Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

A. Matusievič

Prvá a druhá diferenciální forma ploch s rovinnými křivoznačnými čarami

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 2, 119--132

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121771

Prvá a druhá diferenciální forma ploch s rovinnými křivoznačnými čarami.

Napsal *A. Matusievič.*

I. Diferenciální rovnice čáry na ploše, jejíž hlavní normála s normálou plochy svírá konstantní úhel σ,[1] obdrží se podle *O. Bonnetova* vzorce pro geodetickou křivost,[2] z výrazu pro poloměr křivosti čáry na ploše[3]) a z relace:

$$\frac{1}{\varrho_\varphi} = \frac{\sin\sigma}{\varrho},$$

v tomto tvaru:

$$\operatorname{tg}\sigma\,(D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2)\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} =$$
$$= \sqrt{EG - F^2}\,[du\,d^2v - dv\,d^2u + \{{}^{11}_{2}\}\,du^3 + (2\{{}^{12}_{2}\} - \{{}^{11}_{1}\})\,du^2\,dv +$$
$$+ (\{{}^{22}_{2}\} - 2\{{}^{12}_{1}\})\,du\,dv^2 - \{{}^{22}_{1}\}\,dv^3]. \qquad (1)$$

Vidíme tudíž, že všechny čáry tohoto druhu vytvořují na ploše dvojmocnou varietu křivek, jejíž limitní případy $\sigma = 0$ a $\sigma = \frac{1}{2}\pi$ odpovídají geodetickým a asymptotickým čarám dané plochy.

2. Torse čáry $\sigma =$ *konst.* rovná se její torsi geodetické.[4] Víme dále, že křivoznačné čáry jsou jediné, jejichž geodetická torse se rovná nule,[5] i možno vysloviti věty:

1. Každá křivoznačná čára, která jest též čárou $\sigma =$ konst., je rovinná.

2. Každá rovinná čára $\sigma =$ konst. je čarou křivoznačnou.

Zvolme nyní čáry $\sigma =$ *konst.* za jednu soustavu parametrických křivek a to $u =$ *konst.* Je tedy při tom $U = \operatorname{cotg}\sigma$ libovolnou funkcí jedné proměnné u, a rovnice (1) přechází v podmínku:

$$U\sqrt{EG - F^2}\,.\,\{{}^{22}_{1}\} = -\sqrt{G}\,.\,D''. \qquad (2)$$

Vidíme, že plocha má jednu soustavu rovinných křivoznačných čar, tvoří-li soustava čar $\sigma =$ *konst.* (u — křivky) a její ortho-

---

1) *Bianchi,* Vorlesungen über Differentialgeometrie, 1910, str. 166—167.
2) Tamtéž, str. 148.
3) Tamtéž, str. 101.
4) Tamtéž, str. 166.
5) Tamtéž, str. 165.

gonální trajektorie (v — křivky) konjugovanou soustavu, což se stane, jsou-li splněny podmínky:

$$F = 0, \quad D' = 0, \quad D'' = U \frac{1}{2\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial G}{\partial u}. \tag{3}$$

Eliminujeme-li za těchto podmínek z rovnic *Gaussovy* a *Mainardiho-Codazziho* veličiny D a D'', mají tyto rovnice tvar:

$$\sqrt{1+U^2} \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{1+U^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)}{\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}}\right] = \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}. \tag{4}$$

Prvá z těchto relací vyjadřuje charakteristickou vlastnost ploch s rovinnými křivoznačnými čarami: budiž $ds^2 = E du^2 + G dv^2$ lineární element takové plochy, existuje tedy funkce jedné proměnné u, a to $\lambda^2 = \frac{1}{1+U^2}$, redukující na nulu úplnou křivost formy:

$$ds_1^2 = \lambda^2 E\, du^2 + G\, dv^2,$$

jsou-li parametrické křivky u rovinnými křivoznačnými čarami.

3. V případech:

$$1. \quad E = G = e^{2\omega} \qquad \text{nebo} \qquad 2. \quad E = \operatorname{sh}^2 \omega, \quad G = \operatorname{ch}^2 \omega$$

dostáváme stejný tvar systému (4), a to:

$$(1 + U^2)\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} + UU' \frac{\partial \omega}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial \omega}{\partial u}}\right\} = \frac{\partial \omega}{\partial u} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial v}.[6] \tag{5}$$

Je-li ω integrálem tohoto simultanního systému rovnic, mají plochy elementů:

$$ds^2 = e^{\pm 2\omega}(du^2 + dv^2), \tag{5'}$$

$$ds^2 = \operatorname{sh}^2 \omega\, du^2 + \operatorname{ch}^2 \omega\, dv^2, \tag{5''}$$

společný sférický obraz rovinných křivoznačných čar.

[6]) *G. Darboux*, Théorie gén. des surfaces, t. IV. 1896, str. 221.

4. Prvá z rovnic (4) může býti psána:

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)+2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)\cdot\frac{1}{\lambda^2}+2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)=0. \quad (6)$$

Derivujeme tuto rovnici podle v a eliminujeme z ní $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$, užívajíce druhé rovnice (4); obdržíme:

$$\frac{1}{\lambda^2}=-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{E}}\cdot\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right]. \quad (7)$$

Jako užití této relace, jejíž pravá strana má býti funkcí jediné proměnné u, určíme lineární element tvaru:

$$ds^2=(U+V)^n\,(du^2+dv^2). \quad (8)$$

Snadným výpočtem nalezneme:

$$ds^2=(U+k+\alpha\cos\beta\,v)^{\pm 2}\,(du^2+dv^2), \quad (9)$$

kde U je libovolná funkce proměnné u; k, α, β — konstanty.

Hořejší znaménko přísluší plochám, které pomocí deformace válcové plochy obalené rovinami křivoznačných čar přechází v *O. Bonnetovu* minimální plochu.[7]

Dolejší znaménko odpovídá lineárnímu elementu známých *stéro-cyklid E. Laguerrových.*[8] Je-li v tomto případě $U+k=u$, dostaneme soustavu *helicid* H_k, které jsou orthogonální k soustavě koule konstantního poloměru b, a se středem na kruhu poloměru a; číslo $k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ je indexem helicidy, charakterisujícím její tvar.[9]

Jiný zvláštní případ vzorce (9) podávají *Dupinovy cyklidy*, pro níž $U=I\cdot\operatorname{ch}\delta u+k'$ a znaménko záporné.

5. Vraťme se nyní k systému (4) a označme v něm

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=\varphi;\qquad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=\psi. \quad (10)$$

Systém přejde na tvar:

$$\sqrt{1+U^2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{1+U^2}\cdot\varphi)+\frac{\partial\psi}{\partial v}=0,$$

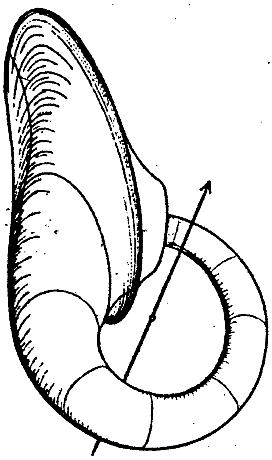
$$\frac{\partial^2\log\varphi}{\partial u\,\partial v}=\varphi\psi. \quad (11)$$

---

7) *G. Darboux*, Théorie gén. des surfaces, t. I, str. 315—316.

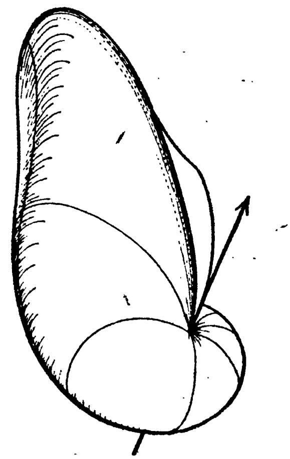
8) Oeuvres de *E. Laguerre*, t. II.

9) H_∞ je pseudosférou, druhý limitní případ H_i přísluší vroubkované sféře; viz »Ob odnom klassě sfero-cyklid«, Izv. univers. sv. Vladimíra, 1913, IX.



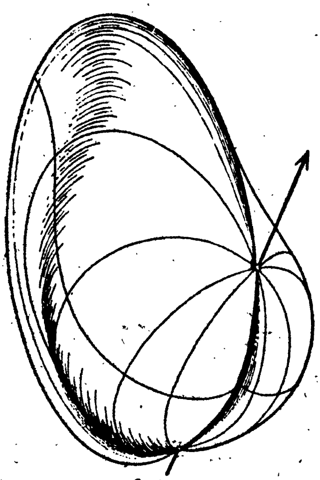
$H_{\frac{3}{4}}$

Obr. 1.



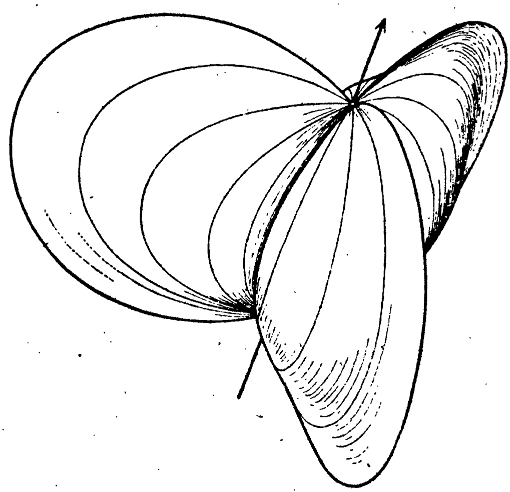
H_0

Obr. 2.



$H_{\frac{i}{2}}$

Obr. 3.



$H_{\frac{3i}{4}}$

Obr. 4.

První z těcho rovnic je podmínkou úplného diferenciálu výrazu:

$$d\sigma = -\frac{\psi}{\sqrt{1+U^2}}\,du + \sqrt{1+U^2}\,.\,\varphi\,.\,dv, \tag{12}$$

a proto smíme zavésti novou funkci $\sigma(u, v)$, pro niž:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = -\frac{\psi}{\sqrt{1+U^2}}; \quad \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \sqrt{1+U^2}\,\varphi, \tag{13}$$

kde $\sigma(u, v)$ se určí *jedinou rovnicí:*

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial\sigma}{\partial v}}\right) = -\frac{\partial\sigma}{\partial u}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial v}. \tag{14}$$

Její druhý integrál je rovnice *Riccatiho*:[10])

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = Me^{i\sigma} + Ne^{-i\sigma}, \tag{15}$$

kde M a N jsou *libovolné* funkce proměnné u.[11])

6. Abychom nalezli rovnici přímo určující φ, eliminujeme ze systému (11) ψ a integrujeme podle proměnné u výsledek eliminace; obdržíme:

$$\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial v^2} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \log\varphi}{\partial v}\right)^2 + \frac{1+U^2}{2}\,.\,\varphi^2 + \mathbf{V} = 0, \tag{16}$$

kde $\mathbf{V}$ je libovolnou funkcí proměnné v.[12])

Předpokládáme-li funkci φ nalezenou jednou z vyložených metod, můžeme napsati *Laplaceovu* rovnici, určující $\sqrt{G}$:

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial\log\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial^2\log\varphi}{\partial u\,\partial v}\sqrt{G} = 0. \tag{17}$$

Rovnice tato má obecný integrál

$$\sqrt{G} = \varphi\left(\int\frac{V_0}{\varphi}\,dv + U_0\right),^{13)} \tag{18}$$

10) G. *Darboux*, Théorie gén. des surfaces, t. IV., 1896, str. 221—222.

11) Pro zvláštní případ *Darbouxových isothermických ploch* nejsou funkce M a N libovolné a má funkce h jiný geometrický význam než σ.

12) Dovedeme tuto rovnici úplně integrovati v případě $\mathbf{V} = konst.$

13) Integrační funkce U_0, V_0 tohoto výrazu jsou závislé na libovolných funkcích, zavedených integrací rovnice (16). Relace tyto je nutno v každém zvláštním případě určiti.

takže, označíme-li pro stručnost:

$$\varphi\left(\int \frac{V_0}{\varphi}\, dv + U_0\right) = \Phi, \tag{19}$$

nabudou dvě základní diferenciální formy tvaru:

$$I = \frac{1}{\varphi^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 du^2 + \Phi^2 dv^2, \tag{20}$$

$$II = \frac{1}{\varphi^2}\,\frac{\partial (U\varphi)}{\partial u}\,.\,\frac{\partial \Phi}{\partial u}\, du^2 + U\varphi\,\Phi\, dv^2. \tag{21}$$

7. Užijeme předešlých obecných vzorů k určení *W-ploch s rovinnými křivoznačnými čarami.*

Vzhledem k tomu, že hlavní poloměry křivosti jsou dány výrazy:

$$r_1 = -\frac{G}{D''} = -\frac{\Phi}{U\varphi}; \quad r_2 = -\frac{E}{D} = -\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}}{\dfrac{\partial (U\varphi)}{\partial u}}, \tag{22}$$

je plocha W-plochou, existuje-li relace:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = f\left(\frac{\Phi}{U\varphi}\right).\,\frac{\partial (U\varphi)}{\partial u}, \tag{23}$$

z čehož integrací:

$$\frac{\Phi}{\varphi} = U\,.\,\Psi\left(\int V_0 V_1\, dv + U_1\right);$$

takže jest:

$$\Phi = \frac{1}{V_1}\,\frac{\Psi(\omega)}{\Psi'(\omega)}; \quad U\varphi = \frac{1}{V_1\,\Psi'(\omega)}, \tag{24}$$

kde U_1, V_1 značí libovolné funkce, Ψ je prozatím neznámá funkce argumentu ω:

$$\omega = \int V_0 V_1\, dv + U_1, \tag{25}$$

a čárkami označeny jsou derivace podle ω.

Dosadíme-li hodnoty funkcí Φ a $U\varphi$ do výrazů pro hlavní poloměry křivosti, obdržíme:

$$r_1 = -\Psi(\omega); \quad r_2 = \frac{\Psi'^2(\omega) - \Psi(\omega)\,\Psi''(\omega)}{\Psi''(\omega)}, \tag{26}$$

t. j. *argument, na němž závisí hlavní poloměry křivosti W-ploch s rovinnými křivoznačnými čarami, je součtem dvou funkcí proměnných u resp. v.*

Výsledek tento pochází od *L. Raffyho.*[14])

8. Pro určení tvaru funkce $\Psi(\omega)$ užijeme rovnice (16), jež substitucí:

$$z = \frac{1}{\Psi'(\omega)}; \quad \varphi = \frac{z}{UV_1}, \tag{27}$$

převedeme na tvar:

$$\frac{d^2 \log z}{d\omega^2} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d \log z}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{2V_0 V_1' + V_0' V_1}{V_0^2 V_1^2}\right) \cdot \frac{d \log z}{d\omega} +$$
$$+ \tfrac{1}{2} z^2 e^{-2\left(\log \frac{U}{\sqrt{1+U^2}} + \log V_0 V_1^2\right)} +$$
$$+ \frac{1}{V_0 V_1^2}\left[V - \frac{V_1 V_1'' - V_1'^2}{V_1^2} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{V_1'}{V_1}\right)^2\right] = 0. \tag{28}$$

Obecně možno této relaci vyhověti, položíme-li

$$\frac{2V_0 V_1' + V_0' V_1}{V_0^2 V_1^2} = m = \text{konst.} \tag{29}$$

$$\frac{1}{V_0 V_1^2}\left[V - \frac{V_1 V_1'' - V_1'^2}{V_1^2} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{V_1'}{V_1}\right)^2\right] = n = \text{konst.} \tag{30}$$

a z toho:

$$\log \frac{U}{\sqrt{1+U^2}} + \log V_0 V_1^2 = m\omega + k.\text{[15])} \tag{31}$$

Máme tedy:

$$\frac{d^2 \log z}{d\omega^2} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d \log z}{d\omega}\right)^2 + m\frac{d \log z}{d\omega} + \frac{k'}{2}\left(\frac{z}{e^{\omega}}\right)^2 + n = 0, \tag{32}$$

což se dá upraviti ještě jinak, zavedeme-li novou proměnnou ϑ:

$$\vartheta = \log z - m\omega = -\log \Psi'(\omega) - m\omega, \tag{33}$$

takže konečně:

$$2\frac{d^2\vartheta}{d\omega^2} - \left(\frac{d\vartheta}{d\omega}\right)^2 + 2C_1 e^{2\vartheta} + 2C_2 = 0, \tag{34}$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty nezávislé na m.

---

[14]) *L. Raffy,* Determination des surfaces de Joachimsthal à courbures principales liées par une relation. Ann. Ec. Norm., XX. (1903), str. 379.

[15]) Ve skutečnosti jest zřejmo, že funkce $z(\omega)$, vyhovující rovnici (28), existuje při jistých podmínkách pro libovolné funkce V_0, V_1 V a U, neboť platí-li na př. podmínky (29), (30) a (31), dovedeme napsati rovnici (28) ve tvaru obyčejné rovnice druhého řádu, jejíž obecný integrál určí z jako funkci argumentu ω a integračních konstant. Dosadíme-li do (28) nejobecnější výraz $z(\omega)$, přechází tato rovnice na identitu, jež platí pro veškeré hodnoty argumentu ω. Z toho plyne ale, že i v obecném případě platí relace (30) a (31) a že v souvislosti s výsledkem integrační podmínky (29) jest:

$$\log \frac{U}{\sqrt{1+U^2}} + \log V_0 V_1^2 = f(\omega) = m\omega.$$

Integrujeme-li tuto rovnici, dostaneme:

$$e^{-\vartheta} = Ae^{\sqrt{2C_2}\omega} + Be^{-\sqrt{2C_2}\omega} + C, \tag{35}$$

kde:

$$4AB - C^2 = \frac{C_1}{C_2}. \tag{36}$$

Dosadíme-li výraz pro funkci ϑ do vzorce (33), obdržíme integrací:

$$\Psi'(\omega) = e^{-\vartheta - m\omega} = Ae^{\alpha\omega} + Be^{\beta\omega} + Ce^{\frac{\alpha+\beta}{2}\omega}, \tag{37}$$

$$\Psi(\omega) = \frac{A}{\alpha}e^{\alpha\omega} + \frac{B}{\beta}e^{\beta\omega} + \frac{2C}{\alpha+\beta}e^{\frac{\alpha+\beta}{2}\omega} + h, \tag{38}$$

kde:

$$\alpha = \sqrt{2C_2} - m, \qquad \beta = -\sqrt{2C_2} - m.$$

Geometrický význam integrační konstanty h plyne z tvaru poloměrů křivosti (26): variací konstanty h obdržíme W-plochy s rovinnými křivoznačnými čarami, navzájem rovnoběžné.

9. Základní formy (20) a (21) obsahují libovolné funkce, které však dovedeme eliminovati zavedením nových proměnných u_1, v_1 pomocí rovnic:

$$\int \frac{U'\,du}{1+U^2} = u_1, \qquad \int \frac{dv}{V_1} = v_1. \tag{39}$$

Z toho plyne ihned, že:

$$\operatorname{arc\,tg} U = u_1,$$

pak užitím rovnice (29), která se snadno převede na totální:

$$V_0 V_1^2 = \frac{1}{mv_1}.\text{[16]}$$

Mají tedy základní formy tvar:

$$I = \left(\frac{\Psi'^2 - \Psi\Psi''}{\Psi'}\right)^2 du_1^2 + \left(\frac{\Psi}{\Psi'}\right)^2 dv_1^2, \tag{40}$$

$$II = \frac{\Psi\Psi'' - \Psi'^2}{\Psi'^2}du_1^2 + \frac{\Psi}{\Psi'^2}dv_1^2, \tag{41}$$

kde

$$\omega = \frac{1}{m}(\log\sin mu_1 - \log mv_1) = \log\left(\frac{\sin mu_1}{mv_1}\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{42}$$

10. Označme v (26), (37) a (38):

$$R_1 = r_1 + h; \quad R_2 = r_2 + h; \quad x = e^{\frac{\beta-\alpha}{2}\omega} = \left(\frac{mv_1}{\sin mu_1}\right)^{\frac{\sqrt{2C_2}}{m}}; \quad n = \frac{2\beta}{\beta-\alpha}. \tag{43}$$

---

[16]) V argumentu u_1 a v_1 jsou vynechány adiční integrační konstanty.

Pro hlavní poloměry křivosti obdržíme:

$$R_1 = -x^{n-1} . (a_0x^2 + 2a_1x + a_2),$$
$$R_2 = -x^{n-1} . \left(\frac{b_0x^2 + 2b_1x + b_2}{c_0x^2 + 2c_1x + c_2}\right), \tag{44}$$

kde

$$a_0 = \frac{B}{\beta}, \quad a_1 = \frac{C}{\alpha - \beta}, \quad a_2 = \frac{A}{\alpha},$$
$$b_0 = \frac{BC(\alpha-\beta)^2}{2\beta(\alpha+\beta)}, \quad 2b_1 = \frac{AB(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta}, \quad b_2 = \frac{AC(\alpha-\beta)^2}{2\alpha(\alpha+\beta)}, \tag{45}$$
$$c_0 = B\beta, \quad 2c_1 = \frac{C(\alpha+\beta)}{2}, \quad c_2 = A\alpha.$$

V případě, kdy

$$n = \tfrac{3}{2}, \quad B = 0,$$

obdržíme:

$$a_0 = b_0 = c_0 = b_1 = 0, \quad a_1c_2 - a_2c_1 = 0,$$

a poloměry křivosti jsou vázány jednoduchou relací:

$$R_1R_2 = \frac{a_2b_2}{c_2} = \text{konst.}$$

čili jinak:

$$r_1r_2 + h(r_1 + r_2) + h^2 \pm k^2 = 0 \tag{46}$$

t. j. relace mezi hlavními poloměry křivosti je involucí. Je-li zde $h = 0$, anebo $h^2 = \pm k^2$, obdržíme plochy *Enneperovy*[17]) resp. *Woretzshovy*.[18]) Výsledek je v souvislosti s větou *O. Bonnetovou*.[19])

11. V obecném případě relaci mezi R_1 a R_2 obdržíme eliminací x ze dvou rovnic:

$$B_0x^4 + B_1x^3 + B_2x^2 + Bx_3 + B_4 = 0, \tag{47}$$
$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + A_n = 0, \tag{48}$$

kde velká písmena označují lineární funkce poloměrů křivosti, dané výrazy:

$$A_n = R_1$$
$$B_0 = a_0c_0R_2; \quad B_1 = 2(a_0c_1 + a_1c_0)R_2 - b_0R_1; \quad B_2 = (a_0c_2 + a_2c_0)R_2 - 2b_1R_1;$$
$$B_3 = 2(a_1c_2 + a_2c_1)R_2 - b_2R_1; \quad B_4 = a_2c_2R_2.$$

Relace je racionální, je-li n racionálním zlomkem.

12. Podmínka:

$$\mathfrak{U}\varphi = \mathfrak{W}\psi, \tag{49}$$

kde $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{W}$ jsou libovolné funkce proměnných u resp. v určuje zvláštní třídu ploch s rovinnými křivoznačnými čarami.

---

17) *L. Bianchi*, Vorlesungen üb. Differentialgeometrie, 1910, str. 683, 694.
18) *G. Darboux*, Théorie gén. des surfaces, t. IV, 1896, str. 217—218.
19) *L. Bianchi*, Vorlesungen, str. 489.

Z rovnic (13) je patrno, že při této podmínce je argument funkce $\sigma(u, v)$ součtem dvou funkcí:

$$\omega = \int \frac{\mathfrak{U}}{1+U^2} du - \int \mathfrak{W}\, dv = \int \lambda^2 \mathfrak{U}\, du - \int \mathfrak{W}\, dv. \tag{50}$$

Rovnice (14) nabývá tedy tvaru obyčejné, totiž:

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\frac{d^2\sigma}{d\omega^2}}{\frac{d\sigma}{d\omega}}\right) = -\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)^2. \tag{51}$$

Její druhý integrál je

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = Me^{i\sigma} + Ne^{-i\sigma},$$

kde M a N jsou konstanty.

Integrací obdržíme:

$$\sigma = \sqrt{\frac{M}{N}} \operatorname{th}\left(\sqrt{MN}\,\omega + k\right), \tag{52}$$

odkud:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1+U^2}} \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \frac{C_1 \mathfrak{W}}{\sqrt{1+U^2} \,.\, \operatorname{ch}(C_1\omega + C_2)}; \\ \psi &= -\sqrt{1+U^2} \frac{\partial\sigma}{\partial u} = \frac{C_1 \mathfrak{U}}{\sqrt{1+U^2} \,.\, \operatorname{ch}(C_1\omega + C_2)}; \end{aligned} \tag{53}$$

kde:

$$C_1 = -2\sqrt{MN}.$$

Jsou-li známy výrazy funkcí φ a ψ, nalezneme kvadraturami i koeficienty obou základních forem. Při tom však je nutno dbáti možných relací mezi libovolnými funkcemi.

13. Označme P_u^λ, P_v^μ plochy s rovinnými křivoznačnými čarami v soustavě u resp. v, podobně: $P_{uv}^{\lambda\mu}$ plochu, která má obě soustavy rovinných křivoznačných čar. Pro plochy $P_{uv}^{\lambda\mu}$ platí podmínka (49), neboť jest:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\, \partial v} = \varphi\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial u\, \partial v}. \tag{54}$$

Budiž

$$ds^2 = E\, du^2 + G\, dv^2 \tag{55}$$

lineární element plochy P_u^λ; splněna-li jest podmínka (49), vyjadřuje forma:

$$ds^2 = \lambda^2 E du^2 + \mu^2 G dv^2 \tag{56}$$

lineární element plochy $P_v^{\frac{1}{\mu}}$, při čemž λ se určí z rovnice (7), μ značí libovolnou funkci jediné proměnné v.

Napišme skutečně rovnice analogické systému (4), ale pro parametrické křivky $v = konst.$, což dovedeme pomocí transformace:

$$u \to v, \quad \varphi \to \psi, \quad \frac{1}{\sqrt{1+U^2}} = \lambda \to \frac{1}{\mu}.$$

Obdržíme tím systém:

$$\mu \frac{\partial}{\partial v}(\mu\psi) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial^2 \log \psi}{\partial u\, \partial v} = \varphi\psi. \tag{57}$$

Zavedeme-li nyní v těchto rovnicích $\lambda^2 E$, $\mu^2 G$ místo E, G, dostaneme vzhledem k podmínce (49):

$$\lambda \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda}\varphi\right) = 0, \quad \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial u\, \partial v} = \varphi\psi, \tag{58}$$

což platí identicky, neboť u-křivky jsou rovinné křivoznačné čáry plochy P_u^λ.

14. Ukažme zde zajímavou vlastnost ploch $P_{uv}^{\lambda\mu}$.

Pro každou plochu $P_{uv}^{\lambda\mu}$, jejíž lineární element je:

$$ds_{+1}^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

lze určiti dvě diferenciální formy nulové úplné křivosti

$[P_u^1]$ $\qquad ds_1^2 = \lambda^2 Edu^2 + Gdv^2,$

$[P_v^1]$ $\qquad ds_2^2 = Edu^2 + \mu^2 Gdv^2.$

Představme si plochu $P_{uv}^{\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\mu}}$, pro niž

$$ds_{-1}^2 = \lambda^2 Edu^2 + \mu^2 Gdv^2,$$

a sečtěme výrazy invariantů úplné křivosti forem ds_1^2 a ds_2^2; obdržíme:

$$K_u^1 + K_v^1 = 0,$$

čili po vhodné úpravě:

$$K_{uv}^{\lambda\mu} + K_{uv}^{\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\mu}} = 0.$$

Došli jsme výsledku:

Dvě plochy:

$[P_{uv}^{\lambda\mu}]$ $\qquad ds_{+1}^2 = Edu^2 + Gdv^2,$

$[P_{uv}^{\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\mu}}]$ $\qquad ds_{-1}^2 = \lambda^2 Edu^2 + \mu^2 Gdv^2,$

jsou simultanně plochami se všemi rovinnými křivoznačnými čarami a mají v příslušných bodech úplné křivosti stejné co do absolutní hodnoty a opačného znaménka.

Reální díly plochy $P^{\lambda\mu}_{uv}$ se transformují v imaginární díly plochy $P^{\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\mu}}_{uv}$ a naopak.

15. Vzorce (53) pro plochy $P^{\lambda\mu}_{uv}$ nabývají tvaru:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\mathfrak{W}}{(A \operatorname{ch} au_1 - D \operatorname{sh} au_1) \operatorname{ch} av_1 - (C \operatorname{ch} au_1 + B \operatorname{sh} au_1) \operatorname{sh} av_1}, \\ \psi &= \frac{\mathfrak{U}}{(A \operatorname{ch} av_1 - C \operatorname{sh} av_1) \operatorname{ch} au_1 - (D \operatorname{ch} av_1 + B \operatorname{sh} av_1) \operatorname{sh} au_1}. \end{aligned} \tag{59}$$

Kde A, B, C, D jsou libovolné konstanty, při čemž:

$$\frac{1}{a\alpha} = AB + CD, \tag{60}$$

a

$$u_1 = \int \mathfrak{U}\, du, \qquad v_1 = \int \mathfrak{W}\, dv. \tag{61}$$

Koeficienty základních forem, vyhovující relaci mezi libovolnými funkcemi, které plynou z identit:

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \psi, \qquad \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \varphi, \tag{62}$$

určíme kvadraturami:

$$\begin{aligned} \sqrt{E} &= \psi \left(\int \frac{U_{02}}{\psi} du + V_{02} \right), \\ \sqrt{G} &= \varphi \left(\int \frac{V_{01}}{\varphi} dv + U_{01} \right). \end{aligned} \tag{63}$$

Omezíme se na udání pouze konečného výsledku výpočtů, které nejsou obtížné, vyžadují však poměrně mnoho místa:

$$\begin{aligned} \sqrt{E} &= \frac{(A \operatorname{ch} av - C \operatorname{sh} av)\left(\operatorname{ch} au \frac{dU_{01}}{du} - a \operatorname{sh} au \,.\, U_{01}\right)}{(A \operatorname{ch} av - C \operatorname{sh} av) \operatorname{ch} au - (D \operatorname{ch} av + B \operatorname{sh} av) \operatorname{sh} au} - \\ &- \frac{(D \operatorname{ch} av + B \operatorname{sh} av)\left(\operatorname{sh} au \frac{dU_{01}}{du} - a \operatorname{ch} au \,.\, U_{01}\right) + V_{02}}{(A \operatorname{ch} av - C \operatorname{sh} av) \operatorname{ch} au - (D \operatorname{ch} av + B \operatorname{sh} av) \operatorname{sh} au} = \frac{P_1}{P}, \\ \sqrt{G} &= \frac{(A \operatorname{ch} au - D \operatorname{sh} au)\left(\operatorname{ch} av \frac{dV_{02}}{dv} - a \operatorname{sh} av \,.\, V_{02}\right)}{(A \operatorname{ch} au - D \operatorname{sh} au) \operatorname{ch} av - (C \operatorname{ch} au + B \operatorname{sh} au) \operatorname{sh} av} - \\ &- \frac{(C \operatorname{ch} au + B \operatorname{sh} au)\left(\operatorname{sh} av \frac{dV_{02}}{dv} - a \operatorname{ch} av \,.\, V_{02}\right) + U_{01}}{(A \operatorname{ch} au - D \operatorname{sh} au) \operatorname{ch} av - (C \operatorname{ch} au + B \operatorname{sh} au) \operatorname{sh} av} = \frac{P_2}{P}. \end{aligned} \tag{64}$$

Dále z relací (7) a z formulí (59) snadno nalezneme:

$$\frac{1}{\lambda^2} = 1 + U^2 = -\frac{1}{\varphi\psi}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right) =$$
$$= a^2\,[(A^2 - C^2)\,\mathrm{ch}^2\,au - 2(AD+BC)\,\mathrm{ch}\,au\,\mathrm{sh}\,au + (D^2 - B^2)\,\mathrm{sh}^2\,au],$$
$$\frac{1}{\mu^2} = 1 + V^2 = -\frac{1}{\varphi\psi}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = \tag{65}$$
$$= a^2\,[(A^2 - D^2)\,\mathrm{ch}^2\,av - 2(AC+BD)\,\mathrm{ch}\,av\,\mathrm{sh}\,av + (C^2 - B^2)\,\mathrm{sh}^2\,av],$$

a tedy pro veličiny D, D'', čili též $\sqrt{EG}\,.\,L$, $\sqrt{EG}\,.\,N$,[20]) nabýváme vzorců:

$$\sqrt{EG}\,.\,L = \frac{aP_1}{p^2}\,.\,\Delta_1,$$

kde Δ_1 je dáno odmocninou:

$$\sqrt{\left(A^2-D^2-\frac{1}{a^2}\right)\mathrm{ch}^2\,av - 2\,(AC+BD)\,\mathrm{ch}\,av\,.\,\mathrm{sh}\,av + \left(C^2-B^2+\frac{1}{a^2}\right)\mathrm{sh}^2\,av} \tag{66}$$

a

$$\sqrt{EG}\,.\,N = \frac{aP_2}{p^2}\,.\,\Delta_2,$$

kde Δ_2 je dáno odmocninou:

$$\sqrt{\left(A^2-C^2-\frac{1}{a^2}\right)\mathrm{ch}^2 au - 2\,(AD+BC)\,\mathrm{ch}\,au\,.\,\mathrm{sh}\,au + \left(D^2-B^2+\frac{1}{a^2}\right)\mathrm{sh}^2 au.}$$ [21])

Dospěli jsme k výsledku, že plochy $P_{uv}^{\lambda\mu}$ jsou určeny až na svou polohu v prostoru dvěma libovolnými funkcemi a pěti konstantami.

*

La première et la seconde forme différentielle d'une surface à lignes de courbure planes.

(Extrait de l'article précédent.)

L'équation d'une courbe tracée sur la surface et dont la normale principale fait avec la normale de la surface l'angle constant σ, s'écrit à l'aide de la formule (1), d'où l'on tire immédiatement la condition pour qu'une courbe coordonnée soit une ligne de courbure plane (formule (2)). Cette condition, ainsi que les deux autres (3), nous permettent d'écrire un système de deux équations partielles (4), dont dépend la détermination complète de l'élément linéaire d'une surface à lignes de courbure planes. Le système (5) cor-

---

[20]) *W. Blaschke,* Vorlesungen über Differentialgeometrie, I. díl, 1924, str. 57.

[21]) Ve vzorcích (64) až (66) indexy proměnných u, v jsou vynechány.

respond aux surfaces isothermiques, ainsi qu'aux surfaces dont la représentation sphérique est la même et dont l'élément linéaire a la forme (5″).

Les surfaces isothermiques (9) sont des sphèro-cyclides de *Laguerre*, ou bien forment une classe de surfaces dont les plans de lignes de courbure enveloppent un cylindre.

Les surfaces hélicides H_k forment une famille particulière de sphèro-cyclides orthogonales à une famille de sphères à rayon constant. Les hélicides H_∞ et H_l sont les deux cas limites; le premier correspond à la pseudosphère, le second à la sphère riflée limite. Les figures représentent les hélicides caractérisées par différentes valeurs du nombre $k(H_k)$, dependant du rapport du rayon constant des sphères de la famille à celui du cercle lieu des centres.

L'intégration du système (4) peut être effectuée à l'aide de la fonction σ, analogue à celle que *M. G. Darboux* a introduite pour traiter le cas des surfaces isothermiques (formules (10)—(14)). Les coefficients M, N, cependant, constants dans le cas des surfaces isothermiques, ne le sont plus pour le cas général (formule (15)).

L'autre méthode consiste dans la réduction du système à une seule équation (16). L'intégrale de cette équation étant connue, on trouve de suite les deux formes differentielles fondamentales I et II (formules (20) et (21)).

Comme application est étudié le cas des surfaces W à lignes de courbure planes. Les deux formes fondamentales de ces surfaces sont données par les formules (40) et (41) où Ψ est exprimée par (37), (38) et ω est définie par la formule (42). Les surfaces de *Enneper* et de *Woretsch* sont des cas particuliers de ces surfaces et sont déterminées par les formules (45), (46).

Une autre classe particulière fournissent les surfaces satisfaisant à la condition (49). Les surfaces ayant toutes les lignes de courbure planes, lesquelles l'auteur désigne par le symbole $P_{uv}^{\lambda\mu}$, font part de cette classe et jouissent de la propriété d'avoir la même courbure totale, que la surface transformée $P_{uv}^{\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\mu}}$, mais de signe contraire. Les expressions des deux formes fondamentales sont données en termes finies par les formules (64) et (65). Elles contiennent 2 fonctions et 5 constantes arbitraires.