_4S_4. Počítejme dále

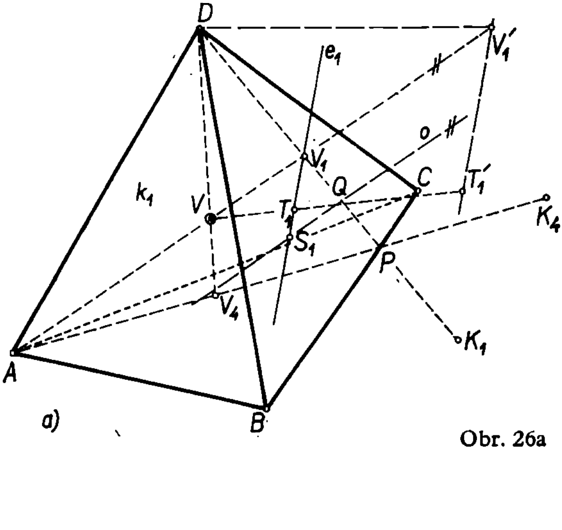
$$S'T_4 = \frac{1}{2}\, T_4S_4 = \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2} \,.\, V_4T_4 = \frac{1}{4} \,.\, V_4T_4. \quad \text{(a)}$$

Střed S první kulové plochy dvanácti bodů leží na kolmici, sestrojené v bodě S' k rovině ABC. Podle výsledku (a) prochází tato kolmice těžištěm T daného čtyrstěnu.

Stejnou úvahu můžeme provést i pro další stěny daného čtyrstěnu a z toho pak plyne, že střed S kulové plochy χ' splývá s těžištěm T čtyrstěnu.

c) Poloměr plochy χ' je roven polovině poloměru kulové plochy opsané danému čtyrstěnu, což plyne z předcházejících úvah.

Příklad 6. V ortocentrickém čtyrstěnu existuje kulová plocha, která obsahuje těchto dvanáct bodů: ortocentra všech čtyř stěn; těžiště všech čtyř stěn; body, které dělí v poměru 2 : 1 úsečku, omezenou ortocentrem čtyrstěnu a vrcholem čtyrstěnu, při čemž větší díl je při vrcholu. Poloměr této kulové plochy je roven jedné třetině poloměru kulové plochy, opsané danému čtyrstěnu. (Tato plocha se nazývá druhá kulová plocha dvanácti bodů.) Dokažte vyslovená tvrzení.



Obr. 26a

Důkaz (obr. 26abc). Nejprve ukážeme, že na kulové ploše χ, která je opsána danému čtyrstěnu $ABCD$, leží osm význačných bodů (kromě vrcholů) a teprve potom dokážeme vyslovenou větu.

Těžiště stěn ABC, ABD, ACD, BCD označíme po řadě T_4, T_3, T_2, T_1. Paty výšek, sestrojených vrcholy A, B, C, D na protější stěny, označíme po řadě V_1, V_2, V_3, V_4. Tyto čtyři body jsou zároveň ortocentry jednotlivých stěn. Ortocentrum daného čtyrstěnu označíme V.

a) Průsečík otevřené polopřímky AV_1 s plochou χ označme V'_1. Otevřená polopřímka DV_1, určená stěnovou výškou DV_1, protne hranu BC v bodě P a kulovou plochu χ v bodě K_1. (Obr. 26 a.) Bod K_1 — poněvadž leží v rovině BCD — je nutně bodem kružnice k_1, která je opsána trojúhelníku BCD a je řezem plochy χ rovinou BCD. Tu platí

$$PV_1 = PK_1.$$

(Viz *Kružnice*, Škola mladých matematiků, sv. 16, str. 17, př. 8.) Otevřená polopřímka AV_4 protne hranu BC v bodě P a plochu χ v bodě K_4, o němž platí (podobně jako o bodu K_1)

$$PV_4 = PK_4.$$

Rovina ADP protíná naši kulovou plochu v kružnici (obr. 26 b), která prochází body A, D, V'_1, K_1, K_4. Pravoúhlé trojúhelníky $V_1K_1V'_1$, V_1PV jsou podobné, neboť

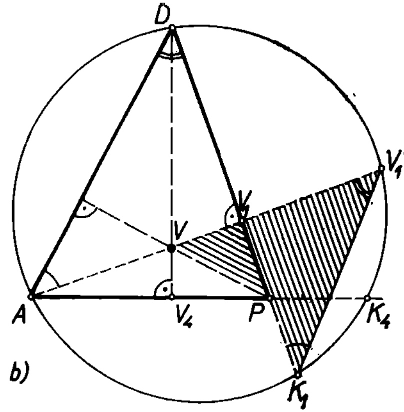
a) $$\sphericalangle ADK_1 = \sphericalangle AV'_1K_1,$$

b) $$\sphericalangle VPV_1 = 90° - \sphericalangle ADK_1,$$

$$\sphericalangle V_1K_1V'_1 = 90° - \sphericalangle AV'_1K_1.$$

Z posledních dvou rovnic plyne

$$\sphericalangle VPV_1 = \sphericalangle V_1K_1V'_1$$



Obr. 26b

a zmíněné dva trojúhelníky jsou podle toho skutečně podobné. Jejich strany, které si v podobnosti odpovídají, jsou pak úměrné:

$$VV_1 : PV_1 = V_1V'_1 : V_1K_1.$$

Můžeme tudíž říci, že podobnost mezi oběma trojúhelníky má koeficient podobnosti rovný 2. Jinak: Bod V_1 je obrazem bodu V'_1 ve stejnolehlosti se středem v bodě V a koeficientem $\frac{1}{3}$.

Stejným způsobem se provede důkaz pro body V, V_2, V'_2; V, V_3, V'_3; V, V_4, V'_4.

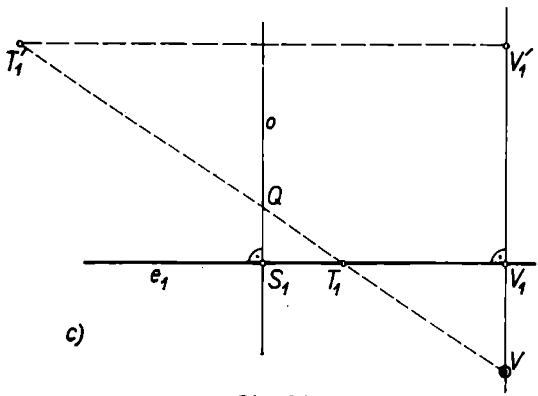
b) Na polopřímce VT_1, na prodloužení za bod T_1, sestrojme bod T'_1 tak, aby (obr. 26 a)

$$T_1T'_1 = 2 . VT_1.$$

Dále označme S_1 střed kružnice k_1 opsané trojúhelníku

BCD. Kolmice o v něm sestrojená k rovině BCD (je rovnoběžná s přímkou VV_1) prochází středem S kulové plochy χ. Body V_1, T_1, S_1 leží na Eulerově přímce e_1 trojúhelníka BCD. (Viz *Kružnice*, str. 84, cvič. 6, obr. 46.) Tudíž bod T_1 leží mezi S_1 a V_1 a platí

$$V_1T_1 = 2 . S_1T_1. \qquad \text{(a)}$$



Obr. 26c

Na obr. 26c máme znázorněný detail v rovině oV_1. Tato rovina obsahuje ortocentrum V a body T_1, T'_1. (T'_1 leží na přímce VT_1.) Průsečík přímky o s přímkou VT'_1 označme Q. Potom je

$$VT'_1 = 3 . VT_1. \qquad \text{(b)}$$

Z podobnosti trojúhelníků QT_1S_1, VT_1V_1 a ze vztahů (a), (b) plyne

$$VQ = VT_1 + T_1Q = VT_1 - \frac{1}{2}\, VT_1 = \frac{3}{2}\, VT_1 =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} VT'_1 = \frac{1}{2} VT'_1.$$

Vidíme odtud, že přímka o prochází středem úsečky VT'_1 a poněvadž přímky o, VV'_1 jsou vzájemně rovnoběžné, prochází i středem úsečky $T'_1V'_1$. Body T'_1, V'_1 jsou tudíž souměrně sdružené podle přímky o, což znamená, že bod T'_1 leží na kulové ploše χ, neboť tato plocha je souměrná podle každého svého průměru.

Obdobně můžeme dokázat, že na kulové ploše χ leží i body T'_2, T'_3, T'_4.

Shrneme dosavadní výsledky. Na kulové ploše χ leží kromě vrcholů A, B, C, D těchto dalších osm bodů: V'_1, V'_2, V'_3, V'_4; T'_1, T'_2, T'_3, T'_4.

Ortocentrum V daného čtyrstěnu považujme nyní za střed stejnolehlosti s koeficientem $\frac{1}{3}$. Tím zmíněných osm bodů přejde v body V_1, V_2, V_3, V_4 (ortocentra jednotlivých stěn); T_1, T_2, T_3, T_4 (těžiště jednotlivých stěn). Vrcholy čtyrstěnu přejdou po řadě do bodů A_1, B_1, C_1, D_1, které leží na tělesových výškách čtyrstěnu, a to tak, že

$$VA_1 = \frac{1}{3} VA, \ VB_1 = \frac{1}{3} VB, \ \ldots \ .$$

Při tom bod A_1 leží mezi body A, V, bod B_1 leží mezi body B, V atd.

V dané stejnolehlosti kulové ploše χ odpovídá kulová plocha χ_1, jejíž střed S_1 je v naší stejnolehlosti obrazem středu S plochy χ. Opět platí

$$VS_1 = \frac{1}{3} VS,$$

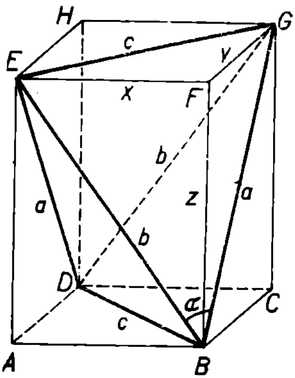
kde S_1 leží mezi body V, S. Poloměr plochy χ_1 je roven třetině poloměru plochy χ.

2. Čtyrstěn, jehož protější hrany jsou shodné

Tento čtyrstěn má několik pěkných, jednoduchých a snadno dokazatelných vlastností, z nichž si některé uvedeme. Začneme příkladem, který zdánlivě s naším čtyrstěnem nesouvisí.

Příklad 7. Je dán kvádr $ABCDEFGH$. Trojúhelník, sestrojený z jeho tří různých stěnových úhlopříček (např. trojúhelník BEG), je ostroúhlý. Dokažte.

Důkaz (obr. 27) provedeme pro trojúhelník BEG, neboť



Obr. 27

ostatní trojúhelníky (sestrojené ze tří různých stěnových úhlopříček) jsou s ním shodné.

Délky hran kvádru stručně označíme

$$AB = x, \quad AD = y, \quad AE = z.$$

Potom

$$BG = a = \sqrt{y^2 + z^2}\,,$$
$$BE = b = \sqrt{x^2 + z^2}\,,$$
$$EG = c = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Označme ještě

$$\alpha = \sphericalangle\, EBG,$$

přičemž

$$0° < \alpha < 180°.$$

V trojúhelníku *BEG* platí kosinová věta:

$$EG^2 = BE^2 + BG^2 - 2\,.\,BE\,.\,BG\,.\cos\alpha.$$

Po dosazení z dřívějších rovnic a po kratší úpravě dojdeme k výsledku

$$\cos\alpha = \frac{z^2}{2ab}\,.$$

Odtud již plyne správnost vyslovené věty, neboť

$$z^2 > 0, \quad ab > 0,$$

a tudíž i $\cos\alpha > 0$ a úhel α je ostrý.

Stejným způsobem by se prováděl důkaz pro zbývající dva úhly trojúhelníka *BEG*. Tím je také důkaz věty proveden.

Věta 2. *Rovnoběžnostěn, který je opsán čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou shodné, je kvádr. Obráceně. Čtyrstěn, vepsaný kvádru, má tu vlastnost, že jeho protější hrany jsou shodné.*

Důkaz (obr. 27). Mějme daný čtyrstěn *BDEG*, jehož protější hrany jsou shodné, tj. platí

$$BD = EG,\ BG = DE,\ BE = DG$$

a opište mu známým způsobem rovnoběžnostěn *ABCDEFGH*. Víme (str. 19), že hrany čtyrstěnu jsou stěnovými úhlopříčkami opsaného rovnoběžnostěnu. Poněvadž

$$EG = BD = FH,$$

plyne z toho, že stěny *ABCD* a *EFGH* jsou pravoúhlé rovnoběžníky. Obdobně se dá ukázat, že pravoúhlé rovnoběžníky jsou i stěny *BCGF*, *ADHE* a *ABFE*, *DCGH*.

Mějme obráceně kvádr *ABCDEFGH* a jemu vepišme čtyrstěn *BDEG*. Je snadné dokázat, že pro tento čtyrstěn platí

$$BD = EG,\ BG = DE,\ BE = DG.$$

To přenechávám píli čtenářů.

Věta 3. *Čtyrstěn, jehož protější hrany jsou shodné, je omezen ostroúhlými trojúhelníky navzájem shodnými.*

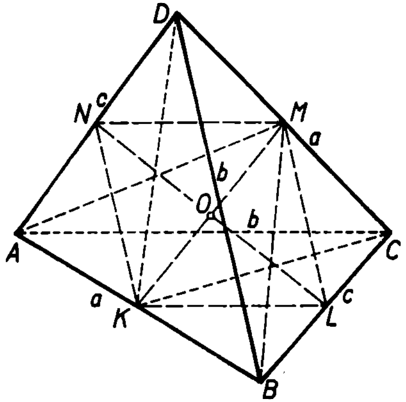
Důkaz obou částí věty je tak jednoduchý, že jej každý čtenář bez obtíží provede.

Příklad 8. Dokažte, že přímky, spojující středy protějších hran čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou shodné, jsou kolmé k těm hranám, které půlí. (Přímky, spojující středy protějších hran, se nazývají střední příčky.)

Řešení (obr. 28). Čtyrstěn, jehož protější hrany jsou shodné, označíme *ABCD*. Středy hran *AB*, *BC*, *CD*, *DA* označíme postupně *K*, *L*, *M*, *N*. Z věty *sss* o shodnosti trojúhelníků plyne, že

$$\triangle ABC \cong \triangle BAD$$

a potom i sobě odpovídající těžnice jsou shodné. Tak např.



Obr. 28

$$KC = KD,$$

a tudíž trojúhelník CDK je rovnoramenný. Přímka KM je v tomto trojúhelníku osa souměrnosti a je tedy

$$KM \perp CD.$$

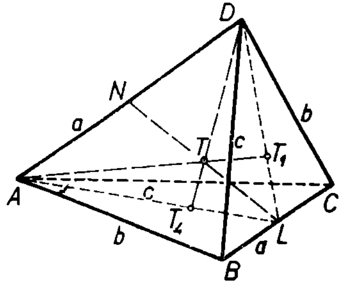
Podobně v trojúhelníku ABM platí

$$KM \perp AB.$$

Poněvadž u ostatních dvou středních příček se důkaz provádí stejně, je důkaz vyslovené věty proveden.

Příklad 9. Dokažte. Těžiště čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou navzájem shodné, splývá s průsečíkem středních příček. Všechny tělesové těžnice jsou navzájem shodné.

Důkaz (obr. 29). a) Označení ponecháme z příkladu 8. — Těžnice DL trojúhelníka BCD a těžnice AL trojúhelníka



Obr. 29

ABC určují rovinu, která obsahuje jednak těžiště T daného čtyrstěnu, jednak střední příčku LN a tudíž i průsečík O všech tří středních příček. Avšak body T, O leží v každé rovině, určené dvěma různoběžnými těžnicemi. Důsledek toho je, že oba tyto body splývají. Popsané roviny mají společný jediný bod.

b) Ze shodnosti trojúhelníků ABC, DCB plyne i shodnost stěnových těžnic

$$AL = DL.$$

Označíme-li T_1, T_4 těžiště stěn BCD, ABC, platí též

$$LT_1 = LT_4.$$

Dále je

$$\triangle\, ALT_1 \cong \triangle\, DLT_4$$

podle věty *sus*, neboť

a) $AL = DL$,

b) $LT_1 = LT_4$,

c) $\sphericalangle\, ALT_1 = \sphericalangle\, DLT_4$

(je to úhel společný oběma trojúhelníkům). Odtud pak máme

$$AT_1 = DT_4.$$

Podobně se dá ukázat, že

$$AT_1 = BT_2 = CT_3 = DT_4,$$

kde T_2, T_3 jsou těžiště stěn ACD, ABD. Tím je však vyslovené tvrzení dokázáno.

Příklad 10. Všechny tělesové výšky čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou vzájemně shodné, jsou shodné.

Důkaz. Tělesové výšky daného čtyrstěnu $ABCD$, sestrojené z vrcholů A, B, C, D označme po řadě v_1, v_2, v_3, v_4. Objem V čtyrstěnu je pak

$$3\,V = (ABC)v_4 = (ABD)v_3 = (ACD)v_2 = (BCD)v_1.$$

Ale obsahy stěn si jsou rovny a tudíž

$$v_4 = v_3 = v_2 = v_1,$$

jak jsme měli dokázat.

Příklad 11. Dokažte, že střed kulové plochy opsané čtyrstěnu $ABCD$, jehož protější hrany jsou shodné, splývá se středem kulové plochy vepsané danému čtyrstěnu a je to průsečík středních příček čtyrstěnu.

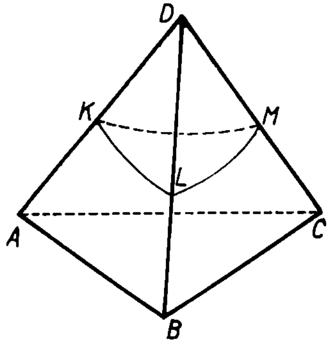
Důkaz. Víme, že těžiště T daného čtyrstěnu splývá s průsečíkem O středních příček čtyrstěnu. Tento bod, s ohledem na větu o těžišti a na výsledek příkladu 8, má ode všech stěn čtyrstěnu tutéž vzdálenost rovnou $\frac{1}{4}v$, kde v je tělesová výška čtyrstěnu. Je to tedy zároveň střed kulové plochy vepsané čtyrstěnu $ABCD$.

Všechny tělesové těžnice čtyrstěnu jsou shodné. Těžiště T má tedy od všech vrcholů čtyrstěnu tutéž vzdálenost rovnou $\frac{3}{4}$ těžnice čtyrstěnu. To znamená, že bod $O \equiv T$ je zároveň střed kulové plochy opsané danému čtyrstěnu.

3. Závěrečné poznámky

1. Tak jako trigonometrií rozumíme výpočet prvků trojúhelníku z prvků daných, tak tetraedrometrií rozumíme výpočet prvků čtyrstěnu z daných šesti prvků. Uvádíme zde číslo šest, neboť čtyrstěn je určen šesti (na sobě nezávislými) prvky. Jen pro zajímavost si uvedeme, jak se matematikové pokoušeli odvodit různé funkce přímo ze čtyrstěnu, nezávisle na goniometrických funkcích. Uveďme zde definici tzv. stranové funkce sinus.

Mějme daný čtyrstěn $ABCD$ a kolem jeho vrcholu D opišme kulovou plochu poloměru r. Ta protne hrany DA, DB, DC po řadě v bodech K, L, M (obr. 30). Potom stra-



Obr. 30

nový sinus trojhranu*) $D(ABC) = D(KLM)$ je definován jako poměr šestinásobného objemu čtyrstěnu $D(KLM)$ a objemu krychle o hraně délky r. Tak např. stranový sinus trojhranu při vrcholu pravidelného čtyrstěnu o hraně délky a je

$$6 \,.\, \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2} : a^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \,.$$

2. Bylo by jistě zajímavé zjistit, kdy dva čtyrstěny jsou shodné. Takových vět o shodnosti, které by vyčerpaly všechny možnosti, by bylo jistě podstatně víc než vět o shodnosti dvou trojúhelníků. To dosud čeká na svého objevitele.

3. Ještě bychom se zde měli zmínit o zborceném čtyřúhelníku. Je to čtyřúhelník, jehož všechny vrcholy neleží v téže rovině. Označme jej $ABCD$. Potom úsečky AB, BC, CD, AD jsou jeho strany, úsečky AC, BD jsou jeho úhlopříčky. Má řadu vlastností, které známe z rovinného čtyřúhelníka. Uveďme aspoň některé.

Označme délky stran, úhlopříček a středních příček postupně a, b, c, d, e, f, r, s. Pak platí

$$e^2 + f^2 = 2(r^2 + s^2),$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4 \,.\, EF^2,$$

kde E, F jsou středy úhlopříček.

Veliká pozornost byla věnována zborceným čtyřúhelníkům, jejichž strany se dotýkají kulové plochy. O délkách stran pak platí (podobně jako o délkách stran tečnového čtyřúhelníka)

$$a + c = b + d.$$

*) Definice trojhranu je na str. 65.

Cvičení

1. Je dán čtyrstěn $ABCD$, v němž $ABD \perp ABC$, $ABD \perp ACD$ a také $ABC \perp ACD$. (Stručně říkáme, že to je čtyrstěn trojnásob pravoúhlý.) Ukažte, že je ortocentrický. — Je každý pár protějších hran k sobě kolmý? Kde leží jeho ortocentrum? Je tu obdoba s pravoúhlým trojúhelníkem?

2. V ortocentrickém čtyrstěnu $ABCD$, který není trojnásob pravoúhlý, platí $AB = CD$. Ukažte, že tu jde o pravidelný čtyrstěn.

3. Čtyrstěn $ABCD$ má výšku DD_1, jejíž pata D_1 je průsečíkem výšek stěny ABC.

a) Dokažte, že tento čtyrstěn je ortocentrický.

b) Ukažte, že existují tři různé roviny, které daný čtyrstěn protínají ve čtvercích.

c) Sestrojte jeden z těchto čtverců, je-li dáno $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 8$ cm, $DD_1 = 10$ cm.

4. Nutná podmínka pro to, aby daný čtyrstěn byl pravidelný, je: Existují tři různé roviny, které daný čtyrstěn protínají ve čtvercích. Je to podmínka postačující?

5. Síť čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou navzájem shodné, je složena ze čtyř shodných ostroúhlých trojúhelníků. Dokažte.

6. Daný ostroúhlý trojúhelník rozdělte středními příčkami na čtyři shodné trojúhelníky, které tvoří síť čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou shodné. Dokažte. — Můžeme říci, že povrch čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou shodné, se dá do roviny rozvinout v ostroúhlý trojúhelník?

7. Dokažte: Součet vzdáleností libovolného vnitřního bodu čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou shodné, je od stěn čtyrstěnu konstantní a je roven délce tělesové výšky tohoto čtyrstěnu.

8. Pravoúhlý průmět vrcholu D čtyrstěnu $ABCD$, jehož protější hrany jsou shodné, do roviny ABC je průsečík výšek trojúhelníka, který vznikne otočením stěn ABD, ACD, BCD kolem hran (po řadě) AB, AC, BC do roviny ABC.

9. Jsou dány délky a, b, c hran čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou vzájemně shodné. Vypočtěte:

a) délky středních příček čtyrstěnu;

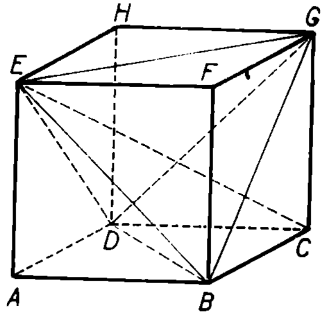
b) velikost úhlů protějších hran.

10. Ve čtyrstěnu, jehož protější hrany jsou vzájemně shodné, mají střední příčky délky rovné nejvýše 1. Ukažte, že délky hran tohoto čtyrstěnu mají pak délky nejvýše rovné $\sqrt{2}$. (Pokyn: Opište danému čtyrstěnu kvádr.)

3. kapitola

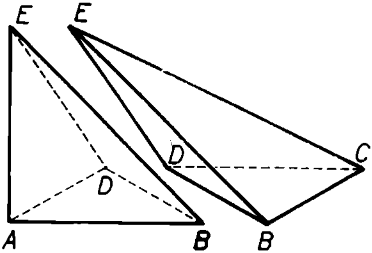
EULEROVA VĚTA

Každý mnohoúhelník v rovině lze rozložit v trojúhelníky. To se také provádí; vzpomeňte si na výpočet obsahu různoběžníka. V prostoru lze podobně každý mnohostěn rozložit na čtyrstěny. Na obr. 31 je jako příklad zobrazena krychle a její rozklad na mnohostěny. V obr. 31abc jsou jednotlivé čtyrstěny zobrazeny každý zvlášť. Všechny tyto čtyrstěny mají společný vrchol E. Podotkněme však, že to není jediný



Obr. 31

rozklad. Je možné např. zvolit libovolný bod L (buď uvnitř krychle, nebo někde na její stěně), který je pak společným vrcholem všech čtyrstěnů, na něž lze krychli rozložit. Rozklady mnohostěnů na čtyrstěny se provádějí vždy,

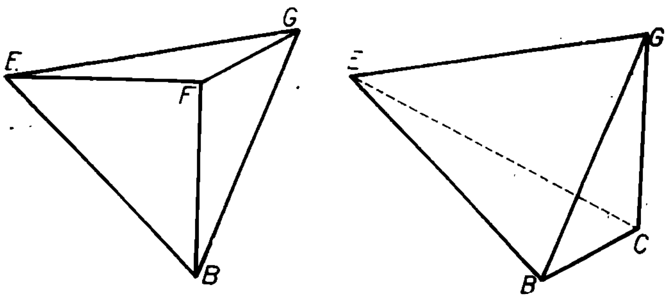


Obr. 31a

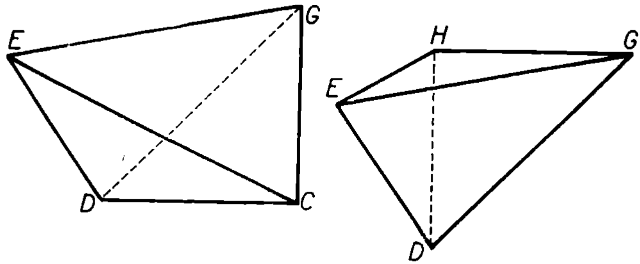
chceme-li elementárními prostředky zjistit objem složitějších těles. Čtyrstěn se nám tu podle toho jeví jako základ, z něhož lze všechny ostatní mnohostěny vytvořit.

V dalších řádcích budeme potřebovat pojem trojhranu a konvexního n-hranu.

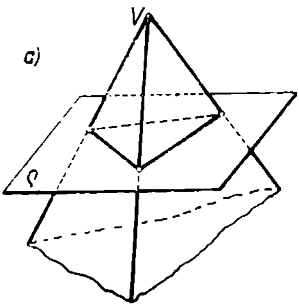
Definice. Trojhran je množina všech polopřímek, které mají společný počátek V a přitom protínají daný trojúhelník, jehož rovina vrcholem V neprochází. (Obr. 32a.) Ty polopřímky, které procházejí vrcholy daného trojúhelníka, se nazývají hrany trojhranu, bod V je vrchol trojhranu.



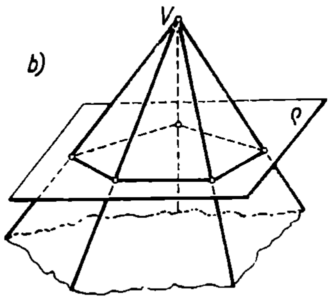
Obr. 31b



Obr. 31c



Obr. 32a



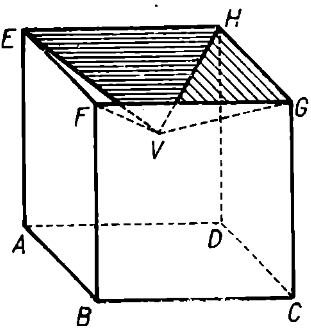
Obr. 32b

Podobně vypadá definice n-hranu.

Definice. Nechť je dána rovina ϱ, v ní konvexní n-úhelník a mimo rovinu ϱ je bod V. Množina všech polopřímek o společném počátku V, které protínají daný n-úhelník, je konvexní n-hran. Bod V je jeho vrchol a ty polopřímky, které procházejí vrcholy n-úhelníka, se nazývají hrany n-hranu. (Obr. 32b.)

Z každého vrcholu V mnohostěnu vychází n ($n \geqq 3$) hran. Tyto hrany náleží n-hranu s vrcholem V. Budeme stručně říkat, že hrany mnohostěnu ve vrcholu V tvoří n-hran. Tak např. ve všech vrcholech krychle jsou trojhrany (říká se, že krychle je mnohostěn trívalentní). Čtyrstěn je též mnohostěn trívalentní. Pravidelný osmistěn je mnohostěn čtyřvalentní. Vysvětlete sami.

Čtyrstěn, krychle, pravidelný osmistěn, hranoly a jehlany, s kterými jste se ve škole seznámili, náleží mezi konvexní útvary v prostoru. (V knížce *Konvexní útvary*, která vyšla v této edici, najde čtenář poučení o konvexních útvarech.) Základní vlastnost těchto útvarů je ta, že konvexní těleso leží vždy v témž poloprostoru, který je vyťat rovinou kterékoli jeho stěny nebo kterékoli jeho tečné roviny. Těleso znázorněné v obr. 33 (je to krychle s jehlanovitou prohlubeninou) není konvexní, neboť rovina stěny



Obr. 33

EFV mnohostěn protíná tak, že část mnohostěnu leží v jednom poloprostoru vyťatém rovinou *EFV* a druhá část leží v poloprostoru opačném.

V celé této kapitole se budeme zabývat jen konvexními mnohostěny.

Definice. Úhel, sevřený dvěma hranami mnohostěnu se společným vrcholem, nazýváme hranový úhel.

Otázky. Jak velké hranové úhly jsou na krychli, na pravidelném čtyrstěnu? Jak velké hranové úhly jsou na pravidelném čtyřbokém jehlanu, jehož plášť je složen z rovnostranných trojúhelníků?

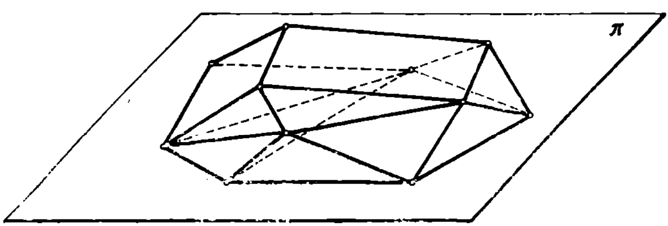
Příklad 1. Dokažte, že součet všech hranových úhlů daného konvexního mnohostěnu je roven plnému úhlu znásobenému počtem vrcholů, který je zmenšen o dvě.

Než přistoupíme k důkazu, zapíšeme vyslovenou větu rovnicí. Je-li σ součet všech hranových úhlů, v je počet vrcholů daného tělesa, platí

$$\sigma = (v - 2).4R.$$

Dříve, než přistoupíme k důkazu, uvědomíme si dvě věci. a) Součet vnitřních úhlů n-úhelníka je $(n - 2)\,2R$. b) Každý n-úhelník, který neleží v promítací rovině, se promítne do n-úhelníku. Důsledek toho je, že se promítáním nezmění součet vnitřních úhlů.

Důkaz (obr. 34). Daný mnohostěn, který má v vrcholů, promítněme rovnoběžně do libovolné roviny π. Směr pro-



Obr. 34

mítání volme však tak, aby se žádná stěna nepromítala jako úsečka a aby žádné dva vrcholy neměly společný průmět. Potom průmětem mnohostěnu je nějaký konvexní mnohoúhelník M. Přitom v_1 vrcholů daného mnohostěnu má své průměty na obvodě mnohoúhelníka M a $v - v_1$ vrcholů má své průměty uvnitř mnohoúhelníka M. Součet σ všech hranových úhlů je součet všech vnitřních úhlů všech stěn daného mnohostěnu a proto se promítnutím nemění. Vypočteme jej tedy nejlépe v průmětu M. Součet σ se skládá jednak ze součtu průmětů všech hranových úhlů při vnitřních vrcholech

$$(v - v_1) . 4R,$$

a jednak ze součtu průmětů hranových úhlů při obrysových vrcholech

$$(v_1 - 2) . 2R.$$

(Je to součet vnitřních úhlů ve v_1-úhelníku.) Tento součet je nutné zdvojnásobit, neboť každý vnitřní úhel mnohoúhelníku M náleží jednak viditelné části mnohostěnu, a jednak neviditelné. Tudíž

$$\sigma = (v - v_1) . 4R + (v_1 - 2) . 4R = \\ = (v - 2) . 4R.$$

Tím je důkaz proveden. Právě dokázaná věta se nazývá *Descartova*. Poslouží nám k rozřešení dalšího příkladu.

Příklad 2. V konvexním mnohostěnu označme v, h, s po řadě počet vrcholů, hran a stěn. Pak platí Eulerova věta: Součet počtu vrcholů a počtu stěn je roven počtu hran zvětšenému o dvě. Zápis tedy je

$$s + v = h + 2.$$

Důkaz. Předpokládejme, že daný mnohostěn obsahuje trojúhelníky v počtu s_3, čtyrúhelníky v počtu s_4 atd. až k-úhelníky v počtu s_k kde $k \geqq 3$. Platí pak

$$s = s_3 + s_4 + \ldots + s_k = \sum_{n=3}^{k} s_n \,. \tag{1}$$

Počet hran daného mnohostěnu je

$$h = \frac{1}{2}(3s_3 + 4s_4 + \ldots + k\,s_k) = \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{k} n\,s_n. \tag{2}$$

Nechť daný mnohostěn má v_3 vrcholů, v nichž hrany tvoří trojhrany, v_4 vrcholů, v nichž hrany tvoří čtyrhrany atd. až v_r vrcholů, v nichž hrany tvoří r-hrany ($r \geqq 3$). Pro počet vrcholů a hran platí

$$v = v_3 + v_4 + \ldots + v_r, \tag{3}$$

$$h = \frac{1}{2}(3v_3 + 4v_4 + \ldots + r\,v_r)\,. \tag{4}$$

Vypočteme součet všech hranových úhlů. Znamená to vypočítat součet všech vnitřních úhlů všech stěn mnohohranu. Dostaneme

$$\sigma = s_3.2R + s_4.4R + \ldots + s_k.(k-2).2R =$$

$$= [s_3 + 2s_4 + \ldots + (k-2)s_k].2R = 2R\sum_{n=3}^{k}(n-2)s_n\,.$$

Z rovnic (1) a (2) vyplývá

$$2h - 2s = \sum_{n=3}^{k} n.s_n - \sum_{n=3}^{k} 2.s_n = \sum_{n=3}^{k}(n-2).s_n\,.$$

Tento výraz dosaďme do výrazu pro σ a obdržíme

$$\sigma = 2R.(2h - 2s) = 4R.(h - s).$$

Porovnáme-li nyní tento vztah s Descartovou větou, dojdeme k Eulerově rovnici

$$s + v = h + 2.$$

Poznámka. Eulerovu rovnici jsme odvodili za předpokladu, že jde o konvexní těleso. Ukazuje se však, že platí i pro některá nekonvexní tělesa. Poněvadž se v této publikaci budeme zabývat jen konvexními tělesy, postačí nám Eulerova věta odvozená za užších předpokladů. — Mnohostěny, splňující právě odvozenou rovnici, se nazývají Eulerovy. Konvexní mnohostěny jsou Eulerovy.

Příklad 3. Dokažte, že o konvexních mnohostěnech platí

1a) $\frac{1}{2} s + 2 \leqq v \leqq 2s - 4,$

1b) $\frac{1}{2} v + 2 \leqq s \leqq 2v - 4.$

2a) $\frac{3}{2} s \leqq h \leqq 3s - 6,$

2b) $\frac{3}{2} v \leqq h \leqq 3v - 6.$

3a) $\frac{1}{3} h + 2 \leqq s \leqq \frac{2}{3} h,$

3b) $\frac{1}{3} h + 2 \leqq v \leqq \frac{2}{3} h.$

Důkaz. a) Stěny každého mnohostěnu jsou nějaké n-úhelníky, kde $n \geqq 3$. Proto každý mnohostěn má nejméně $\frac{3}{2}s$ hran, tj.

$$h \geqq \frac{3}{2} s. \tag{5}$$

Podobně, každý vrchol mnohostěnu je společný aspoň třem hranám a proto

$$h \geqq \frac{3}{2} v. \tag{6}$$

Vztah (5) sečteme s Eulerovou rovnicí a dostaneme

$$v \geqq \frac{1}{2} s + 2. \tag{7}$$

Podobně Eulerova rovnice a vztah (6) dají

$$v \leqq 2s - 4. \tag{8}$$

Vztahy (7) a (8) jsou již vztah 1a).

Nerovnostem (7) a (8) je možné dát tvar

$$s \leqq 2v - 4, \tag{9}$$

$$s \geqq \frac{1}{2} v + 2 \tag{10}$$

a tím jsme došli k vztahu 1b).

b) Vztah (6) psaný v tvaru

$$\frac{2}{3} h \geqq v \tag{11}$$

sečteme s Eulerovou rovnicí. Dojdeme tak k nerovnosti

$$h \leqq 3s - 6, \tag{12}$$

což s nerovností (5) dává vztah 2a).

Vztahu (5) dejme tvar

$$\frac{2}{3} h \geqq s \tag{13}$$

a sečtěme jej s Eulerovou rovnicí. Tím dostaneme

$$h \leqq 3v - 6, \tag{14}$$

což spojeno s (6) dá vztah 2b).

c) Vztah (12) pišme v tvaru

$$\frac{1}{3} h + 2 \leqq s, \tag{15}$$

což se vztahem (13) dává vztah 3a).

Nerovnost (14) psaná ve formě

$$\frac{1}{3} h + 2 \leqq v$$

spolu se vztahem (11) dá 3b).

Příklad 4. V každém konvexním mnohostěnu platí, že součet počtu trojúhelníkových stěn a počtu vrcholů, v nichž jsou trojhrany, je roven nejméně číslu 8.

Důkaz. Počet k-úhelníkových stěn daného mnohostěnu označme s_k. Nechť na mnohostěnu jsou nejvýše n-úhelníky ($n \geqq 3$). Pak

$$s = s_3 + s_4 + \ldots + s_n . \tag{16}$$

Počet vrcholů, v nichž hrany tvoří r-hran, označme v_r a nechť mezi nimi jsou nejvýše m-hrany. Potom

$$v = v_3 + v_4 + \ldots + v_m, \tag{17}$$

přičemž n, m jsou přirozená čísla rovna nejméně třem. Obecně ovšem $n \neq m$. Počet hran se dá vyjádřit dvěma způsoby:

$$2h = 3s_3 + 4s_4 + \ldots + ns_n, \tag{18}$$

$$2h = 3v_3 + 4v_4 + \ldots + mv_m. \tag{19}$$

Eulerovu rovnici pišme poněkud v jiném tvaru, do něhož hned dosazujme z rovnic (18) a (19).

$$4s + 4v = 2h + 2h + 8 =$$

$$= 8 + (3s_3 + 4s_4 + \ldots + ns_n) + (3v_3 + 4v_4 + \ldots$$

$$\ldots + mv_m) = 8 + 3(s_3 + v_3) + 4(s_4 + v_4) + \ldots$$

Za s a v dosaďme z rovnic (16) a (17). Po kratší úpravě dojdeme k rovnici

$$s_3 + v_3 = 8 + (s_5 + v_5) + 2(s_6 + v_6) + \ldots,$$

z níž plyne

$$s_3 + v_3 \geqq 8,$$

jak jsme měli dokázat.

Zajímavý důsledek právě dokázané věty je tento: Jestliže žádná stěna Eulerova mnohostěnu není trojúhelník, pak nutně musí mít aspoň 8 vrcholů, v nichž hrany tvoří trojhrany. Ale také duálně: Jestliže v žádném vrcholu Eulerova mnohostěnu netvoří hrany trojhran, pak nutně musí mít aspoň 8 trojúhelníkových stěn.

Poznámka. Zmínili jsme se o dualitě a tu je potřebí tento pojem objasnit. Dá se to říci stručně: Každá věta, vyslovená o vrcholech, stěnách a hranách mnohostěnu, zůstává v platnosti, zaměníme-li v ní slovo vrchol (stěna) slovem stěna (vrchol) a slovo hrana ponecháme. Přitom provedeme ještě příslušné mluvnické úpravy. Pěkným příkladem duality jsou vzorce 1a a 1b, 2a a 2b, 3a a 3b na str. 71. Eulerova věta je sama k sobě duální.

Příklad 5. Neexistuje Eulerův mnohostěn, mezi jehož stěnami by se nevyskytoval ani trojúhelník, ani čtyrúhelník, ani pětiúhelník. — Duální tvrzení: Neexistuje Eulerův mnohostěn, který by neměl vrchol ani s trojhranem, ani se čtyrhranem, ani s pětihranem.

D ů k a z. a) Eulerovu větu pišme v tvaru

$$s = 2 + h - v$$

a za h dosaďme z rovnice (19) a za v z rovnice (17); dojdeme tak k rovnici

$$s = 2 + \frac{1}{2}(v_3 + 2v_4 + 3v_5 + 4v_6 + 5v_7 + \ldots),$$

$$2s = 4 + v_3 + 2v_4 + 3v_5 + 4v_6 + 5v_7 + \ldots \quad (20)$$

My však víme, že (str. 71, vzorec 2a)

$$h \geqq \frac{3}{2}s \Rightarrow 4h \geqq 6s.$$

Do této nerovnosti dosaďme z rovnice (20) a z rovnice (19).

$$6v_3 + 8v_4 + 10v_5 + 12v_6 + 14v_7 + \ldots \geqq$$
$$\geqq 12 + 3v_3 + 6v_4 + 9v_5 + 12v_6 + 15v_7 + \ldots$$

Upravíme:

$$3v_3 + 2v_4 + v_5 \geqq 12 + v_7 + \ldots .$$

Z toho je již správnost vysloveného tvrzení patrna. Kdyby totiž bylo

$$v_3 = v_4 = v_5 = 0,$$

potom by platilo

$$0 \geqq 12 + v_7 + \ldots ,$$

což je vyloučeno.

b) Důkaz duální věty přenechávám čtenáři.

V této publikaci byla učiněna několikrát zmínka o pravidelném čtyrstěnu. Ten náleží mezi tzv. pravidelné mnohostěny. Krychle je také pravidelný mnohostěn. Existuje jen pět pravidelných mnohostěnů. To ostatně ukážeme v následujících řádcích.

Definice. Pravidelný mnohostěn je takový konvexní mnohostěn, který je omezen vesměs pravidelnými mnohoúhelníky, navzájem shodnými.

Za povšimnutí stojí, že každý pravidelný mnohostěn je téže valence (vzhledem k n-hranům ve vrcholech).

Příklad 6. Dokažte toto tvrzení: Existuje právě pět pravidelných mnohostěnů, a to pravidelný čtyrstěn, krychle, pravidelný osmistěn, pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn.

Důkaz. Počet vrcholů, stěn a hran označme po řadě v, s, h.

a) Předpokládejme, že pravidelný mnohostěn je omezen rovnostrannými trojúhelníky a pak mohou nastat tyto případy.

α) Mnohohran je třívalentní, tj. v každém jeho vrcholu je trojhran. Počet jeho stěn je

$$s = \frac{v.3}{3} = v.$$

Pro počet hran dostaneme

$$h = \frac{3.s}{2} = \frac{3.v}{2},$$

neboť každá stěna má tři hrany. Dosaďme do Eulerova vzorce:

$$v + v - \frac{3v}{2} = 2,$$

$$v = s = 4,\ h = 6.$$

Došli jsme k pravidelnému čtyrstěnu.

β) Předpokládejme, že mnohohran je čtyřvalentní, tj. v každém jeho vrcholu je čtyrhran. Pro počet stěn máme

$$s = \frac{4}{3} v .$$

Počet hran je

$$h = \frac{3s}{2} = 2v.$$

Dosazením do Eulerova vzorce dostaneme

$$v = 6, \; s = 8, \; h = 12.$$

To odpovídá pravidelnému osmistěnu.

γ) Předpokládejme nyní, že daný mnohohran je pětivalentní, tj. v každém jeho vrcholu je pětihran. Je-li za tohoto předpokladu počet vrcholů v, pak počet stěn je

$$s = \frac{5v}{3}$$

a počet hran

$$h = \frac{3s}{2} = \frac{15v}{6} = \frac{5v}{2} .$$

Po dosazení do Eulerovy věty dostaneme

$$v = 12, \; s = 20, \; h = 30.$$

Dospěli jsme tak k pravidelnému dvacetistěnu.

Tím jsme vyčerpali všechny případy, kdy pravidelný mnohostěn je složen z rovnostranných trojúhelníků.

b) Předpokládejme, že pravidelný mnohostěn je složen z čtverců. Je to nutně mnohostěn třívalentní. Méněvalentní nemůže být a vícevalentní také ne, neboť čtyři čtverce by už ležely v rovině. (Součet hranových úhlů při témž vrcholu by byl $4R$.) I platí

$$s = \frac{3v}{4}, \quad h = \frac{4s}{2} = 2s = \frac{3v}{2}.$$

Po dosazení do Eulerovy věty obdržíme

$$s = 6, \ v = 8, \ h = 12.$$

Je to krychle (pravidelný šestistěn).

c) Jestliže pravidelný mnohohran je omezen pravidelnými pětiúhelníky, pak každý vrchol je společný právě třem stěnám z týchž důvodů, jako tomu bylo u krychle. A pak

$$s = \frac{3v}{5}, \quad h = \frac{5s}{2} = \frac{3v}{2}.$$

Dosazením do Eulerovy věty dostaneme

$$s = 12, \ v = 20, \ h = 30.$$

Došli jsme tak k pravidelnému dvanáctistěnu, čímž počet pravidelných mnohostěnů je vyčerpán. Jiné možnosti totiž nemohou nastat.

Hned si tu všimneme, že i zde platí zákon duality. Krychli je duálně přiřazen pravidelný osmistěn a pravidelnému dvacetistěnu odpovídá v dualitě pravidelný dvanáctistěn. Čtyrstěn je sám k sobě duální. Zde se dá princip duality vyjádřit též takto: Jestliže existuje pravidelný mnohostěn, který má s stěn, v vrcholů a h hran, pak existuje též pravidelný mnohostěn, který má s vrcholů, v stěn a h hran.

Příklad 7. Na základě vzorců příkladu 3 rozhodněte, zda existuje těleso, které by mělo a) 11 hran, b) 7 hran. Tělesa popište a zobrazte.

Řešení. a) Předpokládejme, že takové těleso existuje a pak platí

$$\frac{3}{2}s \leqq 11 \leqq 3s - 6.$$

Odtud dostáváme

$$s \leqq \frac{22}{3}, \quad s \geqq \frac{17}{3}.$$

Oběma nerovnostem vyhovují dvě přirozená čísla:

$$s_1 = 6, \; s_2 = 7.$$

Jestliže $s_1 = 6$, pak z Eulerovy věty plyne

$$v_1 = 7.$$

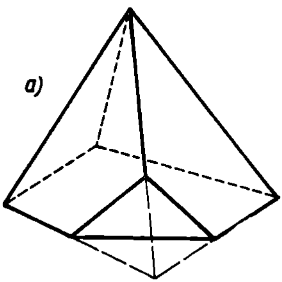
Jestliže $s_2 = 7$, dostaneme z téže věty

$$v_2 = 6.$$

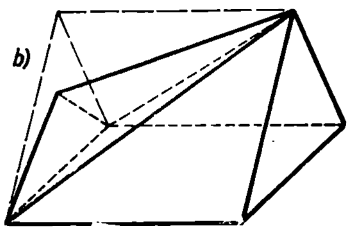
Obě tělesa jsou navzájem duální. Jejich tvar je znázorněn v obr. 35a, b.

b) Užijme týchž dvou vzorců a dostaneme

$$s \leqq \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}, \quad s \geqq \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}.$$



Obr. 35a



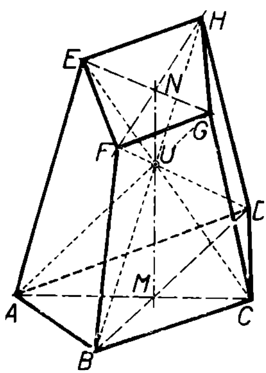
Obr. 35b

Mezi čísly $4\frac{1}{3}$ a $4\frac{2}{3}$ neexistuje však žádné přirozené číslo a proto neexistuje žádné těleso, které by mělo 7 hran.

Řekli jsme, že obě tělesa jsou vzájemně duální. Existuje jednoduchý předpis, jak z jednoho z nich snadno dostaneme druhé. V každé stěně jednoho zvolíme totiž vždy jeden bod. Každý z těchto bodů je vrcholem druhého tělesa.

Příklad 8. Šestistěn je konvexní mnohostěn, který se skládá ze šesti čtyřúhelníkových stěn. Přitom protější stěny nemusí ležet v rovinách vzájemně rovnoběžných. O tomto mnohostěnu platí věta: Jestliže v šestistěnu mají tělesové úhlopříčky společný bod, pak týž bod mají společný i přímky, spojující průsečíky úhlopříček protějších stěn. Dokažte tuto větu.

D ů k a z (obr. 36). Pro každý rovnoběžnostěn věta platí. Obraťme tedy svou pozornost na šestistěn, který není rovnoběžnostěnem. Jeho vrcholy označíme A, B, C, D,



Obr. 36

E, F, G, H. Tělesové úhlopříčky AG, CE, BH, DF procházejí podle předpokladu společným bodem, který označíme U. Úhlopříčky AG, CE leží v rovině ϱ, která obsahuje stěnové úhlopříčky AC, EG (a bod U). Úhlopříčky BH, DF leží v rovině σ, v níž leží stěnové úhlopříčky BD, FH (a bod U). Průsečnice rovin ϱ, σ obsahuje podle toho bod U a body $M \equiv AC.BD$, $N \equiv EG.FH$. Stejným způsobem se důkaz provede pro další dvě dvojice tělesových úhlopříček; tím je tvrzení dokázáno.

Příklad 9. Najděte všechny mnohostěny, které mají šest stěn.

Řešení. Použijeme vzorce

$$\frac{1}{2}v + 2 \leqq s \leqq 2v - 4$$

z 3. příkladu. Odtud po dosazení $s = 6$,

$$v \leqq 8, \quad v \geqq 5.$$

Oběma nerovnostem vyhovují

$$v_1 = 5, \quad v_2 = 6, \quad v_3 = 7, \quad v_4 = 8.$$

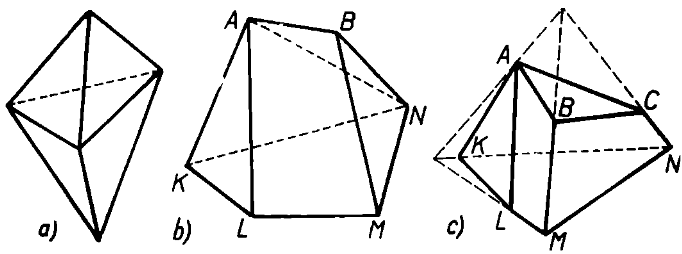
a) $v_1 = 5$, $s = 6$, $h_1 = 9$.

Tomu vyhovuje mnohostěn znázorněný na obr. 37a.

b) $v_2 = 6$, $s = 6$, $h_2 = 10$.

Tomu vyhovují dva mnohostěny: pětiboký jehlan a prismatoid, jenž místo podstavy má úsečku AB rovnoběžnou s podstavou $KLMN$. Vyhovuje však i mnohostěn, v němž hrana AB není rovnoběžná s podstavou $KLMN$, tedy mnohostěn obecnější než prismatoid. (Obr. 37b.)

c) $v_3 = 7$, $s = 6$, $h_3 = 11$.



Obr. 37

Dostaneme mnohostěn, jehož vznik z trojbokého jehlanu je patrný z obr. 37c. Přitom roviny ABC, $KLMN$ nemusí být vzájemně rovnoběžné.

d) $v_4 = 8, \quad s = 6, \quad h_4 = 12.$

Těmto požadavkům vyhovuje každý čtyrboký hranol nebo šestistěn nebo čtyrboký komolý jehlan.

Cvičení

1. Kolik hran má mnohostěn, jehož součet všech hranových úhlů je roven 36R? Dovedli byste takový mnohostěn zobrazit?

2. Je dána krychle $ABCDEFGH$, jejíž střed je S. Z ní je vyňat jehlan $SEFGH$. Vznikl tak mnohostěn s prohlubní. Přesvědčte se, že pro tento mnohostěn, který není konvexní, platí Eulerův vzorec.

3. Na základě vzorců příkladu 3 se přesvědčte, zda existují mnohostěny, pro něž a) $h = 6$, b) $h = 8$.

4. Existuje mnohostěn, skládající se z jednoho pětiúhelníku a několika trojúhelníků, a mající přitom 12 hran?

5. Tak jako se dají sestavit magické čtverce, dají se sestavit i magické krychle. Zde máte několik návodů.

a) Čísly 1, 2, 3, 4, 5, 6 očíslujte stěny krychle tak, aby součty čísel v těch čtyřech stěnách, které jsou rovnoběžné s toutéž hranou, byly stejné.

b) Čísla 1, 2, 3, ..., 7, 8 vepište k vrcholům krychle tak, aby součet čísel při vrcholech téže stěny byl vždy týž.

c) Čísly 1, 2, 3, ..., 11, 12 očíslujte hrany krychle tak, aby součet čísel při hranách v téže stěně byl týž.

OBSAH

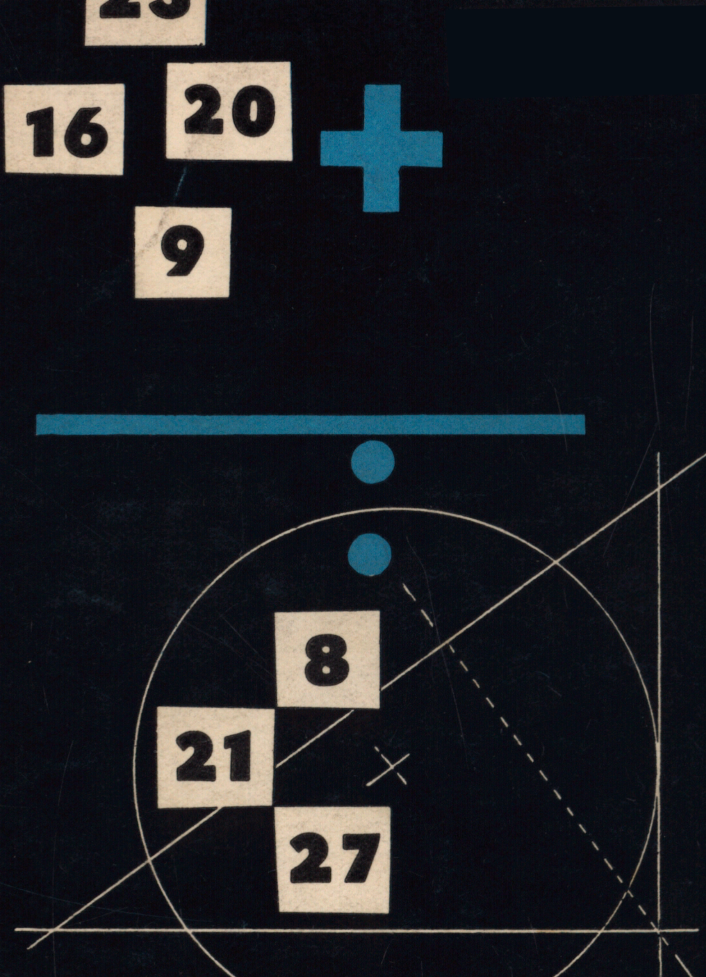
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

STANISLAV HORÁK

mnohostěny

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV Matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Praha 1, Panská 8
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Odpovědný redaktor Milan Daneš
Publikace číslo 2918
Edice Škola mladých matematiků,
svazek 27
Vytiskl Mír, n. p., závod 6
Praha 2, Legerova 22
3,42 AA, 3,55 VA. Náklad 5500 výtisků
1. vydání. 88 stran. Praha 1970. 507/21/8.5

23-040-70 03/2 Cena brož. výtitku Kčs 8,—



23-040-70
03/2
Cena brož.
Kčs 8,—