Jan Mikusiński

Problèmes initiaux et mixtes pour les équations aux dérivées partielles considérés du point de vue du calcul opérationnel

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 3, 311–317

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100199`

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага.

PROBLÈMES INITIAUX ET MIXTES POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES CONSIDÉRÉS DU POINT DE VUE DU CALCUL OPÉRATIONNEL

JAN MIKUSIŃSKI, Warszawa.

Conférence faite le 6 septembre 1955 au Congrès des mathématiciens tchécoslovaques à Prague.

Nous nous occuperons des équations à dérivées partielles

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{\mu\nu} x_{\lambda^\mu t^\nu}(\lambda, t) = \psi(\lambda, t) \tag{1}$$

dont les coefficients $\alpha_{\mu\nu}$ sont constants. Il est bien connu que de telles équations se laissent réduire, au moyen du calcul opérationnel, à des équations ordinaires

$$a_m x^{(m)}(\lambda) + \ldots + a_0 x(\lambda) = g(\lambda) , \tag{2}$$

où les coefficients $a_m, \ldots, a_0$ ainsi que les valeurs de $f(\lambda)$ dépendent d'un paramètre s ou bien sont entendus comme des *opérateurs*, suivant la méthode appliquée. A savoir, il existe à présent deux méthodes d'une telle réduction: l'une, qui est déjà classique, est basée sur la *transformation de Laplace*

$$\mathfrak{L} f = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t , \tag{3}$$

l'autre est basée sur le *produit de composition* [1]

$$fg = \{\int_0^t f(t-\tau) \, g(\tau) \, \mathrm{d}\tau\} , \tag{4}$$

entendu comme une sorte de multiplication.

Les deux méthodes permettent de résoudre et de discuter les équations (1) dans des domaines où la variable t parcourt l'intervalle infini $0 \leqq t < \infty$, en particulier dans les domaines indiquées dans la fig. 1 à la page suivante.

Or, dans beaucoup de théorèmes, c'est l'intervalle fini $0 \leqq t < T$ qui est plus naturel et qui rend ces théorèmes plus géneraux. On a alors à considérer les domaines indiquées dans la fig. 2 au lieu des domaines précédents. Il s'impose la question de savoir si de tels théorèmes se laissent encore démontrer moyennant le calcul opérationnel.

Pour répondre à cette question, remarquons, ce qui est bien connu, que, dans la méthode de la transformation de Laplace, la formule

$$\mathfrak{L}(fg) = \mathfrak{L}f \,.\, \mathfrak{L}g \tag{5}$$

joue un rôle fondamental. Il est facile de voir que cette formule n'est plus valable, lorsqu'on remplace la transformation (3) par la transformation finie

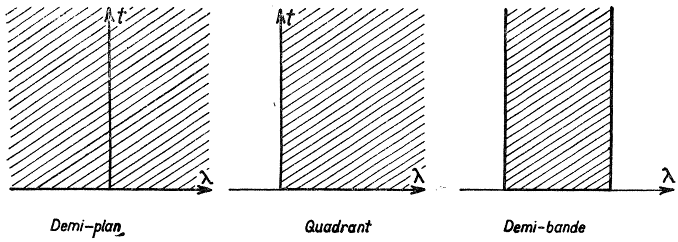

Fig. 1.

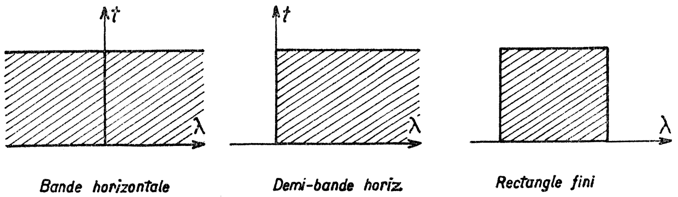

Fig. 2.

$$\mathfrak{L}_T f = \int_0^T e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \,.$$

En effet, si $f(t) = g(t) = 1$, on a

$$\mathfrak{L}_T f \,.\, \mathfrak{L}_T g = \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-sT}}{s^2}\,(-\,2 - e^{-sT})$$

et

$$\mathfrak{L}_T(fg) = \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-sT}}{s^2}\,(-\,1 - sT)\,;$$

les deux expressions ne sont donc pas égales. On voit ainsi que la transformation de Laplace n'est plus convenable dans le cas d'un intervalle fini $0 \leqq t < T$.

On peut affirmer même beaucoup plus: il n'existe aucune transformation $\mathfrak{L}f$ d'un espace fonctionnel en un autre espace fonctionnel qui soit biunivoque, linéaire et qui transforme le produit de composition en un produit ordinaire. En effet, si deux fonctions f et g sont identiques et nulles dans l'intervalle

$0 \leqq t < \frac{1}{2}T$, leur produit de composition est nul dans l'intervalle $0 \leqq t < T$ tout entier. On a donc $\mathfrak{L}(fg) = 0$. Si la formule (5) était valable, on aurait $\mathfrak{L}f = 0$, d'où $f = 0$ pour $0 \leqq t < T$, ce qui n'est pas toujours satisfait.

Les transformations fonctionnelles ne peuvent pas donc servir de base pour le calcul opérationnel dans le cas d'un intervalle fini $0 \leqq t < T$. Nous montrerons cependant qu'il est possible, encore dans ce cas, de se servir du calcul operationnel basé sur le produit de composition (4). L'idée fondamentale est la même que dans le cas de l'intervalle infini $0 \leqq t < \infty$, mais quelques difficultés nouvelles sont à résoudre.

L'ensemble C_T des fonctions continues dans l'intervalle $0 \leqq t < T$ constitue un anneau commutatif, lorsque l'addition est entendue au sens ordinaire et la multiplication au sens de la formule (4). Cet anneau a, comme nous l'avons vu, des diviseur de zéro. Les seules diviseurs de zéro sont des fonctions qui sont identiquement nulles dans un voisinnage droit du point $t = 0$. Formons l'anneau quotient A_T ayant pour ses éléments toutes les fractions g/f dont le numérateur et le dénominateur sont des éléments de l_T et le dénominateur n'est par un diviseur de zéro. L'égalité, l'addition et la multiplication sont définies comme pour les fractions ordinaires. La fraction g/t est un diviseur de zéro, lorsque g est un diviseur de zéro, et seulement dans se cas. Parmi les éléments de A_T on retrouve les *nombres* ordinaires et les *fonctions sommables*, comme dans le calcul opérationnel d'intervalle infini; on retrouve aussi *l'opérateur differentiel s*, qui est l'inverse de la fonction $\{1\}$, ayant la valeur 1 dans tout l'intervalle $0 \leqq t < T$.

Les éléments de A_T seront appelés *opérateurs*.

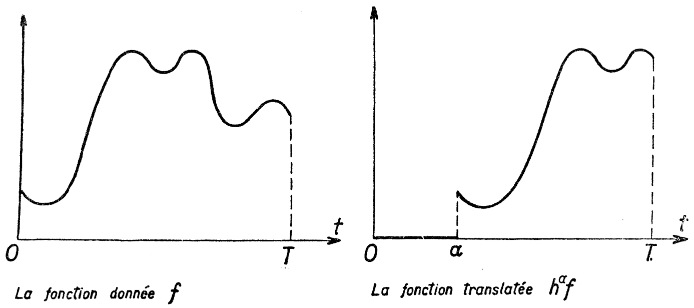

Fig. 3.

Désignons par H_α la fonction dont la valeur est nulle pour $0 \leqq t < \alpha$ et égale à 1 pour $\alpha \leqq t < T$. On a donc $H_0 = \{1\}$ et $H_\alpha = 0$ pour $\alpha \geqq T$. *L'opérateur de translation* est défini comme la fraction

$$h^\alpha = \frac{H_\alpha}{H_0}\,.$$

En multipliant une fonction f par l'opérateur de translation h^α on fait mouvoir le graphique de f de la distance α à droite. La partie de la ligne qui sort au delà de l'intervalle $0 \leqq t < T$, disparaît (voir la fig. 3). On a, pour l'opérateur de translation, des formules $h^0 = 1$ et $h^\alpha h^\beta = h^{\alpha+\beta}$.

Tout opérateur a se laisse représenter dans la forme $h^\alpha a_0$, où $0 \leqq \alpha < T$ et a_0 est un opérateur non diviseur de zéro. Le nombre α est, dans cette représentation, unique. Les seuls diviseurs de zéro sont des opérateurs pour lesquels $\alpha > 0$.

Considérons des fonctions $a(\lambda)$ dont l'argument λ est numérique et dont les valeurs sont des opérateurs; ce sont des *fonctions opérationnelles*. Si en particulier les valeurs de $a(\lambda)$ appartiennent à C_T, la fonction est dite *paramétrique*; elle peut aussi être considérée comme une fonction de deux variables $a(\lambda) = \{a(\lambda, t)\}$. On dira que la fonction paramétrique $a(\lambda)$ a, pour $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$, une dérivée continue $a'(\lambda)$, si $a'(\lambda) = \{a_\lambda(\lambda, t)\}$, où la dérivée partielle entre les crochets est continue dans le rectangle $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$, $0 \leqq t < T$. Généralement, on dira qu'une fonction opérationnelle $f(\lambda)$ a la dérivée continue $f'(\lambda)$, lorsqu'il existe une fonction paramétrique ayant une dérivée continue $a'(\lambda)$ telle que

$$f(\lambda) = \frac{a(\lambda)}{b} \quad \text{et} \quad f'(\lambda) = \frac{a'(\lambda)}{b},$$

où b est un opérateur non diviseur de zéro. L'étude de l'équation diférentielle

$$x'(\lambda) = wx(\lambda) \tag{6}$$

se réduit à l'étude de l'équation intégro-diférentielle

$$\int_0^t p(t-\tau)_{y\lambda}(\lambda, \tau)\, d\tau = \int_0^t g(t-\tau)_y(\lambda, \tau)\, d\tau \tag{7}$$

où p, q et les valeurs de $y(\lambda) = \{y(\lambda, t)\}$ sont des éléments de C_T, tels que

$$a = \frac{p}{r}, \quad b = \frac{q}{r}, \quad x(\lambda) = \frac{y(\lambda)}{r} \quad (r \in C_T).$$

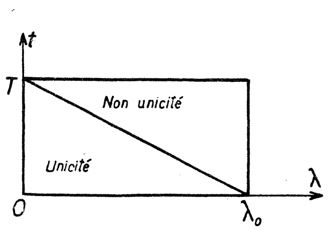

Fig. 4.

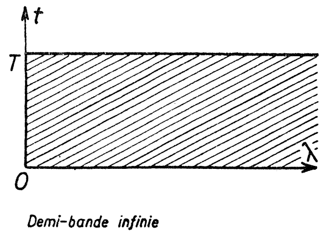

Fig. 5.

On a démontré [2] que, étant données les valeurs de $y(0, t)$ sur le segment $(0, T)$, (fig. 4), il ne peut exister qu'une solution unique $y(\lambda, t)$ de (7) dans le triangle $0 \leqq \frac{\lambda}{\lambda_0} \leqq \frac{\lambda}{\lambda_0} + \frac{t}{T} \leqq 1$. Or, l'unicité n'a, en général, lieu pour le rectangle $0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0$, $0 \leqq t < T$ tout entier. La condition nécessaire et suffisante pour l'unicité dans le rectangle, quel que soient les valeurs sur $(0, T)$, est qu'il existe, dans ce rectangle, au moins une solution $y_0(\lambda, t)$, telle que $y(0, t)$ n'est pas identiquement nulle au voisinnage droit de 0.

Cependant, l'unicité pour la demi-bande infinie $0 \leqq \lambda < \infty$, $0 \leqq t < T$ (fig. 5) est assurée pour (7) toujours. Ceci permet, en conséquence, de définir la *fonction exponentielle* $e^{\lambda w}$ comme la solution unique $x(\lambda)$ de (6) dans l'intervalle infini $0 \leqq \lambda < \infty$ telle que $x(0) = 1$. Une telle solution peut exister ou non. Si $e^{\lambda w}$ existe et est un diviseur de zéro pour un certain $\lambda > 0$, alors elle l'est pour tout $\lambda > 0$ et la fonction $e^{\lambda w}$ ne se laisse pas prolonger pour les valeurs négatives de λ. Dans le cas contraire, le prolongement est possible en posant $e^{-\lambda w} = \frac{1}{e^{\lambda w}}$. Si $e^{w\lambda}$ existe pour $\lambda \geqq 0$ et n'existe pas pour $\lambda < 0$, l'opérateur w est dit *logarithme droit*. Il est facile de deviner ce que sera un *logarithme gauche* et un *logarithme bilatéral*. Si w est un opérateur algébrique en s, c'est à dire si w satisfait à une équation algébrique dont tous les coefficients sont des polynômes de s, l'opérateur w se laisse représenter sous la forme $w_0 - \alpha s$, où w_0 est un logarithme bilatéral et α est un nombre positif, négatif ou nul, suivant que w est un logarithme droit, gauche ou bilatéral.

L'introduction des fonctions exponentielles $e^{\lambda w}$ permet de réduire la résolution de l'équation (2), et, par conséquent, la résolution de l'équation aux dérivées partielles (1), à la résolution de l'*équation caractéristique*

$$a_m w^m + \ldots + a_0 = 0 \,,$$

ce qui permet d'employer la méthode classique de résolution des équations ordinaires à coefficients constants.

Tout polynôme caractéristique

$$a_m w^m + \ldots + a_0$$

déduit d'une équation de la forme (1) peut être décomposé en m facteurs linéaires

$$a_m(w - w_1) \ldots (w - w_m) \,. \tag{8}$$

Si w_i est un logarithme, la fonction $e^{\lambda w_i}$ satisfait à l'équation homogène

$$a_m x^{(m)}(\lambda) + \ldots + a_0 x(\lambda) = 0 \,. \tag{9}$$

De plus, si p parmi les opérateurs $w_1, \ldots, w_m$ sont égaux, toute fonction $\lambda e^{\lambda w_i}, \ldots, \ldots, \lambda^{p-1} e^{\lambda w_i}$, où w_i est l'un quelconque de ces opérateurs égaux, satisfait encore à l'équation (9).

Or, s'il existe des facteurs égaux dans une décomposition d'un polynôme caractéristique, ce polynôme se laisse décomposer d'une infinité de manières; autrement dit, l'équation caractéristique a une infinité de racines. Dans ce cas il peut arriver qu'il existe une infinité de fonctions exponentielles $e^{\lambda w}$ différentes qui satisfont à l'équation (8). C'est un point nouveau, où notre théorie diffère de la théorie classique.

Une autre différence consiste en ce que l'on ne peut pas généralement affirmer, pour l'intervalle fini $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$, que les conditions initiales, au point λ_1, par exemple, entraînent l'unicité de la solution de (8), ce que nous avons déjà vu pour $m = 1$.

Cependant le théorème suivant a lieu:

Si parmi les opérateurs $w_1, \ldots, w_m$ qui figurent dans une décomposition (8), *il y en a k, et seulement k, logarithmes, il existe k fonctions $x_1(\lambda), \ldots, x_k(\lambda)$ telles que toute solution de l'équation homogène*

$$a_m x^{(m)}(\lambda) + \ldots + a_0 x(\lambda) = 0$$

peut être représentée comme une combinaison linéaire de ces fonctions.

Il n'y a aucune difficulté de trouver la forme explicite de ces fonctions.

Ce théorème n'est pas en contradiction avec l'existence d'une infinité de solutions exponentielles; ces solutions se laissent évidemment exprimer linéairement par $x_1(\lambda), \ldots, x_2(\lambda)$. Ce fait peut être illustré facilement par un exemple très suggestif. Si le polynôme caractéristique a la forme $w^2 - 2aw + a^2$ il se décompose en facteurs linéaires $(w - a - b)(w - a + b)$, quel que soit l'opérateur b jouissant de la propriété $b^2 = 0$. Si $e^{\lambda a}$ existe, il existe une infinité de fonctions exponentielles $e^{\lambda(a+b)}$. Or, on a évidemment $e^{\lambda(a+b)} = e^{\lambda a} \cdot e^{\lambda b} = e^{\lambda a} \cdot (1 + \lambda b)$, car les termes restantes du développement de $e^{\lambda b}$ disparaissent en vertu de $b^2 = 0$. Donc, toute fonction exponentielle $e^{\lambda(a+b)}$ est une combinaison linéaire des deux fonction $x_1(\lambda) = e^{\lambda a}$ et $x_2(\lambda) = \lambda e^{\lambda a}$.

Le théorème précédent permet de discuter l'existence et l'unicité de la solution de (9) dans de différents cas des conditions initiales, ou aux limites. Ces résultats peuvent être facilement interprétés pour l'équation homogène aux dérivées partielles

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{\mu\nu} x_{\lambda^\mu t^\nu}(\lambda, t) = 0 \, .$$

A savoir, toute solution de cette équation, considérée dans le rectangle fini $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$, $0 \leqq t < T$, et satisfaisant aux conditions de Cauchy nulles sur l'axe des λ ,peut être représentée dans une forme générale, contenant k fonctions arbitraires de la variable t. En revenant maintenant à l'équation homogène (1) et aux conditions arbitraires sur l'axe des λ, on voit que la différence de deux solutions satisfaisant aux mêmes conditions initiales satisfait à l'équation homogène avec les conditions nulles. La solution du problème non-homogène et avec les conditions arbitraires sur l'axe des λ se réduit ainsi au problème, homogène dès que l'on connaît une seule solution satisfaisant à ces conditions. Pour trouver cette solution, on peut appliquer les mêmes méthodes que dans le cas des opérateurs d'intervalle infini [3].

Le calcul opérationnel d'intervalle fini conduit à des théorèmes nouveaux pour les équations (1) d'ordre quelconque et fournit des démonstrations nouvelles des théorèmes connus. Par exemple, on obtient ainsi une démonstration très simple du théorème de Tychonoff sur l'équation de la chaleur [4].

LITERATURE

[1] *Jan Mikusiński:* Sur les fondements du calcul opératoire, Studia Mathematica *11* (1950), p. 41–70.

[2] *L. Finkelsztejn, J. Mikusiński* et *C. Ryll-Nardzewski:* Sur une équation intégrodifférentielle, Coll. Math. *2* (1951), p. 178–181.

[3] *Jan Mikusiński:* Sur les équations différentielles du calcul opératoire et leurs applications aux équations classiques aux dérivées partielles, Studia Math. *12* (1951), p. 227–270.

[4] *A. Tychonoff:* Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur, Математический Сборник *42*: *2* (1935), p. 199—216.

Резюме

КРАЕВЫЕ И СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ЯН МИКУСИНСКИЙ (Jan Mikusiński), Варшава.

(Прочитано в Праге на IV-ом съезде чехосл. математиков 6/IX 1955 г.)

В настоящей работе автор занимается дифференциальными уравнениями в частных производных типа (1) с постоянными коэффициентами. Как известно, можно при помощи операторного исчисления преобразовать это уравнение к виду обыкновенного диф. уравнения (2). Существуют два метода такого приведения, во-первых, преобразование Лапласа (3), во-вторых, метод основанный на свёртке (4).

Эти методы позволяют исследовать уравнение (1) в областях, в которых переменная t пробегает бесконечный интервал, т. е. в областях, изображенных на рисунке 1. Автор занимается случаем интервала $0 \leqq t < T$, т. е. областей, изображенных на рис. 2. Оказывается, что в этом случае применение преобразования Лапласа невыгодно.

Применяя метод, основанный на свёртке, встречаемся с затруднениями, состоящими в том, что кольцо непрерывных на интервале $0 \leqq t < T$ функций при свёртке его умножения содержит делителей нуля. Автор указал метод распространения операторного исчисления и на этот случай.