Vojtěch Jarník

Sur quelques points de la théorie géométrique des nombres

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 5, 26--48

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121255

Sur quelques points de la théorie géométrique des nombres.

Vojtěch Jarník, Praha.

Soit R^k l'espace euclidien à k dimensions, pourvu de k axes rectangulaires; les points de cet espace sont tous les systèmes de k nombres réels $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$. Nous allons nous occuper des points $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, dont toutes les coordonnées sont des nombres entiers; on connaît le rôle très important que ces points à coordonnés entières (les „Gitterpunkte" des auteurs allemands) jouent dans la théorie des nombres. Dans cette conférence, nous allons nous borner à un problème spécial concernant les points à coordonnées entières, à savoir au problème suivant:

Étant donné un domaine de l'espace R^k, on doit donner une évaluation approchée du nombre des points à coordonnées entières, situés dans ce domaine, notamment pour le cas où ce domaine est très vaste et l'on doit étudier la précision de cette approximation.

Mais ce problème, qui a attiré beaucoup d'intérêt pendant la dernière trentaine d'années, est lui-même si vaste, que je n'en peux donner qu'une revue assez incomplète[1]); qu'il me soit permis de préférer parmi toutes les choses qu'il faudrait dire pour être complet, celles qui sont le plus proches à mon propre champ des recherches.

§ 1. Problèmes dans le plan ($k = 2$).

1. Pour commencer, je vais traiter un problème très spécial, mais assez typique en même temps.

Soit $k = 2$; donc l'espace R^k est le plan. Considérons tous les cercles de ce plan dont le centre commun est situé à l'origine des

[1]) Aussi la liste bibliographique qui se trouve à la fin de cet article, n'est pas complète; pour la plupart, je ne donne qu'un seul renvoi bibliographique par rapport à chaque résultat mentionné; en choisissant ces renvois, je me laissais guider plutôt par les égards à la commodité du lecteur que par l'ordre historique ou les questions de priorité. Remarquons que presque toutes les choses que nous allons mentionner dans le § 1, sont expliquées d'une manière systématique dans l'oeuvre magnifique de M. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, tome II (1927; Landau **1**); sur le problème du cercle, on peut lire aussi avec profit un rapport de M. Wilton (**1**; 1928). Une grande partie des problèmes dont nous allons parler est traitée (sans démonstrations) dans un article excellent de M. Walfisz (**7**; 1929). L'état de la théorie avant 1922 est exposé dans un article des MM. Bohr et Cramér **1** dans la „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften".

coordonnées; c'est-à-dire considérons tous les cercles (voir fig. 1)

$$u^2 + v^2 = x, \tag{1}$$

où x est un paramètre positif, d'ailleurs arbitraire. Soit $A(x)$ le nombre des points à coordonnées entières, situés à l'intérieur ou sur la circonférence (1); c'est-à-dire $A(x)$ est le nombre de tous les couples ordonnés (m, n) de nombres entiers tels que

$$m^2 + n^2 \leqq x. \tag{2}$$

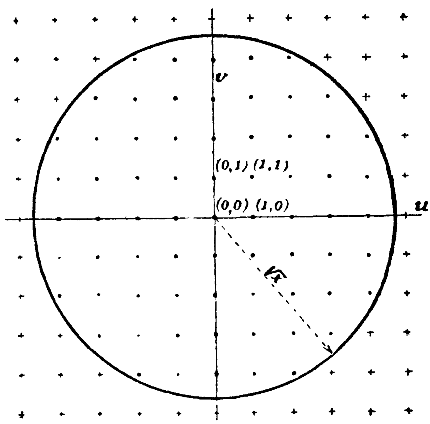

Fig. 1.

On peut s'attendre que, pour les grandes valeurs de x, le nombre $A(x)$ soit approximativement égal à l'aire plane du cercle (1), c'est-à-dire à πx. Posons donc

$$A(x) = \pi x + \mathsf{P}(x); \tag{3}$$

notre problème peut alors s'énoncer comme il suit: on doit déterminer l'ordre de grandeur[2]) du „reste" $\mathsf{P}(x)$ pour les grandes valeurs de x.

---

[2]) Pour pouvoir parler de l'ordre de grandeur d'une fonction d'une manière précise, rappelons la définition de trois symboles bien connus O, o, Ω.

Soient $f(x)$, $g(x)$ deux fonctions, définies pour $x > a$ (où a est un nombre réel); soit, en outre, $g(x) > 0$. Alors la relation

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) = O(g(x)) \\[2ex] f(x) = o(g(x)) \\[2ex] f(x) = \Omega(g(x)) \end{array}\right\} \text{ signifie que } \left\{\begin{array}{l} \limsup\limits_{x=\infty} \dfrac{|f(x)|}{g(x)} < \infty \\[2ex] \limsup\limits_{x=\infty} \dfrac{|f(x)|}{g(x)} = 0 \ \left(\text{c'est-à-dire } \lim\limits_{x=\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0\right) \\[2ex] \limsup\limits_{x=\infty} \dfrac{|f(x)|}{g(x)} > 0 \end{array}\right\}.$$

Remarquons que, les conditions imposées à $f(x)$, $g(x)$ étant remplies, „Ω" est la négation logique de „o".

On voit aisément que la valeur absolue de la différence $A(x) - \pi x$ ne surpasse pas essentiellement la longueur de la circonférence, c'est-à-dire le nombre $2\pi\sqrt{x}$; ou bien, en des termes plus précis: on a

$$\mathsf{P}(x) = O(x^{\frac{1}{2}}). \tag{4}$$

Le premier problème qui se pose ici est le problème suivant: est-ce qu'on peut remplacer, dans la formule (4), l'exposant $\frac{1}{2}$ par un nombre plus petit? Et le second problème, beaucoup plus profond: quelle est la borne inférieure de tous les nombres réels ϑ tels que

$$\mathsf{P}(x) = O(x^{\vartheta})? \tag{5}$$

Désignons cette borne inférieure par f; alors f est défini de la manière suivante: la relation (5) est vraie, si $\vartheta > f$; elle est en défaut, si $\vartheta < f$.

Ce ne fut qu'en 1906 que l'on a réussi à remplacer $\frac{1}{2}$ par un exposant plus petit. C'est à Voronoï (**1**) (1903) que l'on doit un résultat analogue dans un problème analogue et c'est M. Sierpiński (**1**) (1906) qui, en appliquant la méthode de Voronoï à notre problème, a obtenu le résultat suivant:

$$\mathsf{P}(x) = O(x^{\frac{1}{3}}).^{3)} \tag{6}$$

C'est une évaluation supérieure de $\mathsf{P}(x)$; d'autre part, on a démontré l'évaluation inférieure suivante:

$$\mathsf{P}(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}}) \qquad (1915)^{4)} \tag{7}$$

et même

$$\mathsf{P}(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} x) \qquad (1915).^{4)} \tag{8}$$

De (7) et (8), il s'ensuit que

$$\tfrac{1}{4} \leqq f \leqq \tfrac{1}{3}.$$

2. On peut généraliser ce problème, en remplaçant les cercles par des courbes plus générales; on parvient ainsi à un théorème très général de M. van der Corput (1919), dont je ne cite qu'un cas très particulier que voici[5]):

---

[3]) Voici le problème et le résultat de Voronoï: soit $x > 1$; soit $D(x)$ le nombre des points (m, n) à coordonnées entières tels que

$$m \geqq 1,\ n \geqq 1,\ mn \leqq x$$

(c'est donc le nombre des points à coordonnées entières, situés dans un certain triangle hyperbolique). En posant

$$D(x) = x \log x + (2C - 1)\, x + \Delta(x)$$

(C est la constante d'Euler), on a le résultat suivant:

$$\Delta(x) = O\,(x^{\frac{1}{3}} \log x).$$

[4]) Ces formules sont liées au noms des MM. Hardy et Landau; voir Landau **1**, p. 233—249.

[5]) V. d. Corput **1**, Landau **1**, p. 279—302.

A chaque nombre positif x faisons correspondre une courbe plane C_x, jouissante des propriétés suivantes: C_x est une courbe continue, simple, fermée et convexe, dont la tangente et le rayon de courbure varient d'une manière continue le long de la courbe; en outre, dans chaque point de C_x, la valeur absolue du rayon de courbure de C_x est au plus égale à $\sqrt{x}$. Soit $A(C_x)$ le nombre des points à coordonnées entières, situés à l'intérieur de C_x ou sur C_x; soit $V(C_x)$ l'aire plane de l'intérieur de la courbe C_x; soit

$$A(C_x) = V(C_x) + \mathsf{P}(C_x);$$

alors on a

$$\mathsf{P}(C_x) = O(x^{\frac{1}{3}}). \tag{9}$$

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que le résultat exprimé par la dernière formule est le meilleur résultat possible; car il existe un système de courbes C_x, satisfaisant à toutes les conditions du théorème précédent et tel que

$\mathsf{P}(C_x) = \Omega(x^{\frac{1}{3}})$ (Jarník **1**; 1926; voir aussi Landau **1**, p. 303—308).

Donc: si l'on admet tous les systèmes C_x, satisfaisant aux conditions du théorème de M. van der Corput, on ne peut remplacer la fonction $x^{\frac{1}{3}}$ dans la formule (9) par aucune fonction essentiellement plus petite; en particulier, on ne peut remplacer l'exposant $\frac{1}{3}$ par aucun nombre plus petit.

3. Mais, pour des systèmes particuliers de courbes C_x, il est encore bien possible que l'on puisse remplacer l'exposant $\frac{1}{3}$ par un nombre plus petit. Revenons p. ex. à notre problème primitif, où C_x est le cercle $u^2 + v^2 = x$. Dans ce cas particulier, M. van der Corput a réussi, en effet, à abaisser l'exposant $\frac{1}{3}$. Sa démonstration était très ingénieuse, mais aussi extrêmement compliquée[6]); on a ensuite réussi d'une part à abaisser encore un peu de plus l'exposant $\frac{1}{3}$ de la formule (6), d'autre part à simplifier considérablement la démonstration.

Le meilleur résultat, atteint jusqu'à présent dans le cas particulier du cercle $u^2 + v^2 = x$, est exprimé par la formule

$$\mathsf{P}(x) = O(x^{\frac{27}{82}}) \quad \text{(Nieland 1, 1928).} \tag{10}$$

En effet, l'exposant $\frac{27}{82}$ est un peu plus petit que $\frac{1}{3}$.[7]) La différence

[6]) „Probably the most formidable argument in the whole of pure mathematics", d'après une expression des MM. Littlewood et Walfisz **1**.

[7]) Je vais donner encore une courte revue de l'évolution historique de cette question. Le problème de $\mathsf{P}(x)$ et le problème de $\Delta(x)$, mentionné dans la note [3]), sont à regarder comme deux problèmes jumaux; jusqu'à présent chaque évaluation, démontrée pour l'une des deux fonctions $\mathsf{P}(x)$, $\Delta(x)$, pouvait être transportée à l'autre avec la même méthode et à peu près avec la même précision. Comparez p. ex. les résultats de Voronoï et Sierpiński

entre l'exposant de Sierpiński et celui de Nieland est assez petite; elle est égale à $\frac{1}{3} - \frac{27}{82} = \frac{1}{246}$. Mais, pour apprécier justement l'importance des résultats de M. van der Corput, on doit accentuer les circonstances suivantes:

A. Avant la découverte de M. van der Corput, on a inventé beaucoup de méthodes, empruntées aux branches les plus variées des mathématiques; et toutes ces méthodes conduisaient précisément à l'exposant $\frac{1}{3}$, de sorte que l'abaissement de cet exposant avait une importance principielle.

B. De plus, dans un théorème général, exprimé par la formule (9), l'exposant $\frac{1}{3}$ ne peut pas être abaissé, comme nous l'avons vu.

C. Enfin, pour parler avec M. Walfisz (7), ,,man darf die van der Corputschen Leistungen nicht nach der minimalen Verminderung des Restexponenten messen, sondern muß den großen Scharfsinn in Rechnung stellen, der bei unseren unzulänglichen Hilfsmitteln dazu nötig war, um diese Leistungen zu erzielen.“

4. Vous voyez que le problème du cercle est encore beaucoup loin d'être complètement résolu; par exemple, quant'à notre

---

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{1}{3}} \log x), \quad \mathsf{P}(x) = O(x^{\frac{1}{3}}),$$

dont la précision ne diffère que d'un facteur logarithmique.

C'est en 1922 que M. van der Corput a réussi de remplacer l'exposant $\frac{1}{3}$ par un nombre plus petit; il a démontré:

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{163}{494}}) \quad \text{(van der Corput 2).} \qquad (\alpha)$$

D'autre part, il a démontré (1923) un théorème général, d'où s'ensuit comme un cas particulier la formule

$$\mathsf{P}(x) = O(x^{\vartheta}) \quad \text{[van der Corput 3 (1923)],}$$

où ϑ est un nombre convenablement choisi et *plus petit* que $\frac{1}{3}$.

En 1924, MM. Landau, Littlewood et Walfisz, en cherchant une méthode de démonstration plus simple, ont démontré la formule

$$\mathsf{P}(x) = O(x^{\frac{87}{112}} \log^{\frac{5}{56}} x) \quad \text{[Littlewood et Walfisz 1 (1924)];} \qquad (\beta)$$

on a $\frac{163}{494} < \frac{87}{112} < \frac{1}{3}$, de sorte que (β) doit être regardé comme une formule moins précise que (α); mais la démonstration de (β) par MM. Landau, Littlewood et Walfisz était beaucoup plus simple que celle de (α) par M. van der Corput. En 1928, M. van der Corput a réussi à démontrer la formule

$$\Delta(x) = O(x^{\frac{27}{82}} \log^{\frac{11}{41}} x) \quad \text{(v. d. Corput 4, 5, 6),} \qquad (\gamma)$$

formule plus précise que (α), car $\frac{27}{82} < \frac{163}{494}$; en outre, il a donné de (γ) une démonstration qui, tout en restant assez compliquée, est plus simple que sa méthode de 1922. Son élève M. Nieland a démontré la formule correspondante pour le problème du cercle

$$\mathsf{P}(x) = O(x^{\frac{27}{82}}) \quad \text{[Nieland 1 (1928)].} \qquad (\delta)$$

En 1931, M. Titchmarsh a publié un mémoire (Titchmarsh 1), qui constitue un grand progrès méthodique; dans cet article, il démontre de nouveau la formule (δ), mais il a réussi de rendre la démonstration si facile qu'elle peut être lue commodément par n'importe quel géomètre.

nombre f, au lieu d'en connaître la valeur précise, on ne connaît que les inégalités

$$\tfrac{1}{4} \leqq f \leqq \tfrac{27}{82}. \tag{11}$$

5. Pour finir la considération des problèmes dans le plan ($k = 2$), je vais essayer de vous indiquer brièvement une des nombreuses démonstrations de la formule (6) et de vous montrer, en quoi consiste la différence entre cette démonstration de (6) et celle de la formule plus précise (10). On connaît un grand nombre de démonstrations de la formule (6), dont les méthodes sont empruntées à des domaines de mathématiques les plus variés; c'est surtout à MM. van der Corput et Landau que l'on doit les progrès méthodiques dans la démonstration de la formule (6) depuis 1912 jusqu'à présent. Je vais choisir une méthode particulièrement simple, dûe à M. Landau.[8])

Soit $x > 0$ et posons

$$f(u, v) = 1 \text{ pour } u^2 + v^2 \leqq x,$$
$$f(u, v) = 0 \text{ pour } u^2 + v^2 > x;$$

on a donc

$$A(x) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} f(m, n).$$

Quant'à cette dernière somme, on peut en donner le développement suivant

$$\left.\begin{aligned} A(x) &= \sum_{b=-\infty}^{\infty} \sum_{a=-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) \cos 2a\pi u \cos 2b\pi v \, du \, dv \\ &= \pi x + \sum_{b=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{a=-\infty \\ a^2+b^2>0}}^{\infty} \iint_{u^2+v^2 \leqq x} \cos 2a\pi u \cos 2b\pi v \, du \, dv, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

valable pour x non entier.[9])

[8]) Landau **5**, voir aussi **1**, p. 204—208; je ne vais pas donner tous les détails de démonstration; d'autre part, au lieu de prendre la route directe, je vais faire quelques détours pour mieux faire ressortir les idées fondamentales.

[9]) Soit $g(u)$ une fonction à variation bornée dans $(-\infty, \infty)$ et telle que $g(u) = 0$ pour $|u| > c$, c étant un nombre positif convenable. Alors la série de Fourier donne pour chaque m entier

$$\tfrac{1}{2}\left(g(m + 0) + g(m + 1 - 0)\right) = \sum_{a=-\infty}^{\infty} \int_{m}^{m+1} g(u) \cos 2a\pi u \, du,$$

d'où

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{2}\left(g(m + 0) + g(m + 1 - 0)\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{2}\left(g(m - 0) + g(m + 0)\right) =$$

Mais la série dans (12) n'est pas absolument convergente — au moins pour quelques valeurs de x; c'est pourquoi il est préférable de passer à la série intégrée

$$\int_0^x A(y)\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}\pi x^2 + \sum_{b=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{a=-\infty \\ a^2+b^2>0}}^{\infty} K_{a,b}(x), \tag{13}$$

où

$$K_{a,b}(x) = \int_0^x \Big(\iint_{u^2+v^2 \leqq y} \cos 2a\pi u \cos 2b\pi v \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \Big) \mathrm{d}y,$$

valable pour chaque $x > 0$ (on pourrait démontrer aisément la légitimité de l'intégration terme-à-terme). C'est la relation (13) qui nous servira pour point de départ. Pour notre but, la relation (12) (intéressante par elle-même) est inutile; c'est pourquoi il est préférable de ne pas démontrer (13) à l'aide de (12), mais de donner une démonstration directe de (13) (comme le fait aussi M. Landau (5)).

On constate aisément que

$$K_{a,b}(x) = \frac{x}{\pi(a^2+b^2)} I_2(2\pi\sqrt{(a^2+b^2)\,x}), \tag{14}$$

où I_2 est la fonction de Bessel. De la théorie de ces fonctions, nous aurons besoin des relations suivantes:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xI_2(\sqrt{lx})) = \tfrac{1}{2}\sqrt{lx}\, I_1(\sqrt{lx}), \tag{15}$$

$$\left| I_\nu(\sqrt{lx}) - c_1 \frac{\cos(\sqrt{lx} - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi)}{\sqrt[4]{lx}} \right| < c_2 l^{-\frac{3}{4}} x^{-\frac{3}{4}} \tag{16}$$

($\nu = 1, 2$; $l > 0$, $x > 0$; c_1, c_2 sont deux constantes absolues).

D'après (14), (16), on voit aisément que la série dans (13) est absolument convergente; donc, en groupant ensemble les termes avec la même valeur de $a^2 + b^2$, on obtient l'identité

$$\int_0^x A(y)\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}\pi x^2 + \frac{x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(n)}{n} I_2(2\pi\sqrt{nx}), \tag{17}$$

$$= \sum_{a=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \cos 2a\pi u \,\mathrm{d}u;$$

en appliquant deux fois cette formule à la fonction $f(u, v)$, on obtient la formule (12) pour x non entier; pour x entier, on obtient une formule modifiée; cette modification est causée par la discontinuité de la fonction $f(u, v)$; voir Landau 5.

où $U(n)$ signifie le nombre des représentations de n en somme de deux carrés.

En différentiant l'identité (17) d'une façon formelle, on parviendrait [voir (15)], pour x non entier, à l'identité

$$A(x) = \pi x + \sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U(n)}{\sqrt{n}}\, I_1(2\pi\sqrt{nx});$$

cette identité est, en effet, vraie [même dans le cas où x est un nombre entier, à condition que l'on remplace $A(x)$ par $A(x) - \frac{1}{2}U(x)$]; c'est une identité célèbre de M. Hardy.[10]) Mais, pour notre but, cette identité présente les mêmes inconvénients que l'identité (12); c'est pourquoi on fait le mieux en s'arrêtant à la moitié de la route: au lieu de prendre la dérivée, on ne prend qu'une différence finie. Soit donc $0 < \alpha < 1$ (on va fixer la valeur de α plus tard) et supposons $x > 1$; on a alors d'après (17)

$$\int_x^{x \pm x^\alpha} A(y)\,dy = \pm\,\pi x^{1+a} + \tfrac{1}{2}\pi x^{2a} + \\ + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U(n)}{n}\Big\{y\, I_2(2\pi\sqrt{ny})\Big\}_{y=x}^{y=x\pm x^\alpha}. \tag{18}$$

On a, d'après la formule d'accroissements finis, d'après (15) et (16) ($\beta > 0$ va être fixé plus tard)

$$\frac{1}{\pi}\sum_{1\leqq n\leqq x^\beta}\frac{U(n)}{n}\Big\{y\, I_2(2\pi\sqrt{ny})\Big\}_{y=x}^{y=x\pm x^\alpha} = \pm\, x^a \sum_{1\leqq n\leqq x^\beta}\frac{U(n)}{\sqrt{n}}\sqrt{\xi}\; I_1(2\pi\sqrt{n\xi}) \\ = \pm\, x^a c_3 \xi^{\frac14}\sum_{1\leqq n\leqq x^\beta}\frac{U(n)}{n^{\frac34}}\cos\left(2\pi\sqrt{n\xi} - \tfrac{3}{4}\pi\right) + O(x^{\alpha-\frac14}),^{11)} \tag{19}$$

où $c_3 = c_1/\sqrt{2\pi}$, ξ est situé entre x et $x \pm x^a$. D'autre part, selon (16), on a

---

[10]) La démonstration rigoureuse de cette identité est assez difficile; voir Landau 1, p. 221—232, où l'on trouve des résultats encore plus précis.

[11]) Ici et dans la suite nous avons besoin des formules suivantes:

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{U(n)}{n^\lambda} = O(m^{1-\lambda}) \text{ pour } 0 < \lambda < 1,\quad \sum_{n=m}^{\infty}\frac{U(n)}{n^\lambda} = O(m^{1-\lambda}) \text{ pour } \lambda > 1.$$

On les obtient aussitôt à l'aide de la „sommation partielle", en remarquant que

$$\sum_{n=0}^{m} U(n) = A(m) = O(m).$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\sum_{n>x^\beta}\frac{U(n)}{n}\Big\{y\, I_2(2\pi\sqrt{ny})\Big\}_{y=x}^{y=x\pm x^\alpha} = \\ &= \frac{c_3}{\pi}\Big\{\sum_{n>x^\beta}\frac{U(n)}{n^{\frac54}}\, y^{\frac34}\cos\left(2\pi\sqrt{ny}-\tfrac54\pi\right)\Big\}_{y=x}^{y=x\pm x^\alpha} + O(x^{\frac14-\frac34\beta}). \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

En remplaçant $\cos\lambda$ par 1, on obtient

$$\xi^{\frac14}\sum_{1\leq n\leq x^\beta}\frac{U(n)}{n^{\frac34}}\cos\left(2\pi\sqrt{n\xi}-\tfrac34\pi\right) = O(x^{\frac14}\,.\,x^{\frac14\beta}); \quad (21)$$

de même, pour $y = x$ et pour $y = x \pm x^\alpha$, on a

$$\sum_{n>x^\beta}\frac{U(n)}{n^{\frac54}}\, y^{\frac34}\cos\left(2\pi\sqrt{ny}-\tfrac54\pi\right) = O(x^{\frac34-\frac14\beta}); \quad (22)$$

on a donc d'après (18), (19), (20), (21), (22)

$$\int_x^{x\pm x^\alpha} A(y)\,dy = \pm\,\pi x^{1+\alpha} + O(x^{2\alpha}) + O(x^{\alpha+\frac14+\frac14\beta}) + O(x^{\frac34-\frac14\beta});$$

la valeur la plus favorable de β est celle pour laquelle

$$\alpha + \tfrac14 + \tfrac14\beta = \tfrac34 - \tfrac14\beta,$$

c'est-à-dire

$$\beta = 1 - 2\alpha;\text{[12]}$$

alors on a

$$\int_x^{x\pm x^\alpha} A(y)\,dy = \pm\,\pi x^{1+\alpha} + O(x^{2\alpha}) + O(x^{\frac12+\frac12\alpha}).$$

En remarquant que $A(y)$ est une fonction non décroissante de y, on obtient

$$\pi x + O(x^\alpha) + O(x^{\frac12-\frac12\alpha}) = x^{-\alpha}\int_{x-x^\alpha}^{x} A(y)\,dy \leq$$

$$\leq A(x) \leq x^{-\alpha}\int_x^{x+x^\alpha} A(y)\,dy = \pi x + O(x^\alpha) + O(x^{\frac12-\frac12\alpha}),$$

donc

$$A(x) = \pi x + O(x^\alpha + x^{\frac12-\frac12\alpha}).$$

La valeur la plus avantageuse de α est celle pour laquelle

$$\alpha = \tfrac12 - \tfrac12\alpha,$$

c'est-à-dire $\alpha = \frac13$, d'où la formule cherchée

$$A(x) = \pi x + O(x^{\frac13}).$$

[12]) Nous avons supposé $\beta > 0$; supposons donc $\alpha < \frac12$; on pourrait constater aisément que les valeurs $\alpha \geqq \frac12$ conduiraient à des résultats moins favorables.

Nous avons ainsi démontré la formule (6). Mais comment parvenir à la formule (10)?

Toutes les évaluations effectuées au cours de la démonstration ont été faites avec le plus grand soin possible, avec une exception unique: dans les formules (21) et (22), nous avons employé l'évaluation primitive $|\cos \lambda| \leqq 1$. Mais la fonction $\cos \lambda$ étant capable de même de valeurs positives que de valeurs négatives, on peut s'attendre que, dans la somme (21), les termes positifs d'une part et les termes négatifs d'autre part se détruisent à peu près, ce qui abaisserait considérablement l'ordre de grandeur de cette somme; et de même pour la série (22). Et, en effet, en suivant cette idée d'une manière plus précise, on obtient une démonstration de (10). Mais les considérations nécessaires pour une telle démonstration sont trop compliquées pour pouvoir être expliquées ici. Remarquons seulement que toutes les démonstrations connues d'une relation de la forme

$$\mathsf{P}(x) = O(x^{\vartheta}),$$

où ϑ est plus petit que $\frac{1}{3}$, reposent sur une idée très féconde de M. Weyl, appartenant à la théorie des approximations diophantiques (plus précisément à la théorie de la „Gleichverteilung der Zahlen modulo Eins"; voir Weyl 1) et dont une application importante à la théorie analytique des nombres (à savoir à une évaluation de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann) a été donnée par M. Weyl lui-même (Weyl 2).

§ 2. Problèmes dans plusieurs dimensions ($k > 2$).

1. Nous avons discuté jusqu'ici principalement le problème du cercle

$$u^2 + v^2 = x. \tag{23}$$

On peut généraliser ce problème pour $k > 2$ dans deux directions: d'une part, au lieu du cercle (23) on peut considérer une sphère à k dimensions

$$\sum_{i=1}^{k} u_i^2 = x \quad (k \geqq 2); \tag{24}$$

d'autre part, au lieu de la somme de carrés, on peut prendre une forme quadratique, définie et positive

$$Q = Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \sum_{\mu,\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \quad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}); \tag{25}$$

c'est-à-dire, au lieu de la sphère (24), on peut considérer l'ellipsoïde à k dimensions

$$Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) = x. \tag{26}$$

Considérons ce problème généralisé. Soit donc $k \geqq 2$ et soit donnée une forme quadratique (25). Soit $A_Q(x)$ le nombre des points à coordonnées entières à l'intérieur ou sur la surface de l'ellipsoïde (26); soit $V_Q(x)$ le volume de cet ellipsoïde (évidemment $V_Q(x) = cx^{\frac{1}{2}k}$, où $c > 0$ ne dépend pas de x). Soit enfin

$$A_Q(x) = V_Q(x) + \mathsf{P}_Q(x).$$

Par une méthode, applicable à toutes les valeurs $k \geqq 2$, M. Landau a démontré les formules

$$\mathsf{P}_Q(x) = O(x^{\frac{1}{2}k-1+(k+1)^{-1}}) \quad \text{(Landau 3)}, \tag{27}$$

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega(x^{\frac{1}{4}(k-1)}) \quad \text{(Landau 4)}. \tag{28}$$

Définissons encore le nombre f_Q — d'une manière analogue comme dans le cas du cercle — comme la borne inférieure de tous les nombres réels ϑ pour lesquels la relation

$$\mathsf{P}_Q(x) = O(x^\vartheta)$$

est vraie. De (27), (28), il s'ensuit

$$\tfrac{1}{4}(k-1) \leqq f_Q \leqq \tfrac{1}{2}k - 1 + \frac{1}{k+1}. \tag{29}$$

Les formules (27), (28) constituent une généralisation directe des formules (6), (7); en effet, en posant $k = 2$ dans (27) et (28), on retrouve les exposants $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$.

Au contraire, nous allons parler dans un moment aussi des résultats, valables pour les grandes valeurs de k, qui n'ont rien d'analogue dans le cas $k = 2$. Mais, tout d'abord, il faut faire une distinction importante.

S'il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que tous les coefficients de la forme $\alpha\, Q(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ soient des nombres entiers, nous allons dire que $Q(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ est une forme rationnelle; dans le cas contraire, nous allons dire que $Q(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ est une forme irrationnelle.[13])

2. Pour les formes rationnelles on doit aux MM. Landau et Walfisz (1924) un théorème très important[14]):

Théorème 1[er]. Soit $k > 4$; soit Q une forme rationnelle;

[13]) C'est une dénomination assez naturelle; car, si Q est rationnel, multiplions (26) par α; on obtient l'équation

$$\alpha Q = \alpha x;$$

en introduisant $\alpha x = y$ comme un paramètre nouveau (au lieu de x), on voit que l'étude d'une forme rationnelle Q se ramène à celle d'une forme αQ, dont tous les coefficients sont des nombres entiers.

[14]) Il est à remarquer que M. Petersson **1** (1927) a aussi démontré le théorème 1[er], indépendemment des MM. Landau et Walfisz.

alors on a

$$\mathsf{P}_Q(x) = O(x^{\frac{1}{2}k-1}) \quad \text{(Walfisz 1, Landau 6).} \qquad (30)$$

C'est une amélioration de la formule (27) (bien entendu pour $k > 4$ et pour les formes rationnelles), car $\frac{1}{2}k - 1 < \frac{1}{2}k - 1 + (k + 1)^{-1}$. Mais c'est plus qu'une simple amélioration; c'est la solution définitive de notre problème dans ce cas; car, d'autre part, on démontre aisément le théorème à peu près évident qui suit:

Théorème 2e. Sous les conditions du théorème 1er, on a

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega(x^{\frac{1}{2}k-1}) \quad \text{(Jarník dans Landau 7).} \qquad (31)$$

De (30), (31) on tire tout de suite

$$f_Q = \tfrac{1}{2}k - 1 \qquad (k > 4,\ Q \text{ rationnel}). \qquad (32)$$

Les théorèmes 1, 2 nous donnent évidemment la solution définitive du „O — Ω - problème" pour $k > 4$, si Q est rationnel; au contraire, ce problème est beaucoup loin d'être résolu pour $k = 2$, même dans le cas particulier de la forme rationnelle $Q(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2$, comme nous l'avons vu dans le § 1.

Du reste, la formule (32), valable pour $k > 4$, est décidemment en défaut pour $k = 2$, car, en y posant $k = 2$, on obtiendrait p. ex. pour le problème du cercle $f = 0$, tandis que nous savons déjà que $f \geq \frac{1}{4}$ [voir (11)].

On voit donc que les lois si simples qui sont valables pour $k > 4$ sont complètement différentes des lois jusqu'ici inconnues, qui sont valables pour $k = 2$.

§ 3. La méthode qui a servi aux MM. Walfisz et Landau pour démontrer l'équation (30), est complètement différente des méthodes qui sont applicables pour $k = 2$. Elle consiste dans une adaptation ingénieuse d'une méthode célèbre que MM. Hardy et Littlewood ont créée pour résoudre quelques autres problèmes de la théorie des nombres.

Soit donc $k > 4$ et soit $Q(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ une forme rationnelle; supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, que les coefficients de Q sont des nombres entiers (voir la note[13]); soit $|z| < 1$ et considérons la fonction

$$\varphi(z) = \sum_{m_1, \ldots, m_k = -\infty}^{\infty} z^{Q(m_1, \ldots, m_k)}. \qquad (33)$$

En rearrangeant cette série dans la forme d'une série entière, on obtient

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Soit maintenant $x > 0$ et considérons la somme

$$\sum_{n \leqq x} a_n;$$

cette somme est évidemment égale au nombre des exposants $Q(m_1, \ldots, m_k)$ dans (33), qui sont $\leqq x$; donc

$$A_Q(x) = \sum_{n \leqq x} a_n. \tag{34}$$

D'après la formule de Cauchy, on a donc

$$A_Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(z) \sum_{n \leqq x} \frac{1}{z^{n+1}} \, dz, \tag{35}$$

où le chemin d'intégration C peut être p. ex. un cercle $|z| = r$ $(0 < r < 1)$ quelconque, pris dans le sens positif. Remarquons que tous les points de la circonférence $|z| = 1$ sont des points singuliers de $\varphi(z)$; la théorie de la transformation des fonctions théta nous fournit un moyen d'évaluer $\varphi(z)$ avec une précision suffisante pour notre but, si le rayon r du cercle d'intégration tend — pour $x \to \infty$ — vers l'unité avec une vitesse convenable; MM. Walfisz et Landau posent $r = e^{-\pi/x}$. Ensuite, la théorie de la transformation des fonctions théta nous permet — comme nous l'avons déjà annoncé — de remplacer $\varphi(z) \sum_{n \leqq x} z^{-n-1}$ par une fonction plus simple $f(z)$ avec une telle précision que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(z) \sum_{n \leqq x} \frac{1}{z^{n+1}} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \, dz + O(x^{\frac{1}{4}k} \log x); \tag{36}$$

c'est une précision abondante, car $\frac{1}{4}k < \frac{1}{2}k - 1$. Une étude de l'intégrale $\int_C f(z) \, dz$ fournit l'équation (30). Mais la formule (36) nous fournit encore plus que la relation

$$\mathsf{P}_Q(x) = O(x^{\frac{1}{2}k-1});$$

elle donne, pour les grandes valeurs de x, une représentation commode de la partie *prépondérante* de la fonction $\mathsf{P}_Q(x)$ de sorte que l'on peut en tirer des conséquences plus précises sur l'allure de cette fonction.[15] Par exemple, pour ne citer qu'un seul résultat de ce genre, on peut démontrer, que la suite

$$n^{-\frac{1}{2}k+1} \, \mathsf{P}_Q(n) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

[15]) C'est à M. Petersson 1 et à M. Walfisz 3 que l'on doit les premières applications de ce genre.

qui est bornée d'après (30), n'est pas convergente, au contraire, qu'elle possède une infinité de points limites [Jarník **5** (1930)].

4. Le „O — Ω-problème“ étant complètement résolu pour les formes rationnelles (si $k > 4$), il est assez naturel de se poser la question: comment se comportent les formes irrationnelles? Remarquons que la plupart des résultats, concernant les formes Q irrationnelles, n'a pas été démontrée jusqu'à présent que pour les Q de la forme suivante[16]:

$$Q = Q(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i^2,$$

où les α_i sont des nombres positifs, d'ailleurs quelconques; les formes Q de ce genre seront appelées dans la suite „formes diagonales“.

Soit $k > 4$; si une forme diagonale est rationnelle, on a évidemment (30), (31). Mais, au contraire, pour les formes irrationnelles, on a le théorème suivant:

Théorème 3^e. Soit $k > 4$; soit Q une forme diagonale irrationnelle; alors on a

$$\mathsf{P}_Q(x) = o(x^{\frac{1}{2}k-1}) \quad \text{[Jarník } \mathbf{3} \text{ (1929), Jarník et Walfisz } \mathbf{1} \text{ (1930)].} \tag{37}$$

En comparant les formules (31), (37), on voit une différence essentielle entre les formes rationnelles et les formes irrationnelles (en se souvenant que „Ω“ est la négation logique de „o“).[17]

Mais la formule (37) ne constitue qu'un premier pas dans l'étude des ellipsoïdes irrationnels. Elle exprime que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\mathsf{P}_Q(x)}{x^{\frac{1}{2}k-1}} = 0.$$

On sait, d'une part, que cette convergence vers zéro peut être extrêmement lente, si l'on choisit les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ de la forme Q d'une manière convenable; mais, au contraire, on sait que pour „la plupart“ des formes irrationnelles cette convergence est assez rapide.

D'une manière plus précise, on a les deux théorèmes suivants:

Théorème 4^e. Soit $k > 4$; soit $\varphi(x)$ une fonction qui est positive pour x assez grand; soit $\varphi(x) \to 0$ pour $x \to \infty$. Alors il existe une forme irrationnelle

[16]) On pourrait, sans doute, généraliser ces résultats à des formes Q un peu plus générales, mais cela paraît être sans grande importance, les formes *le plus générales* étant inaccessibles jusqu'à présent par ces méthodes.

[17]) C'est à M. Walfisz (**5**, 1927) que l'on doit le premier résultat qui montre la différence essentielle entre les formes rationnelles d'une part et les formes irrationnelles d'autre part.

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i^2 \quad (\alpha_i > 0)$$

telle que

$$P_Q(x) = \Omega(x^{\frac{1}{2}k-1}\,\varphi(x)) \quad \text{[Walfisz 5 (1927)]}.$$

Théorème 5^e. Soit $k > 4$; considérons toutes les formes

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i^2 \quad (\alpha_i > 0); \tag{38}$$

alors, pour presque tous les systèmes $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ on a

$$f_Q \leq \tfrac{1}{4}k \text{ [18]} \quad \text{[Jarník 2 (1928)]}.$$

C'est dans la démonstration du théorème 5^e que la théorie des ensembles — et surtout la théorie de la mesure lebesguienne — commence à jouer un rôle important. Citons encore une conséquence directe de ces théorèmes: soit $k > 4$; alors on a pour chaque forme diagonale Q les inégalités

$$\tfrac{1}{4}(k-1) \leq f_Q \leq \tfrac{1}{2}k - 1 \tag{39}$$

(voir (28) et le théorème 1er et 3^e); pour les formes rationnelles et même pour quelques formes irrationnelles on a

$$f_Q = \tfrac{1}{2}k - 1; \text{[19]}$$

mais, pour presque toutes les formes diagonales on a

$$\tfrac{1}{4}(k-1) \leq f_Q \leq \tfrac{1}{4}k; \text{[20]} \tag{40}$$

donc le cas $f_Q = \frac{1}{2}k - 1$ doit être regardé comme un cas exceptionnel.

5. La formule (40) donne, pour *presque toutes* les formes diagonales, un intervalle assez restreint pour le nombre f_Q (en comparaison avec la formule (39), valable pour *toutes* les formes diagonales); mais, tout de même, elle ne donne aucun résultat définitif. Pour obtenir des résultats définitifs, il faut encore spécialiser la forme Q. Supposons donc que les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ de la forme diagonale Q se partagent en groupes de coefficients

[18]) C'est-à-dire: il existe, dans l'espace à k dimensions, un ensemble M de mesure nulle jouissant de la propriété suivante: si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ est un point qui n'appartient pas à M et si $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_k > 0$, alors la forme $Q = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i^2$ satisfait à la condition $f_Q \leq \frac{1}{4}k$; dans la suite, on doit toujours comprendre l'expression „presque tous" dans un sens analogue.

[19]) Pour les formes rationnelles, on le voit d'après (31); pour les formes irrationnelles, on le voit en posant par exemple $\varphi(x) = (\log x)^{-1}$ dans le théorème 4^e.

[20]) Remarquons que $\frac{1}{4}k < \frac{1}{2}k - 1$.

égaux, chaque groupe étant composée de quatre membres au moins. C'est-à-dire, supposons que Q a la forme suivante:

$$Q = \beta_1 (u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{k_1}^2) + \beta_2 (u^2_{k_1+1} + u^2_{k_1+2} + \ldots$$
$$\ldots + u^2_{k_1+k_2}) + \ldots + \beta_\sigma (u^2_{k_1+\ldots+k_{\sigma-1}+1} + \ldots + u^2_{k_1+k_2+\ldots+k_\sigma}), \tag{41}$$

où

$$\sigma \geqq 2,\ k_i \geqq 4\ (i = 1, 2, \ldots, \sigma),\ \beta_i > 0\ (i = 1, 2, \ldots, \sigma);$$

alors on a le théorème suivant:

Théorème 6^e. Soit $\sigma \geqq 2$, $k_i \geqq 4$ ($i = 1, 2, \ldots, \sigma$; les nombres σ et k_i sont des nombres entiers);

$$k = k_1 + k_2 + \ldots + k_\sigma \quad (\text{donc } k \geqq 8).$$

Considérons toutes les formes Q, données par (41), où les β_i sont des nombres positifs quelconques; alors on a les résultats suivants:

I. Pour chaque forme (41), on a

$$\tfrac{1}{2}k - \sigma \leqq f_Q \leqq \tfrac{1}{2}k - 1 \quad [\text{Jarník } \mathbf{2}\ (1928)].$$

II. λ étant un nombre quelconque de l'intervalle $\frac{1}{2}k - \sigma \leqq \lambda \leqq \frac{1}{2}k - 1$, il existe une forme (41) telle que

$$f_Q = \lambda \quad (\text{Jarník } \mathbf{10}\ (1934)].$$

III. Pour presque tous les systèmes $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ on a

$$f_Q = \tfrac{1}{2}k - \sigma \quad [\text{Jarník } \mathbf{2}\ (1928)].$$

La démonstration de II et de III est basée sur la théorie de la mesure; mais, d'après III, l'ensemble de tous les systèmes $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$, pour lesquels on a $f_Q > \frac{1}{2}k - \sigma$, a la mesure lebesguienne nulle. Donc, pour démontrer II, il faut avoir recours à une généralisation de la mesure lebesguienne qui permettrait encore de classifier les ensembles de mesure lebesguienne nulle; une telle théorie de la mesure, qui permet de démontrer l'assertion II, a été donnée par M. Hausdorff (**1**).

6. Le théorème 6^e montre clairement l'influence essentielle de la nature arithmétique des coefficients de la forme Q sur la valeur de f_Q; il est donc assez naturel de se poser la question suivante: quelles sont les propriétés arithmétiques simples de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma$ qui suffisent à déterminer le nombre f_Q? Cette question peut être résolue, en effet, dans le cas particulier où $\sigma = 2$. Considérons donc une forme Q de la nature spéciale suivante:

$$\left.\begin{aligned} Q = \beta_1 (u_1^2 + \ldots + u_{k_1}^2) + \beta_2 (u^2_{k_1+1} + \ldots + u^2_{k_1+k_2}) \\ (\beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0,\ k_1 \geqq 4,\ k_2 \geqq 4,\ k_1 + k_2 = k). \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

On sait d'après Dirichlet qu'il existe une suite (p_n, q_n) de couples des nombres entiers telle que

$$p_n \to \infty, \quad q_n \to \infty, \quad \left| \frac{\beta_2}{\beta_1} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{\,2}}.$$

Pour quelques valeurs de β_1, β_2 il est permis de remplacer le dernier dénominateur q_n^2 par q_n^{2+a}, où a est un nombre positif. Définissons le nombre

$$\gamma = \gamma\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)$$

de la manière suivante: γ est la borne supérieure de tous les nombres réels a qui jouissent de la propriété suivante: il existe une suite (p_n, q_n) de couples des nombres entiers telle que

$$p_n \to \infty, \quad q_n \to \infty, \quad \left| \frac{\beta_2}{\beta_1} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{\,2+a}}.$$

On a évidemment $0 \leqq \gamma \leqq \infty$; si β_2/β_1 est un nombre rationnel, on a $\gamma = \infty$; si β_2/β_1 est un nombre algébrique du deuxième degré, on sait que $\gamma = 0$. Le nombre γ caractérise une propriété très simple du nombre β_2/β_1: il donne le degré d'approximation du nombre β_2/β_1 à l'aide des nombres rationnels; du reste, γ peut être déterminé tout de suite, si l'on connaît d'une manière assez précise le dévéloppement en fraction continue régulière du nombre β_2/β_1. Et notre question est résolue par le théorème suivant:

Théorème 7[e]. Q soit donné par (42); en définissant γ comme plus haut, on a

$$f_Q = \tfrac{1}{2}k - 1 - \frac{1}{\gamma + 1}$$ [21]) [Jarník 4 (1929)].

7. Comment peut-on démontrer les résultats dont nous avons parlé, concernant les ellipsoïdes irrationnels? Et comment se manifeste la différence entre le cas rationnel et le cas irrationnel pendant la démonstration? Nous en allons dire quelques mots — mais seulement d'une manière approximative. Soit donc

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i^2 \quad (\alpha_i > 0).$$

Si l'on voulait former la fonction $\varphi(z)$ [voir (33)], on obtiendrait — en général — des exposants non entiers, Q pouvant être une forme irrationnelle. C'est pourquoi on prend e^{-s} au lieu de z et l'on obtient la fonction suivante

$$\sum_{m_1,\ldots,m_k=-\infty}^{\infty} e^{-s\,Q(m_1,\ldots,m_k)} = \Theta(\alpha_1 s)\,\Theta(\alpha_2 s)\ldots\Theta(\alpha_k s), \tag{43}$$

[21]) Ici, on doit poser $1/(\gamma + 1) = 0$, si $\gamma = \infty$.

où

$$\Theta(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 s}. \tag{44}$$

Posons $s = \sigma + it$ (σ, t réel); les fonctions (43), (44) sont régulières pour $\sigma > 0$ et la droite $\sigma = 0$ joue un rôle analogue comme le cercle $|z| = 1$ dans la section 3. D'une manière analogue comme dans la section 3, on a ici la formule

$$A_Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/x - i\infty}^{1/x + i\infty} \prod_{j=1}^{k} \Theta(\alpha_j s) \frac{e^{xs}}{s}\, ds,$$

valable pour chaque $x > 0$, à l'exception d'un ensemble dénombrable de valeurs x. L'intégrale entre les limites $-x^{-\frac{1}{2}}$, $x^{-\frac{1}{2}}$ donne à peu près le terme principal $V_Q(x)$; reste à examiner l'intégrale

$$I = \int_{1/x + i/\sqrt{x}}^{1/x + i\infty} \prod_{j=1}^{k} \Theta(\alpha_j s) \frac{e^{xs}}{s}\, ds \tag{45}$$

(et une intégrale analogue, dont la valeur est le nombre conjugué à I). Remarquons que $s = x^{-1} + ti$ (t réel). La théorie de la transformation des fonctions théta nous permet de trouver une fonction simple $f(t)$ (qui dépend aussi de x) telle que l'on ait

$$\left| \Theta\left(\frac{\mu}{x} + it\right) \right| < f(t)$$

pour chaque μ tel que $\mathrm{Min}\, \alpha_j \leqq \mu \leqq \mathrm{Max}\, \alpha_j$.

Les maxima relatifs de $f(t)$ sont situés aux points t de la forme

$$\frac{t}{2\pi} = \frac{p}{q} \quad (p \text{ entier, } q \text{ entier, } p > 0,\ 0 < q \leqq \sqrt{x}).$$

On a donc pour $s = x^{-1} + it$

$$\left| \prod_{j=1}^{k} \Theta(\alpha_j s) \right| < \prod_{j=1}^{k} f(\alpha_j t) \tag{46}$$

et les maxima relatifs de $f(\alpha_j t)$ sont situés aux points t tels que

$$\frac{t}{2\pi} = \frac{1}{\alpha_j} \frac{p}{q} \quad (p \text{ entier, } q \text{ entier, } p > 0,\ 0 < q \leqq \sqrt{x}). \tag{47}$$

D'après (47) on voit: si Q est rationnel (p. ex. si l'on a $\alpha_j = 1$ pour chaque j), il peut se faire que, pour une valeur de t, tous les facteurs $f(\alpha_j t)$ prennent une valeur maximum; au contraire, si Q est irrationnel, p. ex. si α_2/α_1 est irrationnel, une valeur de t ne peut pas fournir un maximum de $f(\alpha_1 t)$ et en même temps aussi un maximum de $f(\alpha_2 t)$, comme on le voit d'après (47). Il est donc assez probable [voir (45), (46)] que l'on obtienne, à l'aide de la fonction $f(t)$, dans le cas irrationnel une évaluation plus favorable de I que dans le cas rationnel.

Je répète que les remarques de cette section sont assez incomplètes; par exemple, il est toujours plus commode et quelquefois même indispensable de prendre pour le point de départ non la fonction $A_Q(x)$ elle-même, mais son intégrale (comme nous l'avons fait déjà dans le § 2, section 5 dans le problème du cercle).

8. Nous avons parlé, dans ce §, surtout du cas $k > 4$. Reste à dire quelques mots sur les deux cas $k = 3$ et $k = 4$. Le cas $k = 3$ est analogue au cas $k = 2$; des formules (27), (28) on tire, pour $k = 3$,

$$\mathsf{P}_Q(x) = O(x^{\frac{3}{4}}), \quad \mathsf{P}_Q(x) = \Omega(x^{\frac{1}{2}});$$

on connaît encore quelques résultats plus précis, correspondant aux formules (8), (10) (Szegö **1**, Walfisz **2**).

Le cas $k = 4$ mérite un intérêt particulier. La méthode, expliquée dans la section **3** de ce §, est applicable même pour $k = 4$ et fournit le théorème suivant [Landau **6** (1924)]:

Théorème 8[e]. Soit $k = 4$, Q rationnel; alors on a

$$\mathsf{P}_Q(x) = O(x \log^2 x), \quad \mathsf{P}_Q(x) = \Omega(x).$$

En remarquant que $\frac{1}{2}k - 1 = 1$, on voit que le théorème 8 est moins précis que les théorèmes 1,2 (où $k > 4$)[22]; tout de même, il fournit la valeur précise de f_Q, à savoir $f_Q = 1$. On ne peut pas supprimer complètement le facteur $\log^2 x$ dans le théorème 8; en effet, si Q est la forme „sphérique", c'est-à-dire

$$Q = \sum_{i=1}^{4} u_i^2, \tag{48}$$

on a

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega(x \log \log x) \quad \text{(Walfisz 4)}.$$

[22]) On peut s'expliquer cette circonstance comme il suit: p. ex. à la fin de la démonstration du théorème 1, on doit effectuer la sommation suivante:

$$\sum_{2 \leq q \leq \sqrt{x}} q^{-\frac{1}{2}k+1} \log q.$$

Cette somme est $O(1)$ pour $k > 4$, mais elle est $O(\log^2 x)$ pour $k = 4$; pour $k < 4$ le résultat est déjà trop défavorable; du reste, c'est aussi le terme $O(x^{\frac{1}{4}k} \log x)$ dans (36), qui devient désagréable pour $k \leq 4$. C'est pourquoi le cas $k = 4$ doit être regardé comme un cas limite de l'applicabilité de cette méthode.

Mais on peut au moins abaisser ce facteur $\log^2 x$; en effet, on a le théorème suivant:

Théorème 9[e]. Soit $k = 4$, Q rationnel; alors on a

$$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x\frac{\log x}{\log\log x}\right) \quad \text{[Walfisz 6 (1932)].}$$

La démonstration de ce théorème est assez compliquée; elle repose sur la théorie des „elliptische Modulformen", créée par M. Hecke et poursuivie par ses élèves, p. ex. MM. Estermann et Kloosterman.

Remarquons enfin que, pour la forme (48), M. Landau (2) a déjà en 1912 dévéloppé une méthode spéciale très simple (mais qui ne s'applique pas dans le cas général) qui fournit

$$\mathsf{P}_Q(x) = O(x\log x) \text{ pour } Q = \sum_{i=1}^{4} u_i^2.$$

§ 3. Valeurs moyennes.

1. Malgré le grand nombre de résultats que nous avons indiqués dans le § 1 et surtout dans le § 2, le mystère de la fonction $\mathsf{P}_Q(x)$ n'est pas encore complètement dévélé. Par exemple: A) on ne connaît pas la valeur précise de f (c'est-à-dire de f_Q pour $Q = u_1^2 + u_2^2$). B) on sait que le nombre f_Q peut dépendre de la nature arithmétique des coefficients de la forme Q, mais on ne connaît pas la loi de cette dépendance que dans un cas particulier, à savoir dans le cas d'une forme Q telle que (42). C) Pour les formes rationnelles on a $f_Q = \frac{1}{2}k - 1$ pour $k > 4$, mais $f_Q \geqq \frac{1}{4} > \frac{2}{2} - 1$ pour $k = 2$ [voir (29)] — pourquoi cette discrépance?

Mais, tout de même, on voudrait se procurer plus de clarté dans ce labyrinthe; et, pour ce but, il est utile de modifier un peu le problème pour le rendre mieux accessible. Comme dans beaucoup de problèmes analogues, on parvient à des résultats plus précis en considérant, au lieu de la fonction $\mathsf{P}_Q(x)$, une certaine valeur moyenne de cette fonction. En suivant cette idée, posons

$$S_Q(x) = \sqrt{\frac{1}{x}\int_0^x \mathsf{P}^2{}_Q(y)\,\mathrm{d}y};$$

c'est une certaine valeur moyenne de $\mathsf{P}_Q(x)$.

2. Commençons par quelques cas particuliers. Le problème des valeurs moyennes pour le cercle est lié aux travaux des MM. Hardy, Cramér, Landau, Walfisz (1916—1927); on a, dans ce cas particulier, le théorème très précis que voici:

pour $Q = u_1^2 + u_2^2$, on a $\int_0^x \mathsf{P}^2_Q(y)\,dy = cx^{\frac{3}{2}} + O(x \log^3 x)$,[23])

où c est une constante positive; donc

$$\lim_{x=\infty} \frac{S_Q(x)}{x^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{c}.$$

D'autre part: Si $k > 4$ et si Q est rationnel, on a (c' étant une constante positive)

$$\lim_{x=\infty} \frac{S_Q(x)}{x^{\frac{1}{2}k-1}} = c' \quad \text{[Jarník 6 (1930)].[24])} \tag{49}$$

Si $k = 4$ et si Q est rationnel et diagonal, on a au moins [Jarník 7 (1931)]

$$0 < \lim\inf \frac{S_Q(x)}{x} \leqq \lim\sup \frac{S_Q(x)}{x} < \infty.$$

Ce sont des résultats très précis: dans ces trois cas, la fonction $S_Q(x)$ se comporte, pour les grandes valeurs de x, presque comme une puissance de x.

3. Passons à un problème un peu plus général, où peuvent apparaître les formes irrationnelles. La forme Q soit donnée par (42) (voir § 2, section 6; donc $k \geqq 8$); alors on a le résultat suivant:

I. Si β_2/β_1 est un nombre rationnel, on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log S_Q(x)}{\log x} = \tfrac{1}{2}k - 1$$

[c'est une conséquence de (49)];

II. Si $\gamma(\beta_2/\beta_1) = 0$, on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log S_Q(x)}{\log x} = \tfrac{1}{2}k - 2;$$

III. Dans tous les autres cas, on a

$$\tfrac{1}{2}k - 2 \leqq \lim_{x=\infty}\inf \frac{\log S_Q(x)}{\log x} < \lim_{x=\infty}\sup \frac{\log S_Q(x)}{\log x} \leqq \tfrac{1}{2}k - 1.$$

Donc: dans les cas I, II, l'allure de $S_Q(x)$ est assez régulière — elle est semblable à celle de la fonction $x^{\frac{1}{2}k-1}$ resp. $x^{\frac{1}{2}k-2}$; au contraire, dans le cas III, l'allure de $S_Q(x)$ est assez irrégulière, si l'on veut la comparer avec celle d'une puissance de x.[25])

[23]) Walfisz 4; dans Landau 1, p. 250—263, on peut lire la démonstration d'un théorème un peu moins précis.

[24]) On y trouve des résultats beaucoup plus précis.

[25]) Voir Jarník 9 (1933), où l'on trouve encore des résultats beaucoup plus précis.

4. Les succès, mentionnés dans les sections 2, 3, nous encouragent d'attaquer le problème général des valeurs moyennes, au moins pour les formes diagonales. Définissons g_Q de la manière suivante: g_Q est la borne inférieure de tous les nombres réels ϑ tels que

$$S_Q(x) = O(x^\vartheta).$$

[Donc, g_Q a pour $S_Q(x)$ la même signification que f_Q pour $\mathsf{P}_Q(x)$; évidemment, on a

$$g_Q = \limsup_{x=\infty} \frac{\log S_Q(x)}{\log x}].$$

On a alors le théorème suivant qui fournit une information assez complète sur les valeurs possibles de g_Q:

Théorème 10e.[26]) Soit $k \geqq 1$ et considérons toutes les formes diagonales

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i^2 \quad (\alpha_i > 0).$$

I. Si $k \leqq 3$, on a

$$g_Q = \tfrac{1}{4}(k-1)$$

(c'est-à-dire 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ pour $k = 1, 2, 3$).

II. Si $k \geqq 4$, on a

$$\tfrac{1}{4}(k-1) \leqq g_Q \leqq \tfrac{1}{2}k - 1;$$

pour toutes les formes Q rationnelles et même pour quelques formes irrationnelles, on a $g_Q = \frac{1}{2}k - 1$; au contraire, pour presque tous les systèmes $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, on a $g_Q = \frac{1}{4}(k-1)$.

Nous avons donc déterminé la valeur précise de g_Q pour $k \leqq 3$ et les limites précises de g_Q pour $k \geqq 4$. On voit aussi que, pour $k \leqq 3$, le nombre g_Q est le même pour toutes les formes diagonales, tandis que, pour $k \geqq 4$, il dépend essentiellement des coefficients de la forme Q.

5. Je vais terminer par ce résultat assez intuitif. Il serait possible de dire encore beaucoup de choses; mais peut-être cette revue pas trop complète vous a montré la largeur de notre problème en apparence si spécial et la variété inattendue des résultats et des méthodes de démonstration. Vous avez aussi remarqué peut-être que, malgré un grand nombre de résultats démontrés jusqu'à présent et dont le nombre sera encore augmenté sans doute dans l'avenir le plus proche, ce domaine de la théorie des nombres contient des problèmes dont la difficulté surpasse essentiellement les forces de la science actuelle.

---

[26]) Voir Jarník 8 (1931); nous admettons ici aussi le cas $k = 1$, qui, d'ailleurs, est complètement banal.

Index bibliographique.

M. A. = Mathematische Annalen, M. Z. = Mathematische Zeitschrift.

H. Bohr et H. Cramér. **1:** Die neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie, Encyklopädie der math. Wissensch. II, 3, p. 724—849 (1922).

J. G. van der Corput. **1:** M. A. 81 (1920), p. 1—20. **2:** M. A. 87 (1922), p. 39—65 [rectification M. A. 89 (1923), p. 160]. **3:** M. A. 89 (1923), p. 215—254. **4:** M. A. 98 (1928), p. 697—716 [rectification M. A. 100 (1928), p. 480]. **5:** M. Z. 28 (1928), p. 301—310. **6:** M. Z. 29 (1929), p. 397—426.

F. Hausdorff. **1:** M. A. 79 (1919), p. 157—179.

V. Jarník. **1:** M. Z. 24 (1926), p. 500—518. **2:** M. A. 100 (1928), p. 699—721. **3:** M. A. 101 (1929), p. 136—146. **4:** The Tôhoku math. journ. 30 (1929), p. 354—371. **5:** Věstník Královské české spol. nauk 1930, No. 6. **6:** ibid., 1930, No. 7. **7:** M. Z. 33 (1931), p. 62—84.[27]) **8:** M. Z. 33 (1931), p. 85—97. **9:** M. Z. 36 (1933), p. 581—617. **10:** M. Z. 38 (1934), p. 217—256.

V. Jarník et A. Walfisz. **1:** M. Z. 32 (1930), p. 152—160.

E. Landau. **1:** Vorlesungen über Zahlentheorie, t. II (1927). **2:** Göttinger Nachrichten 1912, p. 687—770, voir surtout p. 764—766. **3:** Berliner Akad. Berichte 1915, p. 458—476. **4:** Göttinger Nachrichten 1924, p. 137—150. **5:** Monatshefte f. Math. u. Phys. 34 (1926), p. 1—36. **6:** M. Z. 21 (1924), p. 126—132. **7:** M. Z. 24 (1926), p. 299—310.

J. E. Littlewood et A. Walfisz. **1:** Proceedings of the Royal Society (London) 106 (Ser. A) (1924), p. 478—488 (avec une note de M. E. Landau).

L. W. Nieland. **1:** M. A. 98 (1928), p. 717—736 [rectification M. A. 100 (1928), p. 480].

H. Petersson. **1:** Abhandlungen aus dem math. Seminar Hamburg 5 (1927), p. 116—150.

W. Sierpiński. **1:** Prace matematyczno-fizyczne 17 (1906), p. 241—282.

G. Szegö. **1:** M. Z. 25 (1926), p. 388—404.

E. C. Titchmarsh. **1:** Quarterly Journal of Math., Oxford series 2 (1931), p. 161—173 [rectification ibid. 3 (1932), p. 141].[28])

G. Voronoï. **1:** Journal f. reine u. angew. Mathem. 126 (1903), p. 241—282.

A. Walfisz. **1:** M. Z. 19 (1924), p. 300—307. **2:** M. A. 95 (1926), p. 69—83. **3:** M. Z. 26 (1927), p. 106—124. **4:** M. Z. 26 (1927), p. 66—88. **5:** M. Z. 27 (1927), p. 245—268. **6:** M. Z. 35 (1932), p. 212—229. **7:** Prace matematyczno-fizyczne 36 (1928/9), p. 107—135.

H. Weyl. **1:** M. A. 77 (1916), p. 313—352. **2:** M. Z. 10 (1921), p. 88—101.

J. R. Wilton. **1:** Messenger of Mathem. 58 (1928), p. 67—80.

---

[27]) Le lecteur est prié de rectifier l'erreur suivante: à la page 81, les nombres λ_n et $a_{\mu\nu}$ doivent être rattaché à la forme inverse de Q (au lieu à la forme Q elle-même). Voir A. Walfisz, Zentralblatt f. Math. 1 (1931), p. 130—131.

[28]) (Note ajoutée le 27 septembre 1934.) Après ma conférence, M. G. N. Watson a bien voulu me communiquer que M. Titchmarsh a réussi à remplacer l'inégalité $f \leq \frac{27}{82}$ (pour le cas du cercle, voir (11)) par l'inégalité plus précise $f \leq \frac{15}{46}$. La démonstration de ce résultat va paraître dans les Proceedings of the London Math. Soc.